

# Elemente der Analysis IV

Wolf P. Barth

Nürnberg, WS 07/08

Version vom 20. Oktober 2007

Mathematisches Institut der Universität  
Bismarckstr. 1 1/2, D-91054 Erlangen

## Inhaltsverzeichnis

<b>7</b>	<b>Integralrechnung mit mehreren Veränderlichen</b>	<b>2</b>
7.1	Kurven und ihre Bogenlänge . . . . .	2
7.2	Doppelintegrale . . . . .	6
7.3	Volumenberechnung . . . . .	13
7.4	Der Transformations-Satz . . . . .	21
<b>8</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<b>28</b>
8.1	Einführung . . . . .	28
8.2	Elementare Lösungsmethoden . . . . .	35
8.2.1	Homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung . . . . .	35
8.2.2	Inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung . . . . .	37
8.2.3	Trennung der Variablen . . . . .	39
8.2.4	Bernoullische Differentialgleichung . . . . .	41
8.2.5	Homogene Differentialgleichung . . . . .	43
8.2.6	Substitution . . . . .	44
8.3	Theorie: Existenz und Eindeutigkeit . . . . .	47
8.4	Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	57
8.5	Systeme von Differentialgleichungen . . . . .	70

## 7 Integralrechnung mit mehreren Veränderlichen

### 7.1 Kurven und ihre Bogenlänge

Kurven im  $\mathbb{R}^n$  sind Abbildungen

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

zum Beispiel

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix},$$

die „Wendeltreppe“. Meistens versteht man unter der Kurve aber nicht diese Abbildung, sondern die Bildmenge  $F([a, b]) \subset \mathbb{R}^n$ . Ich möchte mich aus der Diskussion darüber, was eine Kurve wirklich ist, heraushalten, und werde die Abbildung  $F$  die *Parametrisierung* der Kurve nennen. Zu einem Punkt  $\mathbf{x} = F(t)$  auf der Kurve gehört also ein Parameter  $t \in \mathbb{R}$ . Oft spart man sich auch noch die Bezeichnung  $F$  für die Parametrisierungsabbildung und schreibt eine Kurve einfach  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ .

**Definition 7.1** Die Kurve  $t \mapsto F(t)$  heißt differenzierbar, wenn ihre Parametrisierungsabbildung differenzierbar ist. Der Ableitungsvektor

$$\frac{dF}{dt}(t) = \left( \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right)$$

heißt der Geschwindigkeitsvektor im Kurvenpunkt  $\mathbf{x} = F(t)$ .

So ist etwa der Geschwindigkeitsvektor im obigen Beispiel

$$(-\sin(t), \cos(t), 1).$$

Dieselbe Kurve bekäme man auch durch die Parametrisierung ( $t = 2u$ )

$$u \mapsto (\cos(2u), \sin(2u), 2u).$$

Das ist dieselbe Kurve, mit der doppelten Geschwindigkeit durchlaufen. Ihr Geschwindigkeitsvektor berechnet sich auch als

$$2 \cdot (-\sin(2u), \cos(2u), 1).$$

Der Geschwindigkeitsvektor hängt also von der Parametrisierung ab.

**Definition 7.2** Die Kurve  $F[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei stetig differenzierbar. Dann heißt

$$\int_a^b \| F'(t) \| dt$$

die Länge oder Bogenlänge der Kurve.

Wenn die Ableitungen  $dx_i/dt$  stetig sind, dann ist auch

$$\| F'(t) \| = \sqrt{\left( \frac{dx_1}{dt}(t) \right)^2 + \dots + \left( \frac{dx_n}{dt}(t) \right)^2}$$

eine stetige Funktion von  $t$  und kann über das Intervall  $[a, b]$  integriert werden.

Mit dieser Bogenlänge ist es jetzt anders, als mit dem Geschwindigkeitsvektor: Wie man dieselbe Kurve auch parametrisiert, es kommt immer dieselbe Bogenlänge heraus.

**Satz 7.1 (Bogenlänge)** Die Bogenlänge einer stetig differenzierbaren Kurve ist unabhängig von der Parametrisierung.

Beweis. Es sei

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto F(t)$$

eine stetig differenzierbare Kurve. Wir nehmen an, wir hätten eine andere Parametrisierung derselben Kurve in der Form

$$G : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad u \mapsto g(u) \in [a, b] \mapsto F(g(u)) \in \mathbb{R}^n$$

mit einer stetig differenzierbaren Umparametrisierungsabbildung  $g : [c, d] \rightarrow [a, b]$ . Wir nehmen an,  $g$  sei umkehrbar, und habe eine differenzierbare Umkehrfunktion. Dann ist also immer  $g'(u) \neq 0$ . Und wir können dann auch gleich  $g'(u) > 0$  annehmen.

Der Geschwindigkeitsvektor der umparametrisierten Kurve ist

$$G'(u) = F'(g(u)) \cdot g'(u).$$

Ihre Bogenlänge wird damit

$$\int_c^d \|G'(u)\| du = \int_c^d \|F'(g(u))\| \frac{dt}{du} du = \int_a^b \|F'(t)\| dt,$$

wegen der Substitutionsformel aus der eindimensionalen Analysis. □

Wichtige Beispiele für Kurven, deren Bogenlänge man gelegentlich ausrechnen möchte, bilden Funktionsgraphen: Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar, dann ist die Kurve

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$$

in der Ebene stetig differenzierbar. Ihr Geschwindigkeitsvektor ist

$$F'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}.$$

Ihre Bogenlänge ist also dann

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt.$$

**Beispiel 7.1** Die Bogenlänge des Graphen der Funktion

$$f(x) := \frac{2}{3}\sqrt{x}^3$$

über dem Intervall  $[0, 1]$  berechnet sich zu

$$\int_0^1 \sqrt{1+x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{1+x}^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3} (\sqrt{2}^3 - 1).$$

Ein viel wichtigeres Beispiel ist natürlich die Länge eines Kreisbogens. Berechnen wir zunächst die Länge eines Bogens auf dem Einheitskreis, indem wir den Einheitskreis durch Winkelfunktionen parametrisieren:

$$F : t \mapsto (x(t), y(t)) = (\cos(t), \sin(t)).$$

Dann berechnet sich also die Länge  $L$  des Bogens zwischen zwei Punkten zu den Parametern  $t_1$  und  $t_2$  wie folgt:

$$\begin{aligned} F'(t) &= (-\sin(t), \cos(t)), \\ \|F'(t)\| &= \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1, \\ L &= \int_{t_1}^{t_2} dt = t_2 - t_1. \end{aligned}$$

Das ist ziemlich einfach. Aber was haben wir da eigentlich wirklich getan? Das hängt, wie immer, davon ab, was wir wissen. Wenn wir wissen, was ein Winkel ist, und insbesondere, was der Sinus eines Winkels ist, dann haben wir hier gezeigt: Die Länge eines Kreisbogens auf dem Einheitskreis ist gleich dem Winkel, der zu diesem Bogen gehört. Aber wo haben wir jemals einen Winkel definiert? Oder dessen Sinus?

Wenn wir noch nicht wissen, was ein Winkel ist, dann ist diese Rechnung unsere große Chance. Wir definieren den Winkel (im sogenannten Bogenmaß) einfach durch die Länge des zugehörigen Kreisbogens. Und was bedeutet unsere Rechnung dann? Sie bedeutet, dass in Richtung des Winkels  $t$  gerade der Punkt  $(\cos(t), \sin(t))$  auf dem Einheitskreis liegt. Und das bedeutet nicht mehr und nicht weniger als die geometrische Deutung der Winkelfunktionen

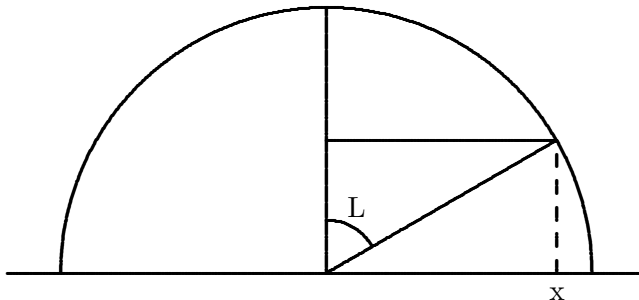
$$\sin = \frac{\text{Gegen-Kathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos = \frac{\text{An-Kathete}}{\text{Hypotenuse}}.$$

**Beispiel 7.2** *Nach diesem erkenntnistheoretischen Einschub möchte ich die Bogenlänge auf dem Einheitskreis noch durch seine Darstellung als Funktions-Graphen berechnen. Der obere Halbkreis ist der Graph der Funktion*

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

*Wir betrachten einen Bogen auf diesem Halbkreis, der über dem Intervall  $[0, x]$  liegt. Seine Länge ist dann*

$$L := \int_0^x \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2} dt = \int_0^x \sqrt{\frac{1}{1-t^2}} dt = \arcsin(t) \Big|_0^x = \arcsin(x).$$



$$L = \arcsin(x), \quad x = \sin(L).$$

**Aufgabe 7.1** Der Handlauf des Geländers einer Wendeltreppe beschreibe die Raumkurve

$$\gamma_a(t) := (\cos(t), \sin(t), at), \quad t \in [0, 2\pi], \quad (0 < a \in \mathbb{R} \text{ fix}).$$

Der Architekt hat für den Handlauf ein Band der Länge 7m bereitgestellt. Wie groß darf  $a$  höchstens sein, damit das bereitgestellte Band reicht?

**Aufgabe 7.2** Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos(t) + \sin(t), \cos(t) - \sin(t)).$$

**Aufgabe 7.3** Man skizziere die Menge

$$\left\{ \left( t^2, t - \frac{t^3}{3} \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

und berechne die Länge der in dieser Menge enthaltenen geschlossenen Teilkurve.

**Aufgabe 7.4** Berechnen Sie die Bogenlänge der Zykloide

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t - \sin(t), \cos(t)).$$

**Aufgabe 7.5** Die logarithmische Spirale ist die Kurve

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t)).$$

Berechnen Sie für  $a < b$  die Länge des Kurvenstücks  $\gamma([a, b])$ .

**Aufgabe 7.6** Bestimmen Sie die Bogenlänge der Kurve

$$\gamma : [0, 6\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = t \cdot (\cos(t), \sin(t)).$$

(Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass die Funktion

$$F(x) = \frac{x}{2} \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

eine Stammfunktion der Funktion  $f(x) = \sqrt{1+x^2}$  ist.)

## 7.2 Doppelintegrale

Ein Doppelintegral ist soetwas:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy.$$

Damit meint man folgendes: Erst rechnet man das innere Integral

$$F(y) := \int_c^d f(x, y) dx$$

aus. Weil die Funktion  $f$  nicht nur von  $x$ , sondern noch von  $y$  abhängt, ist auch dieses innere Integral eine Funktion von  $y$ . Ich habe sie  $F(y)$  genannt. Die muss man in einem zweiten Schritt noch über  $y$  integrieren:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_a^b F(y) dy \quad \text{mit} \quad F(y) := \int_c^d f(x, y) dx.$$

Wenn man diese Reihenfolge, in der man integrieren soll, andeuten will, schreibt man auch

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dx \right) dy.$$

Aber meistens lässt man die Klammern weg.

**Beispiel 7.3**  $\int_1^3 \int_1^2 x \cdot y \, dx dy$ .

*Das innere Integral ist*

$$\int_1^2 x \cdot y dx = y \cdot \int_1^2 x dx = y \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^2 = \frac{y \cdot (4 - 1)}{2} = \frac{3}{2} \cdot y.$$

*Und damit wird das ganze Integral*

$$\int_1^3 \frac{3}{2} y dy = \frac{3}{2} \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_1^3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{9 - 1}{2} = 6.$$

Da ergeben sich gleich einige Fragen. Die praktische Frage: Wie das geht? Na genauso wie ein-dimensionales Integrieren, entweder, man kennt eine Stammfunktion, oder man findet eine mit den üblichen Tricks aus dem letzten Semester, oder man muss es bleiben lassen.

Die theoretische Frage: Ob das geht? Wenn die Funktion

$$f : R \rightarrow \mathbb{R}, \quad R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq x \leq d, a \leq y \leq b\}$$

auf dem Rechteck  $R \subset \mathbb{R}^2$  stetig ist, dann ist natürlich auch für jedes feste  $y \in [a, b]$  die Funktion  $f(x, y)$ ,  $y$  fest, stetig auf dem Intervall  $[c, d]$ . Deswegen ist diese Funktion integrierbar, und  $F(y) = \int_c^d f(x, y) dx$  ist wohldefiniert. Aber ist diese neue Funktion  $F(y)$  über dem Intervall  $[a, b]$  auch wieder integrierbar? Dazu der nächste Satz:

**Satz 7.2 (Parameterabhängige Integrale)** Die Funktion  $f$  sei stetig auf dem abgeschlossenen Rechteck

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq x \leq d, a \leq y \leq b\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Dann ist die Integralfunktion

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(y) := \int_c^d f(x, y) dx$$

auch wieder stetig.

Dem Beweis schicken wir ein Lemma voraus.

**Satz 7.3 (Lemma: Gleichmäßige Stetigkeit)** Die Funktion  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig auf der kompakten Menge  $R \subset \mathbb{R}^n$ . Dann gibt es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  so, dass für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in R$  gilt:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')| < \epsilon.$$

Beweis. Wenn die Aussage falsch wäre, dann gäbe es also ein  $\epsilon > 0$  so, dass für jedes  $\delta > 0$  zwei Punkte  $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in R$  existieren würden mit

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') < \delta \quad \text{aber} \quad |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')| > \epsilon.$$

Nehmen wir insbesondere  $\delta = 1/k$  mit  $k \in \mathbb{N}$ . Die  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ , die es für dieses  $\delta$  gibt nennen wir  $\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}'^{(k)}$ . Damit haben wir zwei Folgen  $\mathbf{x}^{(k)}$  und  $\mathbf{x}'^{(k)}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Weil  $R$  kompakt ist, besitzt die Folge  $\mathbf{x}^{(k)}$  eine konvergente Teilfolge. Dann nehmen wir gleich o.B.d.A. an, die Folge selbst konvergiere, etwa gegen  $\mathbf{x} \in R$ .

Wegen  $d(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}'^{(k)}) < 1/k$  konvergiert auch die Folge  $\mathbf{x}'^{(k)}$  gegen  $\mathbf{x}$ . Aus der Stetigkeit von  $f$  folgt schließlich

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}^{(k)}) = f(\mathbf{x}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}'^{(k)}),$$

im Widerspruch zu  $|f(\mathbf{x}^{(k)}) - f(\mathbf{x}'^{(k)})| > \epsilon$ . □

Beweis von Satz 7.3. Wir zeigen die  $\epsilon$ - $\delta$ -Stetigkeit von  $F$  in einem festen Punkt  $y \in [a, b]$ . Dazu geben wir uns ein  $\epsilon > 0$  vor.

Über  $\delta$  machen wir uns später Gedanken, wir betrachten jetzt einfach Werte  $y' \in [a, b]$  mit  $|y - y'| < \delta$ . Für festes  $x \in [c, d]$  gehören dazu zwei Punkte  $\mathbf{x} = (x, y)$  und  $\mathbf{x}' = (x, y') \in R$ . Diese haben einen Abstand

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = |y - y'| < \delta.$$

Wenn wir nun  $\delta$  zu  $\epsilon$  wie im vorausgeschickten Lemma wählen, so finden wir

$$|f(x, y) - f(x, y')| < \epsilon.$$

Und das ist so, mit demselben  $\delta$  für alle  $x \in [c, d]$ . Daraus folgt

$$|F(y) - F(y')| = \left| \int_c^d (f(x, y) - f(x, y')) dx \right| \leq \int_c^d |f(x, y) - f(x, y')| dx < \epsilon \cdot (d - c),$$

und aus dieser Abschätzung folgt die Stetigkeit von  $F$  in  $y$ . □

So, jetzt wissen wir, dass wir eine stetige Funktion  $f(x, y)$  auf einem Rechteck erst in  $x$ - und dann in  $y$ -Richtung integrieren können. Natürlich können wir die Rollen der Variablen vertauschen, und erst in  $y$ -Richtung integrieren, und dann in  $x$ -Richtung:

$$\int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dy \right) dx.$$

Und jetzt kommt eine Frage, auf die kann eigentlich nur ein Mathematiker kommen: Wie unterscheiden sich diese beiden Integrale? Das Integral, wo man erst in  $x$ -Richtung integriert, und das Integral, wo man das zuerst in  $y$ -Richtung tut.

Es ist ziemlich klar, dass da dasselbe herauskommen muss, aber als Mathematiker muss man das beweisen.

**Satz 7.4 (Fubini)** Für jede stetige Funktion  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem beschränkten, abgeschlossenen Rechteck  $R \subset \mathbb{R}^2$  gilt

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dy \right) dx.$$

Beweis. Die Behauptung ist klar für die konstante Funktion  $f(x, y) \equiv 1$ :

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d 1 \cdot dx dy &= \int_a^b (d - c) dy = (b - a) \cdot (d - c), \\ \int_c^d \int_a^b 1 \cdot dy dx &= \int_c^d (b - a) dx = (d - c) \cdot (b - a). \end{aligned}$$

Die Behauptung gilt auch, wenn  $f$  nicht auf dem ganzen Rechteck  $= 1$  ist, sondern eine Funktion  $f_S$ , die nur auf einem Teilrechteck  $S \subset R$  den Wert 1 hat, und auf dem Rest  $R \setminus S$  von  $R$  konstant  $= 0$ . Die Rechnung ist genau dieselbe, man muss nur die Teilintegrale weglassen, wo der Integrand  $= 0$  ist.

Das Unschöne an der Funktion  $f_S$  ist, dass sie unstetig ist. Sie ist eine zweidimensionale Version der Treppenfunktionen aus der eindimensionalen Analysis. Durch solche Funktionen wollen wir eine gegebene stetige Funktion  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  jetzt approximieren. Dazu zerlegen wir beide Intervalle  $[a, b]$  und  $[c, d]$  in  $k$  gleichlange Teilintervalle durch Zwischenpunkte

$$a \leq s_\mu := a + \mu \cdot \frac{b - a}{k} \leq b, \quad c \leq t_\nu = c + \nu \cdot \frac{d - c}{k} \leq d, \quad \mu, \nu = 0, \dots, k.$$

Das Teilrechteck

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : s_\mu \leq x \leq s_{\mu+1}, t_\nu \leq y \leq t_{\nu+1}\}$$

nennen wir  $S_{\mu, \nu}$ . Wir approximieren  $f$  durch eine Funktion  $f_k : R \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf dem ganzen Teilrechteck  $S_{\mu, \nu}$  mit der linken unteren Ecke  $(s_\mu, t_\nu)$  den Wert  $f(s_\mu, t_\nu)$  hat. (An den Stellen, wo die Teilrechtecke aneinander stoßen, muss man ein wenig aufpassen, aber darum will ich mich jetzt nicht kümmern.)

Jetzt geben wir uns ein  $\epsilon > 0$  beliebig vor. Wenn  $k$  groß genug ist, dann haben alle Teilrechtecke einen Durchmesser  $< \delta$ , wo  $\delta > 0$  die Zahl aus dem Stetigkeitslemma ist, die zu  $\epsilon$  gehört. Dann folgt aus diesem Stetigkeitslemma, dass für alle  $(x, y) \in S_{\mu, \nu}$  gilt

$$|f_k(x, y) - f(x, y)| < \epsilon.$$

Weil das für alle Teilrechtecke so ist, gilt diese Abschätzung auf dem ganzen Rechteck  $R$ .



Weil die Funktion  $f_k$  auf den Teilrechtecken konstant ist, können wir

$$\int_a^b \int_c^d f_k(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b f_k(x, y) dy dx$$

schließen. Wegen  $|f_k(x, y) - f(x, y)| < \epsilon$  auf ganz  $R$ , ist außerdem

$$\left| \int_a^b \int_c^d f_k(x, y) dx dy - \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \right| < \epsilon \cdot (b - a) \cdot (d - c)$$

und

$$\left| \int_c^d \int_a^b f_k(x, y) dy dx - \int_c^d \int_a^b f(x, y) dy dx \right| < \epsilon \cdot (b - a) \cdot (d - c).$$

Daraus folgt

$$\left| \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy - \int_c^d \int_a^b f(x, y) dy dx \right| < 2\epsilon \cdot (b - a) \cdot (d - c).$$

Aber diese Ungleichung haben wir für beliebiges  $\epsilon > 0$  bewiesen, und deswegen müssen die beiden in Frage stehenden Integrale gleich sein.  $\square$

Weil die beiden Integrale gleich sind, kann man definieren

$$\int_R f(x, y) d(x, y) := \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dy dx.$$

Soweit die Theorie. Die Praxis unterscheidet sich von der bisher betrachteten Situation vor allem dadurch, dass Funktionen nicht immer nur über achsenparallel Rechtecke integriert werden müssen, sondern z. B. über Dreiecke oder Kreise, oder Teile der Ebene, die von Funktionsgraphen begrenzt werden. Da muss man also das Integral auch über solche Bereiche definieren. Das macht man, indem man die zu integrierende Funktion mit dem Wert 0 auf ein Rechteck fortsetzt, das den Integrationsbereich enthält, und dann über dieses Rechteck integriert. Die fortgesetzte Funktion hat dann meist am Rand des Integrationsbereiches Sprungstellen: sie ist nicht mehr stetig. Also muss man unbedingt auch gewisse unstetige Funktionen integrieren. Und damit beginnen langwierige Komplikationen. Diese Theorie wollen wir uns sparen. Stattdessen integrieren wir einfach drauflos, auch wenn es sich nicht um ein achsenparalleles Rechteck handelt.

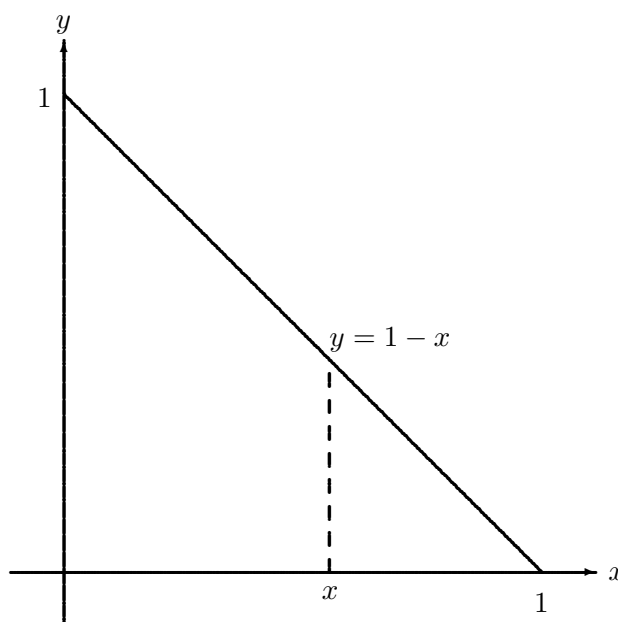
Die wirklichen Probleme, die sich dann stellen, liegen in der Berücksichtigung der Grenzen.

**Beispiel 7.4**  $D \subset \mathbb{R}^2$  sei das Dreieck mit den Ecken  $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ . Und über dieses Dreieck möchten wir etwa die Funktion  $x \cdot y$  integrieren. Das geht so:

$$\int_D x \cdot y dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} x \cdot y dy \right) dx.$$

Wir integrieren also für jedes feste  $x \in [0, 1]$  zuerst in  $y$ -Richtung. Aber am Rand des Dreiecks  $D$  müssen wir mit dem Integrieren aufhören! Dieser Rand des Dreiecks liegt auf der Geraden  $y = 1 - x$ , bei unserem festen  $x$  müssen wir als obere Grenze also  $1 - x$  nehmen. So, und jetzt können wir integrieren

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^{1-x} xy \, dy dx \\
&= \int_0^1 x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-x} dx \\
&= \int_0^1 x \cdot \frac{(1-x)^2}{2} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 x \cdot (1-2x+x^2) dx \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \\
&= \frac{1}{24}
\end{aligned}$$



Wenn man Doppel-Integrale verstanden hat, kann man sich auch an Dreifach-Integrale wagen. Alles geht analog. Es ist halt nicht nur doppelt so schwierig, sondern dreimal. Statt langer Theorie ein Beispiel.

**Beispiel 7.5** Wir wollen das sehr gefährlich aussehende Dreifach-Integral

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{(1+y^2)(2+z)^2} d(x, y, z)$$

berechnen. Weil es auf die Reihenfolge der Integration nicht ankommt, integrieren wir zuerst über  $x$ .

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{(1+y^2)(2+z)^2} dx = \frac{1}{(1+y^2)(2+z)^2} \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{1}{(1+y^2)(2+z)^2} \frac{2}{3} \sqrt{x}^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(1+y^2)(2+z)^2}.$$

Damit sind wir nicht nur einen Schritt weiter, sondern haben auch etwas gelernt: Wenn der Integrand ein Produkt von Funktionen ist, die nur von  $x$ , bzw.  $y$ , bzw.  $z$  abhängen, können wir die einzeln integrieren, und dann das Produkt der Integrale nehmen. Damit wird

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dy dz}{(1+y^2)(2+z)^2} = \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} \cdot \int_0^1 \frac{dz}{(2+z)^2} = \arctg(1) \cdot \left( -\frac{1}{2+z} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{6}.$$

Und das Ergebnis ist

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{(1+y^2)(2+z)^2} d(x, y, z) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{\pi}{36}.$$

**Aufgabe 7.7** Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, und sei

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ und } x^2 \leq y \leq 1\}.$$

wie lauten die Integrationsgrenzen in der Gleichung

$$\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_{?} \left[ \int_{?} f(x, y) dx \right] dy \quad ?$$

**Aufgabe 7.8** Sei  $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^2 \leq y \leq 4\}$ . Berechnen Sie

$$\int_M y^{3/2} e^{xy} d(x, y).$$

**Aufgabe 7.9** Berechnen Sie für jedes  $n \in \mathbb{N}$

$$\int_B (1 + x^n y) d(x, y),$$

wobei  $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1 - x, x^2 + y^2 \leq 1\}$  sei.

**Aufgabe 7.10** Berechnen Sie

$$\int_R (x^2 - xy) d(x, y) \quad \text{wobei}$$

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq 2y\} \cap ([0, 1] \times [0, 4]).$$

**Aufgabe 7.11** Seien  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig partiell differenzierbare Funktionen, und sei  $Q$  ein kompaktes, achsenparalleles Rechteck. Beweisen sie: Stimmen  $f$  und  $g$  in den Ecken von  $Q$  überein, so ist

$$\int_Q \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) d(x, y) = \int_Q \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) d(x, y).$$

**Aufgabe 7.12** Gegeben sei

$$K_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1\}.$$

Man berechne  $\int_{K_1} x(y - 1) d(x, y)$ .

**Aufgabe 7.13** Für  $\lambda \in \mathbb{R}$  sei  $f_\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f_\lambda(x, y) := y^2 - 2\lambda x^2 y + x^4$$

definiert. Es sei  $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Man berechne

$$\int_K f_\lambda(x, y) d(x, y).$$

**Aufgabe 7.14** Gegeben sei die Menge

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 \geq 0 \text{ und } x - y^2 \geq 0\}.$$

Berechnen Sie

$$\int_B \sqrt{xy} d(x, y).$$

**Aufgabe 7.15** Es sei  $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ . Man berechne:

$$\int_K x y^2 z^3 d(x, y, z).$$

**Aufgabe 7.16** Zeigen Sie

$$\int_0^2 \int_0^{x^2} x \cdot e^y dy dx = \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 x \cdot e^y dx dy.$$

**Aufgabe 7.17** Berechnen Sie

$$\int_K \int x d(x, y),$$

wobei  $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2, x^2 - y^2 \leq 1\}$ .

Hinweis: Man zerlege  $K$  in zwei geeignete Integrationsbereiche.

**Aufgabe 7.18** Sei  $D \subset \mathbb{R}^2$  das Dreieck mit den Ecken  $(0, 0)$ ,  $(5, 1)$  und  $(3, 3)$ . Berechnen Sie das Integral  $\int_D x d(x, y)$ .

**Aufgabe 7.19** Es sei  $B \subset \mathbb{R}^2$  der Bereich im ersten Quadranten des  $\mathbb{R}^2$ , der zwischen der Geraden mit der Gleichung  $y = x$  und der Parabel mit der Gleichung  $y = x^2$  liegt.

a) Schreiben Sie  $\int_B xy d(x, y)$  als Doppelintegral.

b) Wie lauten die Grenzen bei Vertauschung der Integrationsreihenfolge?

c) Berechnen Sie das Integral.

**Aufgabe 7.20** Es sei  $a > 0$  und

$$P(a) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq a, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

Berechnen Sie

$$\int_{P(a)} (x + y + z) d(x, y, z).$$

### 7.3 Volumenberechnung

Die Verallgemeinerung des Begriffs „Länge“ auf höhere Dimensionen heißt „Volumen“. In der eindimensionalen Analysis haben wir uns nicht um den Begriff „Länge“ gekümmert. Das lag daran, dass die Länge eines Intervalls  $[a, b]$  ganz einfach die Zahl  $b - a$  ist. Mehr gibt es dazu nicht zu sagen. In 7.1 haben wir „krumme Intervalle“ (=Kurven) betrachtet, und deren Länge definiert.

Die zweidimensionale Version des Volumens heißt *Fläche*. Die Fläche eines achsen-parallelen Rechtecks

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

ist

$$|R| := (b - a) \cdot (d - c).$$

Das ist klar. Aber was ist die Fläche  $|M|$  einer Menge  $M \subset \mathbb{R}^2$ , die nicht zufällig ein achsenparalleles Rechteck ist?

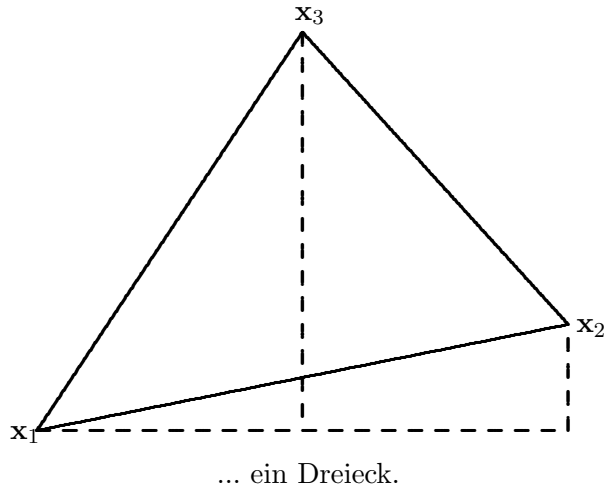
**Definition 7.3** Sei  $M \subset \mathbb{R}^2$  eine Teilmenge. Die Fläche dieser Teilmenge definiert man als das Integral der Funktion  $\equiv 1$  über diese Menge:

$$|M| := \int_M 1 d(x, y) = \int_M dx dy.$$

Beim achsen-parallelen Rechteck  $R$  stimmt diese Definition mit der Zahl  $(b - a) \cdot (d - c)$  überein.

Diese Definition der Fläche hat ihre Tücken. Denn es ist nicht ganz klar, ob das Integral in der Definition immer existiert. Für uns macht diese Frage wenig Sinn, weil ich das zwei-dimensionale Integral über andere Bereiche, als achsenparallele Rechtecke ja gar nicht definiert habe. (In der Tat können Mathematiker mit viel Phantasie und ein wenig Mühe Mengen  $M \subset \mathbb{R}^2$  angeben, deren Rand so ausgefranst, fuzzy ist, dass man kein vernünftiges Integral über eine solche Menge definieren kann. Im Staatsexamen kommen derartige Mengen nicht vor. Deswegen befassen wir uns mit diesem Problem nicht weiter.) Viel wichtiger für uns sind Rechen-Techniken, mit denen man Flächen in der Praxis ausrechnet.

Die elementarste Menge  $M \subset \mathbb{R}^2$ , die kein achsen-paralleles Rechteck ist, und deren Fläche man kennen muss, ist ...



Nehmen wir an, das Dreieck  $D$  liege so, wie in dem Bild, dass also seine Ecken

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

die Bedingungen

$$x_1 < x_3 < x_2, \quad y_1 < y_2 < y_3$$

erfüllen. (In andern Fällen geht die Rechnungen genauso.) Um im Doppel-Integral die Grenzen richtig einsetzen zu können, brauchen wir die Gleichungen der Dreiecks-Seiten, am besten in der nach  $y$  aufgelösten Form:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 : \quad y = g_{12}(x) &:= y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1), \\ &= \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1} + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x, \\ \mathbf{x}_1\mathbf{x}_3 : \quad y = g_{13}(x) &= \frac{y_1x_3 - y_3x_1}{x_3 - x_1} + \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \cdot x, \\ \mathbf{x}_2\mathbf{x}_3 : \quad y = g_{23}(x) &= \frac{y_2x_3 - y_3x_2}{x_3 - x_2} + \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \cdot x. \end{aligned}$$

Dann ist die Dreiecksfläche

$$\begin{aligned} |D| &= \int_{x_1}^{x_3} \int_{g_{12}(x)}^{g_{13}(x)} dy dx + \int_{x_3}^{x_2} \int_{g_{12}(x)}^{g_{23}(x)} dy dx \\ &= \int_{x_1}^{x_3} (g_{13}(x) - g_{12}(x)) dx + \int_{x_3}^{x_2} (g_{23}(x) - g_{12}(x)) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_3} g_{13}(x) dx + \int_{x_3}^{x_2} g_{23}(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} g_{12}(x) dx \end{aligned}$$

mit

$$\int_{x_1}^{x_3} g_{13}(x) dx = \frac{y_1x_3 - y_3x_1}{x_3 - x_1} (x_3 - x_1) + \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_3}$$

$$\begin{aligned}
&= y_1x_3 - y_3x_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \cdot (x_3^2 - x_1^2) \\
&= y_1x_3 - y_3x_1 + \frac{1}{2} \cdot (y_3 - y_1)(x_3 + x_1) \\
&= \frac{1}{2}(y_1x_3 - y_3x_1) + \frac{1}{2}(y_3x_3 - y_1x_1) \\
\int_{x_1}^{x_2} g_{12}(x) &= \frac{1}{2}(y_1x_2 - y_2x_1) + \frac{1}{2}(y_2x_2 - y_1x_1) \\
\int_{x_3}^{x_2} g_{23}(x) &= \frac{1}{2}(y_3x_2 - y_2x_3) + \frac{1}{2}(y_2x_2 - y_3x_3).
\end{aligned}$$

Bei Berechnung von  $|D|$  kürzen sich die Anteile in den rechten Klammern weg, und wir finden

$$|D| = \frac{1}{2}[(x_2y_3 - x_3y_2) - (x_1y_3 - x_3y_1) + (x_1y_2 - x_2y_1)].$$

Das sieht furchtbar (=strukturlos) aus, aber das Resultat kann man auch in Determinantenform als

$$|D| = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}$$

schreiben. Nennen wir die Vektoren, welche das Dreieck aufspannen

$$\mathbf{u} := \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{v} := \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1,$$

so haben wir für die Dreiecksfläche die Determinantenformel

$$|D| = \frac{1}{2} \det(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

erhalten.

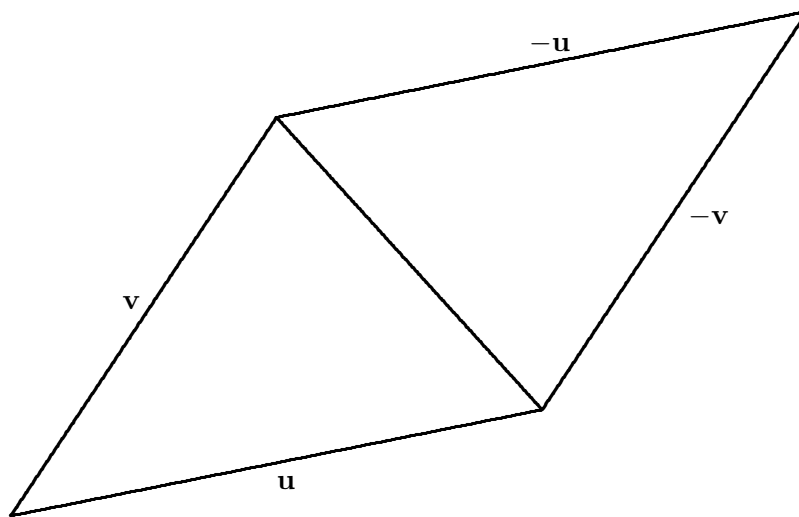
Nennen wir, wie üblich

$$\|\mathbf{u}\| = c, \quad \|\mathbf{v}\| = b$$

und bezeichnen den Winkel zwischen  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  mit  $\alpha$ , so wird daraus die aus der Schule bekannte Formel

$$|D| = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha).$$

Aus zwei Dreiecken kann man ein Parallelogramm zusammensetzen:



Wegen

$$\det(-\mathbf{u}, -\mathbf{v}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

hat das zweite Dreieck, dieselbe Fläche, wie das erste. Für die Fläche des von zwei Vektoren  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  aufgespannten Parallelogramms finden wir also

$$|P| = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Eine andere wichtige Klasse von Flächen bilden diejenigen Flächen, welche von Funktionsgraphen begrenzt werden: Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Die Fläche zwischen deren Graphen und der  $x$ -Achse, zwischen  $x = a$  und  $x = b$ , ist nach unserer Definition

$$|F| = \int_a^b \int_0^{f(x)} dy dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Das ist genau die Interpretation des Integrals  $\int f(x) dx$  als „die Fläche unter dem Funktionsgraphen“ aus der eindimensionalen Analysis. (Natürlich mit der üblichen Konvention: wo  $f(x) < 0$  ist, dort zählt die Fläche negativ.)

Der wichtigste Spezialfall ist hier natürlich der Einheitskreis. Seine Fläche haben wir in 4.4 als

$$|K_1| = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \pi$$

ausgerechnet. Und die Fläche des Kreises vom Radius  $r$  ist (Substitution  $u := x/r$ )

$$|K_r| = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2 \int_{-1}^1 r \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} \cdot r d\left(\frac{x}{r}\right) = 2r^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - u^2} du = r^2 \cdot \pi.$$

**Beispiel 7.6** Mit der Substitutionsformel kann man auch die Fläche einer achsenparallelen Ellipse

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$



ausrechnen:

$$\begin{aligned}|E| &= \int_{-a}^a b \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2} dx \\ &= b \cdot \int_{-1}^1 \sqrt{1 - u^2} \cdot a \cdot du \\ &= a \cdot b \cdot \pi.\end{aligned}$$

Warnung: Die Fläche der Ellipse kann man ganz einfach berechnen. Bei ihrer Bogenlänge ist das völlig anders! Nach langen Bemühungen hat man um 1800 herum gemerkt, dass das Integral für die Bogenlänge der Ellipse, das sogenannte elliptische Integral, mit elementaren Funktionen nicht zu knacken ist. Man kam dadurch auf eine neue Gattung von Funktionen, die sogenannten *elliptischen Funktionen*. Dies war die Geburtsstunde der in der Mathematik zentralen *Funktionentheorie*.

**Satz 7.5 (Flächenstreckung)** *Es sei  $M \subset \mathbb{R}^2$  eine Menge und  $M_r$  ihr Bild unter der Streckung*

$$S_r : \mathbf{x} \rightarrow r \cdot \mathbf{x}.$$

*Dann gilt für die Fläche*

$$|M_r| = r^2 |M|.$$

Diese Formel ist ziemlich klar, vor allem wenn man an Beispiele denkt, wie den Kreis vom Radius  $r$ , gestreckte Rechtecke oder Parallelelogramme.

Der Beweis von Satz 7.5 ist eine einfache Anwendung der Substitutionsformel in  $x$ - und in  $y$ -Richtung. Im Doppelintegral

$$|M_r| = \int_{M_r} \left( \int dx \right) dy$$

liefern die  $x$ -Integrationen die entsprechenden Integrale über  $M$ , jeweils mit  $r$  multipliziert, und bei der anschließenden Integration in  $y$ -Richtung wird nochmal mit  $r$  multipliziert.  $\square$

So, das war das wichtigste zur Flächenberechnung. Wenden wir uns jetzt dem dreidimensionalen Fall zu, der Berechnung echter Volumina. Analog zum zweidimensionalen Fall definiert man das Volumen einer Menge  $M \subset \mathbb{R}^3$  als

$$\int_M dx dy dz.$$

Wieder will ich nichts darüber sagen, für welche Mengen dieses Integral definiert ist, sondern nur konkrete Beispiele ausrechnen.

**Beispiel 7.7** *Der einfachste Fall ist natürlich ein achsenparalleler Quader*

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2, a_3 \leq z \leq b_3\}.$$

*Sein Volumen ist*

$$\begin{aligned}|Q| &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} dz dy dx \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} (b_3 - a_3) dy dx \\ &= \int_{a_1}^{b_1} (b_2 - a_2)(b_3 - a_3) dx \\ &= (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3),\end{aligned}$$

wie sich das auch gehört.

Ein nicht achsenparalleles, nicht rechteckiges Rechteck in der Ebene heißt Parallelogramm. Die dreidimensionale Version davon heißt *Parallelotop* oder *Spat*. So eine Menge wird von drei Vektoren  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$  aufgespannt. Man kann einen solchen Spat beschreiben als

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = u \cdot \mathbf{u} + v \cdot \mathbf{v} + w \cdot \mathbf{w}, 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, 0 \leq w \leq 1\}.$$

Analog zur Determinantenformel für die Fläche eines Parallelogramms gilt für das Volumen dieses Spats

$$|S| = |\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})|.$$

Hier habe ich die  $3 \times 3$ -Determinante in Absolut-Striche gesetzt, weil ihr Vorzeichen ja von der Orientierung der drei Vektoren  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  abhängt. Entweder, man passt auf, dass sie immer die „rechte-Hand-Eigenschaft“ haben, oder man kann nicht vermeiden, dass die Determinante auch mal negativ ist. Dann muss man halt ihren Absolutbetrag nehmen.

Diese Determinantenformel für das Volumen des Spats möchte ich hier nicht beweisen. Man kann es sicher ganz analog zur Determinantenformel für die Fläche des Parallelogramms tun. Nur dürfte es ganz wesentlich unübersichtlicher sein. (Ich habe das dabei entstehende Integral noch nie durch elementare Integration ausgerechnet. Es gibt aber Tricks, die hier zum Ziel führen, und die man manchmal in der Linearen Algebra kennenlernt.)

Ein wichtiges Verfahren, Volumina zu berechnen ist das sogenannte *Cavalierische Prinzip*. Dabei denkt man sich den Körper  $M$  für jeden festen  $z$ -Wert  $h \in \mathbb{R}$  horizontal durchschnitten. Dabei entsteht eine Fläche, die wir mit  $M(h)$  bezeichnen wollen. Mit dieser Notation gilt

**Satz 7.6 (Cavalierisches Prinzip)**  $|M| = \int_{\mathbb{R}} |M(h)| dh.$

*In Worten: Das Volumen ist das Integral über die horizontalen Schnittflächen.*

In der Formel habe ich zwar das Integral über ganz  $\mathbb{R}$  hingeschrieben. Aber wir betrachten in der Regel nur beschränkte, abgeschlossene Mengen  $M$ . Da gibt es dann einen minimalen  $z$ -Wert  $h_1$ , unterhalb dessen die Schnittflächen  $M(h)$  leer sind, und analog einen maximalen  $z$ -Wert  $h_2$ . Man braucht dann natürlich in  $z$ -Richtung nur von  $h_1$  bis  $h_2$  zu integrieren.

Der Beweis des Satzes besteht einfach in einer Interpretation des Integrals

$$|M| = \int_M d(x, y, z) = \int_{h_1}^{h_2} \left( \int_{M(z)} d(x, y) \right) dz.$$

Das  $x, y$ -Integral über  $M(z)$  ist ja gerade die Fläche dieses ebenen Schnittes. □

**Satz 7.7 (Corollar)** *Sind  $K$  und  $L \subset \mathbb{R}^3$  zwei Körper, so, dass sie für alle Höhen  $h \in \mathbb{R}$  dieselben Schnittflächen*

$$|K(h)| = |L(h)|$$

*besitzen. Dann haben beide Körper dasselbe Volumen.*

**Beispiel 7.8** Eine klassische Anwendung dieser Version des Cavalierischen Prinzips stammt von Archimedes. Dabei ist  $K$  eine Halbkugel (der Einfachheit wegen vom Radius 1) und  $L$  der Restkörper, der entsteht, wenn man aus einem Zylinder vom Radius 1 und der Höhe 1 einen Kreiskegel ausbohrt:



Beide Körper haben für alle  $h$  mit  $0 \leq h \leq 1$  ebene Schnitte gleicher Fläche: Bei der Halbkugel ist diese Schnittfläche ein Kreis vom Radius

$$\rho = \sqrt{1 - h^2},$$

und dessen Fläche ist

$$|K(h)| = (1 - h^2) \cdot \pi.$$

Beim Restkörper  $L$  ist die Schnittfläche ein Kreisring vom äußeren Radius 1 und vom inneren Radius  $h$ . Dessen Fläche ist

$$|L(h)| = \pi - h^2 \cdot \pi.$$

In der Tat, nach dem Korollar zum Cavalierischen Prinzip haben die beiden Körper  $K$  und  $L$  dasselbe Volumen. So kann man die Berechnung des (Halb-) Kugel-Volumens auf die Berechnung des Volumens eines Kreis-Kegels zurückführen. Damit haben wir das Halbkugel-Volumen aber noch nicht ausgerechnet. Dazu verwenden wir das Cavalierische Prinzip in der Version von Satz 7.6:

$$|K| = \int_0^1 |K(h)| dh = \pi \cdot \int_0^1 (1 - h^2) dh = \pi \cdot \left(h - \frac{h^3}{3}\right)_0^1 = \pi \cdot \frac{2}{3}.$$

Das ist das Volumen der halben Einheitskugel. Das Volumen der ganzen Einheitskugel ist somit

$$\frac{4}{3}\pi.$$

Der Kreiskegel ist ein Spezialfall einer dreidimensionalen Figur, die häufig vorkommt:

**Definition 7.4** Es sei eine Fläche  $F$  in der  $x, y$ -Ebene gegeben und ein Punkt  $\mathbf{p}$  außerhalb dieser Ebene. Die Pyramide über  $F$  mit Spitze  $\mathbf{p}$  ist die Menge

$$\{\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{q} : 0 \leq \lambda \leq 1, \mathbf{q} \in F\},$$

welche überstrichen wird von den Verbindungsstrecken aller Punkte  $\mathbf{q} \in F$  mit der Spitze  $\mathbf{p}$ .

Sei  $P$  eine solche Pyramide, und sei  $p_3 > 0$  die  $z$ -Komponente ihrer Spitze  $\mathbf{p}$ . Jeder ebene Schnitt  $P(h)$ ,  $0 \leq h \leq p_3$ , ist ähnlich zur Grundfläche  $F$ . Und zwar entsteht  $P(h)$  aus  $F$  durch Streckung mit dem Faktor

$$c = \frac{p_3 - h}{p_3} = 1 - \frac{h}{p_3}.$$

Die Größe der Schnittfläche ist deswegen

$$|P(h)| = \left(1 - \frac{h}{p_3}\right)^2 \cdot |F|.$$

Und das Volumen der ganzen Pyramide ist nach dem Cavalierischen Prinzip

$$\begin{aligned} |P| &= |F| \cdot \int_0^{p_3} \left(1 - \frac{h}{p_3}\right)^2 dh \\ &= |F| \cdot \int_0^{p_3} \left(1 - \frac{2h}{p_3} + \frac{h^2}{p_3^2}\right) dh \\ &= |F| \cdot \left(h - \frac{h^2}{p_3} + \frac{h^3}{3p_3^2}\right) \Big|_0^{p_3} \\ &= |F| \cdot \left(p_3 - p_3 + \frac{p_3^3}{3}\right) \\ &= \frac{|F| \cdot p_3^3}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Pyramidenvolumen} = \frac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche} \times \text{Höhe}$$

**Aufgabe 7.21** Berechnen sie das Volumen des Körpers, der begrenzt wird durch die Flächen

$$F_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 4\} \text{ und } F_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}.$$

**Aufgabe 7.22 a)** Berechnen Sie

$$\int_0^\infty e^{-2x} dx$$

b) Berechnen Sie das uneigentliche Integral  $\int_K dx dy dz$ , wobei

$$K := \{(x, y, z) \mid y^2 + z^2 \leq e^{-2x}, 0 \leq x\}$$

ist.

**Aufgabe 7.23** Man berechne das Volumen der Menge

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq y^2 \leq z^3 \leq 1\}.$$

**Aufgabe 7.24** Die Menge  $T$  entstehe durch Rotation des Flächenstücks

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, |x - 1| + |z| \leq 1\}$$

um die  $z$ -Achse. Man berechne das Volumen von  $T$ .

**Aufgabe 7.25** Berechnen Sie das Volumen der Durchschnittsmenge der folgenden beiden Zylinder  $Z_1$  und  $Z_2$ :

$$\begin{aligned} Z_1 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\} \\ Z_2 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq R^2\}; R > 0. \end{aligned}$$

**Aufgabe 7.26** Man berechne mittels eines Integrals das Volumen der Menge

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}.$$

**Aufgabe 7.27** Berechnen Sie die Volumina der folgenden Teilmengen des  $\mathbb{R}^3$ :

- a)  $A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2 - z\}$ ,
- b)  $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 5 \geq x^2 + y^2 \geq 1 + z^2\}$ ,
- c)  $C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq x^2 + y^2 \leq 4z \leq 4\}$ ,
- d)  $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ .

## 7.4 Der Transformations-Satz

Der Transformations-Satz ist das mehrdimensionale Analogon der Substitutions-Formel aus der eindimensionalen Analysis. Erinnern wir uns zunächst an diese Formel:

$$\int_{x(a)}^{x(b)} f(x) dx = \int_a^b f(x(u)) \frac{dx}{du} du.$$

Dabei ist die Abbildung

$$u \mapsto x(u), \quad [a, b] \rightarrow [x(a), x(b)]$$

die Substitutionsabbildung. Sie muss bijektiv und stetig differenzierbar sein. Natürlich kann man für diese Abbildung eine eigene Bezeichnung einführen, etwa  $x = \varphi(u)$ . Dann wird die Substitutionsformel

$$\int_a^b f(\varphi(u)) \varphi'(u) du = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$$

Schreibt man die Formel so, dann ist die Formulierung etwas korrekter, dafür ist sie etwas schwerer zu merken.

So, jetzt der mehrdimensionale Fall. Wir wollen also das Volumenintegral

$$\int_B f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n)$$

transformieren. (Praktisch interessiert uns hier nur der Fall  $n = 2$  oder  $n = 3$ .) Hier ist also der Integrationsbereich  $B \subset \mathbb{R}^n$  eine kompakte Menge. Das Integral wollen wir durch eine bijektive Abbildung

$$\Phi : A \rightarrow B, \quad A \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt}$$

in ein Integral über den neuen Integrationsbereich  $A$  transformieren.

**Satz 7.8 (Transformations-Satz)** *Es seien  $A, B \in \mathbb{R}^n$  kompakt,  $\Phi : A \rightarrow B$  bijektiv und stetig differenzierbar (auf einer offenen Menge, die  $A$  enthält). Die Funktion  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig. Dann ist*

$$\int_B f(\mathbf{x}) d(x_1, \dots, x_n) = \int_A f(\Phi(\mathbf{u})) |\det(\Phi'(\mathbf{u}))| d(u_1, \dots, u_n).$$

Das ist wieder einer der Sätze, die ich hier nicht beweisen kann. Einen Beweis findet man in Forster III. Aber dieses Buch hat ein etwas anderes Gewicht, als die beiden ersten Bände, es liest sich lange nicht so flüssig. Statt des Beweises hier also erst einige Bemerkungen.

Die Formel für den Transformations-Satz hat genau dieselbe Bauweise, wie die Substitutionsformel. Der wesentliche Unterschied ist: Wo in der Substitutionsformel die Ableitung  $\varphi'$  steht, steht hier der Absolutbetrag der Funktionaldeterminante

$$|\det(\Phi'(\mathbf{u}))| = \left| \det \left( \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial u_\mu} \right) \right|.$$

Die Bezeichnung der Abbildung  $\Phi$  kann man unterdrücken, sie etwas salopp  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u})$  schreiben. Dann nimmt die Formel die Gestalt

$$\int_B f(\mathbf{x}) d(x_1, \dots, x_n) = \int_A f(\mathbf{x}(\mathbf{u})) \left| \det \left( \frac{\partial x_\nu}{\partial u_\mu} \right) \right| d(u_1, \dots, u_n)$$

an.

Etwas scheint aber doch wesentlich anders als in einer Dimension zu sein: Die Absolut-Striche sind neu. Die stehen natürlich da, damit das Integral bei einer Transformation mit negativer Determinante nicht sein Vorzeichen ändert. Nun gilt die eindimensionale Substitutionsformel auch, wenn  $\varphi' < 0$  ist. Warum brauchen wir da keine Absolutstriche? Antwort: Weil wir nicht die Integrations-Intervalle hinschreiben, sondern die Grenzen unten und oben an das Integral. Und wenn  $\varphi' < 0$  ist, dann fällt  $\varphi$  monoton, wir haben  $\varphi(a) > \varphi(b)$ , die obere Integrations-Grenze ist kleiner als die untere, das Integral hat automatisch ein negatives Vorzeichen.

Schließlich, was hat die Funktional-Determinante mit Integration zu tun, warum kommt hier eine Determinante vor? Die Antwort auf diese Frage ist die eigentliche Idee für den Beweis: Man stellt sich vor, den Integrationsbereich  $A$  durch kleine achsenparallele Würfelchen  $Q$  auszuschöpfen. Die Kantenvektoren dieser Würfelchen seien  $\epsilon \cdot \mathbf{e}_1, \dots, \epsilon \cdot \mathbf{e}_n$ , wo  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$  die Standard-Basis ist. Die differenzierbare Abbildung  $\Phi$  verzerrt so ein Würfelchen  $Q$ , und zwar näherungsweise in ein Parallelotop, das von den Vektoren

$$\epsilon \cdot \Phi'(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_1, \dots, \epsilon \cdot \Phi'(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_n$$

aufgespannt wird. Diese Vektoren sind, bis auf den Faktor  $\epsilon$ , die Spaltenvektoren der Funktionalmatrix  $\Phi'(\mathbf{u})$ . Das Volumen des Parallelotöpchens ist

$$|P| = \epsilon^n \cdot |\det(\Phi'(\mathbf{u}))| = |Q| \cdot |\det(\Phi'(\mathbf{u}))|.$$

Und das Integral  $\int_B f(\mathbf{x}) d(x_1, \dots, x_n)$  approximiert man durch eine Näherungssumme

$$\sum f(\mathbf{x}_k) |P_k| = \sum f(\mathbf{x}(\mathbf{u}_k)) |Q_k| \cdot |\det(\Phi'(\mathbf{u}_k))|.$$

Und diese Näherungs-Summe approximiert eben nicht das Integral  $\int_A f(\mathbf{x}(\mathbf{u})) d(u_1, \dots, u_n)$  über die Funktion  $f(\mathbf{x}(\mathbf{u}))$ , sondern das Integral über die Funktion

$$f(\mathbf{x}(\mathbf{u})) \cdot |\det(\Phi'(\mathbf{u}))|.$$

So, jetzt wollen wir Beispiele behandeln:

**Beispiel 7.9** *Der erste wichtige Spezialfall des Transformations-Satzes ist der, wo die Transformation  $\Phi$  nicht nur differenzierbar (= linear approximierbar) ist, sondern selbst linear. Ist*

$$\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \mapsto M \cdot \mathbf{u}$$

*linear, so ist ihre Ableitung  $\Phi'$  diese lineare Abbildung selbst, und die Funktionalmatrix ist  $M$ . Der Transformations-Satz sieht dann so aus:*

$$\int_{\Phi(A)} f(\mathbf{x})d(x_1, \dots, x_n) = |\det(M)| \cdot \int_A f(\mathbf{x}(\mathbf{u}))d(u_1, \dots, u_n).$$

*Ist hier insbesondere  $f \equiv 1$ , die Eins-Funktion, so sind die Integrale die Volumina der Integrations-Bereiche, und wir erhalten eine Formel für die Transformation von Volumina unter linearen Abbildungen:*

**Satz 7.9 (Volumen und lineare Abbildungen)** *Ist  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u} \mapsto M \cdot \mathbf{u}$  eine invertierbare lineare Abbildung so gilt für das Volumen einer Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$*

$$|\Phi(A)| = |\det(M)| \cdot |A|.$$

**Beispiel 7.10** *Ein Spezialfall hiervon ist die von uns in 7.3 berechnete Fläche  $a \cdot b \cdot \pi$  der Ellipse*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$$

*mit den Halbachsen  $a$  und  $b$ . Diese Ellipse ist das Bild der Einheitskreis-Scheibe unter der linearen Abbildung*

$$\Phi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \cdot x \\ b \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

*mit der Determinante  $a \cdot b$ . Deswegen ist die Ellipsenfläche  $a \cdot b$  mal die Fläche des Einheits-Kreises.*

**Beispiel 7.11** *Ein anderer wichtiger Spezialfall ist die Transformation eines Integrals in Polarkoordinaten  $r, \varphi$ . Man benutzt sie immer bei rotations-symmetrischen Problemen. Die Transformation haben wir schon oft besprochen. Ihre Funktionaldeterminante ist  $r$ . Ist etwa  $B$  ein Kreissektor, in Polar-Koordinaten gegeben durch*

$$r_1 \leq r \leq r_2, \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2,$$

*und  $f$  stetig auf  $B$ , so ist*

$$\int_B f(x, y)d(x, y) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} r \cdot f(r, \varphi) dr d\varphi.$$

Damit kann man sehr einfach Integrale über Funktionen ausrechnen, die nur vom Radius abhängen.

**Beispiel 7.12** Ist etwa

$$g(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(r)$$

eine solche Funktion, so ist ihr Integral über die Kreisscheibe

$$K_R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

vom Radius  $R$

$$\int_{K_R} g(x, y) d(x, y) = \int_0^R \int_0^{2\pi} r \cdot f(r) d\varphi dr = 2\pi \cdot \int_0^R r f(r) dr.$$

Nimmt man hier insbesondere die konstante Funktion  $g \equiv 1$ , so bekommt man die Fläche von  $K_R$  durch Integration in Polar-Koordinaten

$$|K_R| = 2\pi \cdot \int_0^R r dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^R = R^2 \cdot \pi.$$

Diese Methode ist bei weitem einfacher, als jede Berechnung der Kreisfläche in euklidischen Koordinaten.

**Beispiel 7.13** Jetzt noch ein berühmtes Beispiel. Die Funktion

$$g(x, y) = e^{-x^2 - y^2} = e^{-r^2}$$

hängt nur von  $r$  ab. Ihr Integral über  $K_R$  ist

$$\int_{K_R} e^{-x^2 - y^2} d(x, y) = 2\pi \int_0^R r e^{-r^2} dr = \pi \int_0^{\sqrt{R}} e^{-u} du = -\pi \cdot e^{-u} \Big|_0^{\sqrt{R}} = \pi \cdot (1 - e^{-\sqrt{R}}).$$

Hieran ist noch nichts so bemerkenswert. Aber man kann zum uneigentlichen Integral

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2 - y^2} d(x, y) = \lim_{R \rightarrow \infty} \pi \cdot (1 - e^{-\sqrt{R}}) = \pi$$

übergehen. Mit dem Satz von Fubini (und etwas weiterer Theorie uneigentlicher Flächen-Integrale) kann man dieses uneigentliche Integral auch als

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - y^2} dx dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) e^{-y^2} dy \\ &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) \\ &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 \end{aligned}$$

schreiben. Daraus folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Das Bemerkenswerte ist, dass man das eindimensionale Integral  $\int e^{-x^2}$  nicht elementar berechnen kann. Die Funktion  $e^{-x^2}$  beschreibt die in der Statistik wichtige Gaußsche Glockenkurve (Normalverteilung). Sie heißt auch  $\operatorname{erf}(x)$ , 'error function'.



Zum Abschluss wollen wir uns jetzt noch der Transformation in Kugelkoordinaten zuwenden:

$$x = r \cos(\varphi) \cos(\theta), \quad y = r \sin(\varphi) \cos(\theta), \quad z = r \sin(\theta).$$

Ihre Funktionalmatrix

$$\left( \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} \right) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\theta) & -r \sin(\varphi) \cos(\theta) & -r \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \cos(\theta) & r \cos(\varphi) \cos(\theta) & -r \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & 0 & r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

hat die Determinante

$$r^2 \cos(\theta) \cdot \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\theta) & -\sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \cos(\theta) & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

wo die Determinante dieser letzten  $3 \times 3$ -Matrix sich mit nach der Regel von Sarrus zu

$$\begin{aligned} \cos^2(\varphi) \cos^2(\theta) + \sin^2(\varphi) \sin^2(\theta) + \cos^2(\varphi) \sin^2(\theta) + \sin^2(\varphi) \cos^2(\theta) &= \\ \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) &= 1 \end{aligned}$$

Die Funktional-Determinante bei der Transformation in Kugelkoordinaten ist also

$$r^2 \cos(\theta).$$

**Beispiel 7.14** *Machen wir mal die Probe, und berechnen das Volumen der Kugel  $K_R \subset \mathbb{R}^3$  vom Radius  $R$  in Kugelkoordinaten:*

$$\begin{aligned} |K_R| &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \cos(\theta) \, dr \, d\varphi \, d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{R^3}{3} \cos(\theta) \, d\varphi \, d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{R^3}{3} \cdot 2\pi \cdot \cos(\theta) \, d\theta \\ &= \frac{2}{3} R^3 \pi \cdot \sin(\theta) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{4}{3} R^3 \pi. \end{aligned}$$

*Das ist wohl das Ergebnis, das rauskommen soll.*

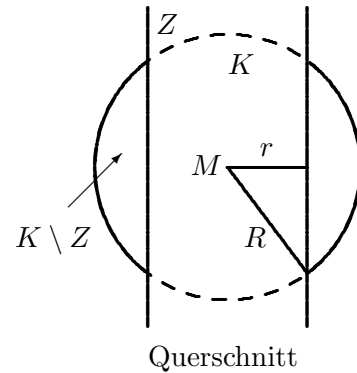
**Aufgabe 7.28** *Berechnen Sie für*

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1\}$$

*das Integral*

$$\int_B x e^{z \sqrt{x^2 + y^2}} \, d(x, y, z).$$

**Aufgabe 7.29** Aus einer Kugel vom Radius  $R = 5$  bohre man einen geraden Kreiszyylinder  $Z$  vom Radius  $r = 4$  aus, dessen Achse durch den Mittelpunkt  $M$  der Kugel geht. Berechnen sie das Volumen des Restkörpers  $K \setminus Z$ .



**Aufgabe 7.30** Gegeben seien die Flächen  $\Phi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = r^2, y = r \cdot \cos(\varphi), z = r \cdot \sin(\varphi), 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$  und  $\Psi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 4\}$  sowie die Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto y + 2$ . Sei  $K$  der von  $\Phi$  und  $\Psi$  begrenzte Körper. Bestimmen Sie den Wert des Integrals  $\int_K f d(x, y, z)$ .

**Aufgabe 7.31** Seien  $a$  und  $b$  positive reelle Zahlen. Berechnen Sie mit Hilfe der Koordinatentransformation

$$x = r \cdot a \cdot \cos(\varphi), \quad y = r \cdot b \cdot \sin(\varphi)$$

das Integral

$$\int \int_B \exp\left(-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \quad \text{mit} \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$$

**Aufgabe 7.32** Sei  $B \subset \mathbb{R}^2$  der Durchschnitt des abgeschlossenen Dreiecks mit den Ecken  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$  mit dem Äußeren der offenen Einheitskreisscheibe um den Ursprung.

a) Zeigen Sie:  $B = \{r \cos(\varphi), r \sin(\varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 1 \leq r \leq \frac{1}{\cos(\varphi)}\}$ .

b) Berechnen sie das Integral

$$\int_B \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} d(x, y).$$

**Aufgabe 7.33** Berechnen Sie für

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \text{ und } 0 \leq x \leq y\}$$

das Integral

$$\int_B e^{(x^2 + y^2)} d(x, y).$$

**Aufgabe 7.34** Man berechne das Volumen der Menge

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{1 - \sqrt{x^2 + y^2}} \right\}.$$

**Aufgabe 7.35** In der  $(x, y)$ -Ebene sei  $M$  das von den Geraden  $x + y = \sqrt{2}$  und  $-x + y = \sqrt{2}$ , sowie vom oberen Bogen des Einheitskreises  $x^2 + y^2 = 1$  begrenzte Gebiet.

a) Berechnen Sie die Fläche von  $M$ .

b) Berechnen Sie durch Integration das Volumen des Körpers, der durch Rotation von  $M$  um die  $y$ -Achse entsteht.

**Aufgabe 7.36** Es sei  $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq e\}$ . Berechnen Sie das Integral

$$\int_S \ln(x^2 + y^2) d(x, y).$$

**Aufgabe 7.37** Es sei  $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ . Berechnen Sie das Integral

$$\int_H z \cdot e^{x^2 + y^2} d(x, y, z).$$

## 8 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Als ich mit dem Computer die Bibliothek des Mathematischen Instituts nach Büchern über Differentialgleichungen durchsuchte, lieferte mir der über 200 Buchtitel. Die Mehrzahl waren Bücher über partielle Differentialgleichungen, haben mit dem Inhalt dieser Vorlesung wenig zu tun. Und von den Büchern über gewöhnliche Differentialgleichungen waren die allermeisten viel zu speziell. Hier möchte ich einige Bücher angeben, die vielleicht für Sie brauchbar sind.

Zunächst einmal steht fast alles, was ich in dieser Vorlesung behandeln werde im zweiten Teil des Buches

O. Forster: Analysis 2, rororo vieweg, soundsovielste Auflage.

Ich selbst habe gewöhnliche Differentialgleichungen nach

F. Erwe: Gewöhnliche Differentialgleichungen, BI Mannheim, 1964

gelernt. Der Klassiker auf diesem Gebiet ist

F. Kamke: Differentialgleichungen reeller Funktionen, AVG Leipzig 1930 (und spätere Wiederaufgaben mit ähnlichem Titel).

Schließlich ist auch

E.L. Ince: Die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen, BI Mannheim, 1956 ein sehr nützliches und kompaktes Buch.

### 8.1 Einführung

Differentialgleichungen sind die wichtigsten Anwendungen der Mathematik. Die Mutter aller Differentialgleichungen ist die Newtonsche Gleichung

$$\ddot{y} = -g$$

für den freien Fall. Dabei ist  $y(t)$  die Höhe eines Massenpunktes zur Zeit  $t$ , der sich im freien Fall, nur unter Einfluss der Erdanziehungskraft, nach unten bewegt. Auf ihn wirkt die Erdanziehungskraft  $K = -m \cdot g$ , wo  $m$  seine Masse, und die Beschleunigung  $g$  ungefähr  $10m/sec^2$  ist. Newton hat herausgefunden, dass die Kraft, welche auf einen Körper wirkt, diesen Körper *beschleunigt*. D.h., sie wirkt direkt auf die *zweite* Ableitung seiner Höhe  $y(t)$ . Quantitativ ist Newtons Formel

$$K = m \cdot \ddot{y},$$

die Kraft ist Masse  $\times$  Beschleunigung. Beim freien Fall kürzt sich die Masse  $m$  heraus, und man erhält dann die obige Gleichung.

Aus der Schule kennt man die Lösung

$$y(t) = y_0 + v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2, \quad t = \text{Zeit.}$$

Dabei ist  $y_0$  die Anfangshöhe und  $v_0$  die Anfangsgeschwindigkeit. Es ist leicht nachzurechnen, dass diese Funktion  $y(t)$  eine Lösung der Gleichung ist. Und man überzeugt sich ebenso leicht davon, dass auch umgekehrt jede Lösung der Newtonschen Gleichung diese Form hat: Aus  $\ddot{y} = -g$  folgt durch

einmalige Integration  $\dot{y} = -g \cdot t + v_0$  mit einer Konstanten  $v_0$  und durch eine zweite Integration  $y(t) = -(g/2) \cdot t^2 + v_0 \cdot t + y_0$  mit einer weiteren Konstanten  $y_0$ .

Die Newtonsche Differentialgleichung ist ganz besonders einfach: Außer der zweiten Ableitung kommt in der Gleichung von der gesuchten Funktion nichts vor. Deswegen behandelt man sie ja auch schon in der Schule. Das ist nicht besonders typisch für Differentialgleichungen: Im Allgemeinen verknüpft eine Differentialgleichung eine Funktion mit ihren Ableitungen. Das passiert z.B., wenn man in der Gleichung des fallenden Körpers den Luftwiderstand berücksichtigt. In erster Näherung ist der eine Art Reibung und damit direkt proportional zur Geschwindigkeit. Berücksichtigt man ihn, so nimmt die Newtonsche Gleichung die Form

$$\ddot{y} = -\mu \cdot \dot{y} - g$$

an. Da kommt zwar die erste Ableitung der Funktion  $y(t)$ , aber immer noch nicht die Funktion  $y(t)$  selbst vor. Das würde aber notwendig, wenn man einen Fall durch die gesamte Erdatmosphäre (etwa einer zurückkehrenden Rakete) verfolgt. In erster Näherung wäre die Luftdichte, und damit der Luftwiderstand proportional zur Nähe zu der Erde, etwa  $\mu = \mu(y) = \mu \cdot (y_0 - y(t))$ . Dann bekommen wir die schon recht komplizierte Gleichung

$$\ddot{y} = -\mu \cdot (y_0 - y(t)) \cdot \dot{y} - g,$$

in der die Funktion  $y(t)$  und ihre beiden ersten Ableitungen vorkommen.

Ein anderes Beispiel ist die Gleichung

$$\ddot{y} = -\omega^2 \cdot y(t)$$

des harmonischen Oszillators. In der Schule lernt man dafür die Lösungen

$$y(t) = c_1 \cdot \sin(\omega t) + c_2 \cdot \cos(\omega t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

kennen. Allerdings ist es hier schon wesentlich schwerer, sich davon zu überzeugen, dass dies die einzigen Lösungen sind. Wenn man den Schwingungsvorgang auch noch gedämpft annimmt, kommt man auf eine Differentialgleichung der Form

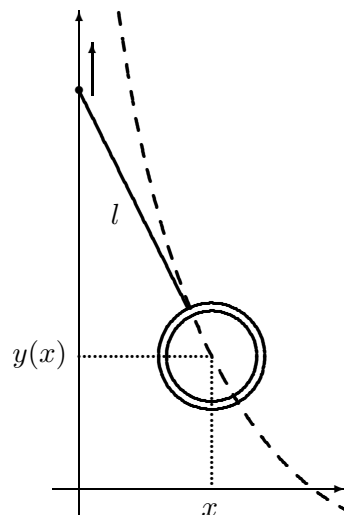
$$\ddot{y} - \mu \cdot \dot{y} + \omega^2 \cdot y = 0.$$

Hier kommt wieder die gesuchte Funktion  $y(t)$  mit ihren beiden ersten Ableitungen vor.

Diese kurze Diskussion zeigt schon einige wesentliche Aspekte der Differentialgleichungen:

- Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung, welche die Werte einer Funktion mit ihren Ableitungen verknüpft.
- Je realistischer die Differentialgleichung einen Vorgang beschreiben soll, desto komplizierter ist sie.
- Man kann den Ablauf eines Vorgangs (z.B. einer Bewegung) vorhersagen, wenn man die betreffende Differentialgleichung löst.
- Kennt man alle Lösungen, so kennt man alle möglichen Bewegungsabläufe, welche durch diese Differentialgleichung beschrieben werden.

Newton schuf die Grundlagen der theoretischen Mechanik, mit der man die Bewegung von Körpern unter Einfluss von Kräften verstehen kann. Das war einer der beiden wichtigsten Impulse zur Entwicklung der Theorie der Differentialgleichungen. Er hing ganz deutlich mit den Anwendungen zusammen. Der andere, davon nicht ganz klar zu trennende Impuls kam aus der reinen Mathematik: Man wollte Kurven (Funktionsgraphen) beschreiben, über deren Richtung man etwas wusste. Das typische Beispiel dafür ist die Kurve, auf der sich eine Taschenuhr bewegt, wenn man sie an ihrer Kette über den Tisch zieht, und zwar immer in dieselbe Richtung. Diese Richtung soll natürlich nicht direkt von der Uhr wegzeigen, sondern etwa längs der  $y$ -Achse, von der die Uhr den Abstand  $x$  hat. Die Situation ist dann ungefähr so:



Die Differentialgleichung, welche die Funktion  $y(x)$  und damit die Bahn der Taschenuhr beschreibt, erhält man durch folgende Überlegung: Wir suchen erst einmal die Gleichung für die Gerade, auf der die (straff gespannte) Kette liegt. Sie ist die Tangente an die gesuchte Kurve. Um nicht mit den Koordinaten  $x, y$  durcheinander zu kommen, nehmen wir für die Tangentengleichung Koordinaten  $\xi, \eta$ . Der Anfangsvektor der Geraden ist  $(x, y(x))$  und ihre Steigung  $y'(x)$ . Dann ist die Tangentengleichung also

$$\eta = y(x) + y'(x) \cdot (\xi - x).$$

Die Tangente schneidet die  $y$ -Achse dort, wo

$$\xi = 0, \quad \eta = y(x) - x \cdot y'(x), \quad \eta - y(x) = -x \cdot y'(x)$$

ist. Nach Pythagoras ist die Länge  $l$  der Uhrkette

$$l = \sqrt{x^2 + (\eta - y)^2} = \sqrt{x^2 + x^2 \cdot (y')^2} = \pm x \cdot \sqrt{1 + (y')^2},$$

und somit

$$1 + (y')^2 = \left(\frac{l}{x}\right)^2, \quad y' = \pm \sqrt{\frac{l^2}{x^2} - 1} = \pm \frac{\sqrt{l^2 - x^2}}{x}.$$

Dies ist die gesuchte Differentialgleichung. Genauer gesagt, sind dies zwei Differentialgleichungen: Eine, wenn man in negativer  $y$ -Richtung zieht (Plus-Zeichen), und eine andere (Minus-Zeichen), wenn man in positiver  $y$ -Richtung zieht. Wir wollen uns auf letzteres festlegen, sodass wir also

$$y' = -\frac{\sqrt{l^2 - x^2}}{x}$$

lösen müssen.

Man kann diese Gleichung lösen, wenn man die Funktion  $\sqrt{l^2 - x^2}/x$  integrieren kann. Eine Stammfunktion ist

$$\sqrt{l^2 - x^2} - l \cdot \ln \left| \frac{l + \sqrt{l^2 - x^2}}{x} \right|.$$

Die findet man in einer guten Formelsammlung. Wenn man sie nicht dort findet, sondern selbst integrieren muss, ist man allerdings in Schwierigkeiten. Ich selbst habe - in Kenntnis der Stammfunktion - ewig gebraucht, bevor ich merkte, dass die Substitution  $u = \sqrt{l^2 - x^2}$  zum Ziel führt. Damit kommt man auf ein Integral, das mit Partialbruchzerlegung zu bewältigen ist. Als Lösungen findet man damit also die Funktionen

$$y = c - \sqrt{l^2 - x^2} + l \cdot \ln \left| \frac{l + \sqrt{l^2 - x^2}}{x} \right|, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Die Integrationskonstante  $c$  macht Sinn, man kann ja mit dem Ziehen der Taschenuhr bei einem beliebigen Wert von  $y$  anfangen, dieser  $y$ -Wert legt die Konstante  $c$  fest.

Diese Gleichung ist typisch für eine Reihe von Gleichungen, die mit der Tangente

$$\{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \eta = y + y' \cdot (\xi - x)\}$$

an den Funktionsgraphen  $y = y(x)$  zusammenhängen. Wir stellen einige davon systematisch zusammen. Dazu berechnen wir

- den *Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse*

$$(\xi, 0) \quad \text{mit} \quad \xi = x - \frac{y}{y'},$$

- den *Schnittpunkt der Tangente mit der y-Achse*

$$(0, \eta) \quad \text{mit} \quad \eta = y - xy',$$

- den *Abstand des Berührungspunktes  $(x, y)$  vom Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse*

$$\| (x, y) - (\xi, 0) \| = \left| \frac{y}{y'} \sqrt{1 + (y')^2} \right|,$$

- den *Abstand des Berührungspunktes  $(x, y)$  vom Schnittpunkt der Tangente mit der y-Achse*

$$\| (x, y) - (0, \eta) \| = \left| x \sqrt{1 + (y')^2} \right|,$$

- den *Tangentenabschnitt zwischen den Koordinatenachsen*

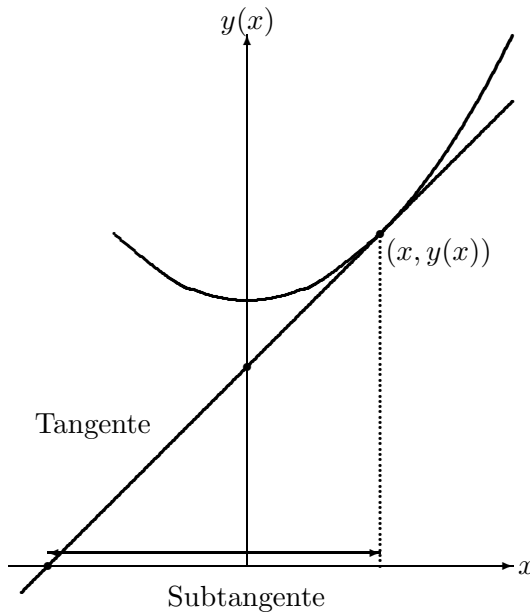
$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \left| \frac{1}{y'} \sqrt{(xy' - y)^2 + (y')^2 (xy' - y)^2} \right| = \left| \frac{xy' - y}{y'} \sqrt{1 + (y')^2} \right|,$$

- die *Subtangente*, d.h., den Abstand von  $x$  zum Tangentschnittpunkt  $\xi$

$$|x - \xi| = \left| \frac{y}{y'} \right|,$$

- den *Abstand der Tangente zum Nullpunkt*

$$\left| \frac{y - xy'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right|.$$



Setzt man diese Größen konstant, oder schreibt für sie bestimmte, von  $x$  oder  $y$  abhängende Werte vor, so erhält man eine Differentialgleichung. Am einfachsten ist die Bedingung für konstante Subtangente (das Vorzeichen wollen wir einmal unterdrücken):

$$\frac{y}{y'} = \text{const}, \quad y' = c \cdot y.$$

Eine Lösung ist jede Funktion  $k \cdot e^{cx}$ ,  $0 \neq k \in \mathbb{R}$ .

**Beispiel 8.1** *Gesucht ist eine differenzierbare Funktion*

$$f : ]0, \infty[ \rightarrow ]0, \infty[$$

mit der Eigenschaft: für jedes  $x_0 > 0$  habe die Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkte  $P_0 = (x_0, f(x_0))$  Schnittpunkte  $P_1, P_2$  mit den positiven Koordinatenachsen, und für diese gilt

$$\| P_1 - P_0 \| = \| P_2 - P_0 \| .$$

Die Bedingung  $\| P_1 - P_0 \| = \| P_2 - P_0 \|$  bedeutet mit den obigen Formeln

$$\left| \frac{y}{y'} \sqrt{1 + (y')^2} \right| = \left| x \sqrt{1 + (y')^2} \right| .$$

Nun ist vorausgesetzt, dass die Tangente beide positiven Koordinatenachsen schneidet. Das geht nur, wenn  $y' < 0$  ist. Unsere Bedingung wird also

$$-\frac{y}{y'} = x, \quad \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x} .$$

Hier können wir problemlos integrieren

$$\ln(y) = -\ln(x) + c, \quad c \in \mathbb{R} .$$



Wenden wir auf diese Gleichung noch die Exponentialfunktion an, so erhalten wir

$$y = \frac{e^c}{x},$$

die gleichseitige Hyperbel.

Was wir soeben für die Tangente berechnet haben, kann man auch alles für die *Normale*

$$\{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \eta = -\frac{1}{y'}(\xi - x)\},$$

d.h., für das Lot auf die Tangente im Kurvenpunkt  $(x, y(x))$ , ausrechnen. Das führt dann zu einer ganzen Serie neuer Differentialgleichungen.

Jetzt möchte ich einige Definitionen zusammenstellen.

**Definition 8.1** Eine gewöhnliche Differentialgleichung  $k$ -ter Ordnung ist eine Gleichung

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(k)}) = 0,$$

wo  $F$  eine stetige Funktion von  $k + 2$  Variablen ist. (Die meisten Differentialgleichungen der Physik sind Gleichungen zweiter Ordnung. Die Gleichungen, welche man erhält, wenn man eine der oben berechneten Größen gleich einer festen Konstanten setzt, sind Differentialgleichungen erster Ordnung.) Meistens setzt man die Funktion  $F$  stetig voraus. Zu  $F$  gehört dann natürlich auch ein Definitionsbereich  $G \subset \mathbb{R}^{k+2}$ , und wir haben  $F : G \rightarrow \mathbb{R}$ .

Eine Lösung obiger Differentialgleichung auf einem Intervall  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  ist eine  $k$ -mal differenzierbare Funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  derart, dass für alle  $x \in (a, b)$  gilt:

- (i) der Vektor  $(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(k)}(x))$  gehört zu  $G$ ,
- (ii)  $F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(k)}(x)) = 0$ .

**Definition 8.2** Eine Differentialgleichung heißt *explizit*, wenn sie nach der höchsten vorkommenden Ableitung aufgelöst ist, also eine Form

$$y^{(k)} = F(x, y, y', \dots, y^{(k-1)})$$

hat.

Eine explizite Differentialgleichung erster Ordnung sieht also etwa so aus:

$$y' = F(x, y).$$

**Definition 8.3** Eine Differentialgleichung heißt *linear*, wenn  $F$  in  $y, y', \dots, y^{(k)}$  linear ist, also, wenn sie die Form

$$a_k(x) \cdot y^k + \dots + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y = b(x)$$

hat. Sie heißt *homogen*, wenn  $b(x) \equiv 0$  ist, sonst *inhomogen*.

So ist z.B.

$$y' = a(x) \cdot y$$

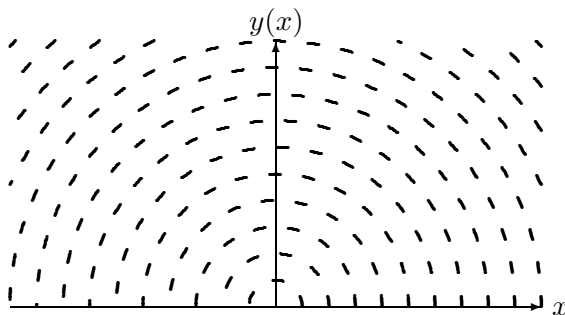
eine homogene Differentialgleichung erster Ordnung, und

$$y' = a(x) \cdot y + b(x)$$

eine inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung.

Zu einer linearen Differentialgleichung gehört immer ein Definitions-Intervall  $]a, b[ \subset \mathbb{R}$ , auf dem alle Koeffizientenfunktionen  $a_m(x)$ , sowie die rechte Seite  $b(x)$  definiert und stetig sind.

Explizite Differentialgleichungen erster Ordnung kann man folgendermaßen interpretieren: Sei eine Gleichung  $y' = F(x, y)$  auf der Menge  $G \subset \mathbb{R}^2$  gegeben. Dann legt sie in jedem Punkt  $(x, y) \in G$  eine *Richtung* fest. Jede Lösungsfunktion  $f(x)$  muss in jedem Punkt  $(x, y)$  die Ableitung  $f' = F(x, y)$  besitzen. Dadurch ist also die Tangentialrichtung der Kurve in jedem Punkt festgelegt. Die Differentialgleichung definiert ein *Richtungsfeld* auf  $G$ :



Und die Aufgabe, die Differentialgleichung zu lösen, besteht darin, eine Funktion  $f(x)$  zu suchen, deren Graph in jedem seiner Punkte die durch das Richtungsfeld vorgegebene Steigung hat.

Schließlich noch ein Wort zum Begriff *gewöhnliche* Differentialgleichung. Es gibt auch noch *partielle* Differentialgleichungen. Das sind Gleichungen, wo die gesuchte Funktion  $f$  nicht nur von einer, sondern von mehreren Variablen abhängt. Beispiele dafür sind die

Wellengleichung  $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$

Potentialgleichung  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$

Wärmeleitungsgleichung  $\frac{\partial f}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$

Partielle Differentialgleichungen sind viel schwerer zu lösen, als gewöhnliche. (Deswegen sind sie auch kein Stoff des nicht-vertieften Mathematik-Studiums), allerdings sind sie in den Anwendungen viel häufiger und viel wichtiger.

**Aufgabe 8.1** Sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion. Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $0 < a < 1 < b$ . Weiter sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft, dass für jedes

$x \in [a, b]$  die Tangente an den Graphen von  $f$  die  $y$ -Achse im Punkt  $(0, g(f(x)))$  schneidet. Man zeige:  $f$  ist in  $[a, b]$  Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{y - g(y)}{x}.$$

**Aufgabe 8.2** Man bestimme alle differenzierbaren Funktionen  $f : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft, dass für alle  $x \in ]0, \infty[$  die Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkte  $(x, f(x))$  die  $y$ -Achse im Punkt  $(0, \frac{1}{2}f(x))$  schneidet.

## 8.2 Elementare Lösungsmethoden

### 8.2.1 Homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung

**Beispiel 8.2** Beginnen wir mit einem Beispiel, einem einfachen:

$$y' = y.$$

Wir sollen also eine Funktion  $y(x)$  finden, die mit ihrer Ableitung übereinstimmt. Vielleicht erinnert sich der eine oder andere daran, dass die  $e$ -Funktion  $y = e^x$  diese Eigenschaft hat. Damit haben wir eine Lösung durch Erinnern gefunden. Aber es muss doch auch systematischer gehen!

Dazu bringt man  $y$  auf die linke Seite

$$\frac{y'}{y} = 1$$

und erkennt auf der linken Seite die Ableitung

$$\frac{d}{dx} \ln|y(x)| = \frac{1}{y} \cdot y'$$

der Funktion  $\ln|y(x)|$ . Und die rechte Seite ist die Ableitung der Funktion  $x$ . Deswegen ist (für  $y \neq 0$ ) die Differentialgleichung äquivalent mit

$$\frac{d}{dx} (\ln|y(x)| - x) \equiv c, \quad c \in \mathbb{R},$$

bzw. mit

$$\ln|y(x)| = x + c, \quad |y(x)| = e^{x+c} = c' \cdot e^x$$

mit der positiven Konstante  $0 < c' = e^c \in \mathbb{R}$ . Wollen wir die Absolutstriche weglassen, so müssen wir

$$y(x) = \pm c' \cdot e^x$$

schreiben. Und das  $\pm$ -Zeichen können wir uns schenken, wenn wir für  $c'$  positive oder negative Werte zulassen. Schließlich ist aber  $y(x) \equiv 0$  auch eine Lösung (die Null-Lösung). Diese Nulllösung ist bei unserem Lösungs-Verfahren nicht mit herausgekommen. Aber wir können sie mit dazu nehmen, und dann haben wir die Lösungen

$$y(x) = c \cdot e^x, \quad c \in \mathbb{R}$$

gefunden.

Dieses, relativ naive Lösungs-Verfahren ist sehr wichtig, man muss es auswendig können. Vor allem deswegen, weil man damit alle homogenen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung behandeln kann:

Sei etwa die Differentialgleichung

$$y' = a(x) \cdot y$$

mit einer stetigen Koeffizientenfunktion  $a : ]\alpha, \beta[ \rightarrow \mathbb{R}$  vorgelegt. Auch hier gibt es die Null-Lösung  $y \equiv 0$ . Und wo  $y \neq 0$  ist, dividieren wir durch  $y$ , um die Gleichung auf die Form

$$\frac{y'}{y} = a(x)$$

zu bringen. Wenn wir jetzt eine Stammfunktion  $A(x)$  für  $a(x)$  kennen, können wir genau wie eben integrieren:

$$\ln|y(x)| = A(x) + c, \quad |y(x)| = e^c \cdot e^{A(x)}, \quad y(x) = \pm c' \cdot e^{A(x)}.$$

Nehmen wir die Null-Lösung hinzu, so haben wir die Lösungen

$$y(x) = c \cdot e^{A(x)}, \quad c \in \mathbb{R},$$

ermittelt.

Auf diese Weise kann man *alle* homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung  $y' = a(x) \cdot y$  lösen. Alles was man braucht, ist eine Stammfunktion  $A(x)$  für die Koeffizientenfunktion  $a(x)$ . Man kann es auch so sagen: Die Ermittlung von Lösungen ist auf die Integration einer Funktion  $a(x)$  zurückgeführt. Die Ermittlung einer Stammfunktion  $A(x)$  kann explizit möglich sein, oder auch nicht. Das ist jetzt nicht mehr unser Problem. Schlimmstenfalls schreiben wir halt

$$A(x) = \int_{x_0}^x a(\xi) d\xi.$$

Immer, wenn man eine Differentialgleichung auf die Ermittlung einer Stammfunktion zurückgeführt hat, ist man happy, und lehnt sich entspannt zurück. Daher kommt auch der Sprachgebrauch: 'Eine Differentialgleichung integrieren'. Damit meint man: 'Eine Differentialgleichung lösen'.

**Beispiel 8.3** *Noch ein paar Beispiele:*

$$\begin{array}{l} y' = a \cdot y, \quad a \in \mathbb{R}, \\ y'/y = a \\ \ln|y| = a \cdot x + c \\ y = \pm e^c \cdot e^{a \cdot x} \\ y = c' \cdot e^{a \cdot x} \end{array} \left| \begin{array}{l} y' = x \cdot y \\ y'/y = x \\ \ln|y| = x^2/2 + c \\ y = \pm e^c \cdot e^{x^2/2} \\ y = c' \cdot e^{x^2/2} \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} y' = y/x \\ y'/y = 1/x \\ \ln|y| = \ln|x| + c \\ y = \pm e^c \cdot e^{\ln|x|} \\ y = c' \cdot x \end{array} \right.$$

So, das dürfte als Illustration dieser Methode genügen. Es ist eine Methode, um Lösungen für homogene, lineare Differentialgleichungen erster Ordnung zu finden. Unter dem *Lösen einer Differentialgleichung* versteht man aber das Auffinden *aller* ihrer Lösungen. Die verwendete Methode gibt in der Tat *alle* Lösungen. Das ist allerdings etwas subtiler (wegen der Probleme mit  $y \neq 0$ ), das möchte ich deswegen nicht hier, sondern etwas allgemeiner in 8.3 diskutieren. Ich halte es eben für wichtiger, Beispielmaterail zusammenzustellen, und ein gewisses Gefühl für das Problem zu entwickeln, als gleich mit der allgemeinen Theorie ins Haus zu fallen.

### 8.2.2 Inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung

Deswegen wende ich mich jetzt einer Variation der homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung zu, nämlich der *inhomogenen* linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = a(x) \cdot y + b(x).$$

Ihre Beziehung zur homogenen Gleichung ist genau dieselbe wie die Beziehung eines inhomogenen linearen Gleichungs-Systems der Linearen Algebra zu seinem homogenen Gleichungssystem:

**Satz 8.1** *Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung*

$$y' = a(x) \cdot y + b(x)$$

erhält man, indem man zu einer speziellen Lösung  $y_0 = f_0(x)$  dieser Gleichung alle Lösungen  $y = f(x)$  der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$y' = a(x) \cdot y$$

addiert.

Beweis (wie in der Linearen Algebra). a) Sei  $y_0 = f_0(x)$  eine Lösung der inhomogenen Gleichung und  $y = f(x)$  eine der homogenen. Dann gilt also

$$y_0' = a(x) \cdot y_0 + b(x), \quad y' = a(x) \cdot y.$$

Daraus folgt

$$(y_0 + y)' = a(x) \cdot y_0 + b(x) + a(x) \cdot y = a(x) \cdot (y_0 + y) + b(x).$$

Also ist  $y_0 + y$  auch eine Lösung der inhomogenen Gleichung.

b) Sei  $y_0$  eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung und  $u$  eine weitere Lösung. Das bedeutet also

$$y_0' = a(x) \cdot y_0 + b(x) \quad \text{und} \quad u' = a(x) \cdot u + b(x).$$

Für  $y := u - y_0$  folgt daraus

$$y' = [a(x) \cdot u + b(x)] - [a(x) \cdot y_0 + b(x)] = a(x) \cdot (u - y_0) = a(x) \cdot y.$$

Also ist  $y$  eine Lösung der homogenen Gleichung und  $u = y_0 + y$ . □

Somit kommt es darauf an, mit Gewalt eine, eine einzige Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden. Auch dafür gibt es eine Methode, die man wieder auswendig wissen muss. Sie trägt den in sich widerspruchsvollen Namen: *Variation der Konstanten*. Eine Konstante kann ja nicht Variieren, sie ist doch konstant, deswegen heißt sie ja auch so. Macht nichts, variieren wir die Konstante, und zwar die Konstante  $c$  bei der Lösung

$$y = c \cdot e^{A(x)}$$

der homogenen Gleichung. Wir machen also den Ansatz

$$y_0(x) = c(x) \cdot y(x), \quad \text{wo } y \text{ Lösung der homogenen Gleichung.}$$

Wir differenzieren mit der Produktregel und vergleichen das Resultat mit der inhomogenen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
 y_0'(x) &= c'(x) \cdot y(x) + c(x) \cdot y'(x) && \text{(Produktregel)} \\
 &= c'(x) \cdot y(x) + c(x) \cdot a(x) \cdot y(x) && \text{(homogene Dgl.)} \\
 &= c'(x) \cdot y(x) + a(x) \cdot y_0(x) \\
 y_0'(x) &= b(x) + a(x) \cdot y_0(x) && \text{(inhomogene Dgl.)}
 \end{aligned}$$

Somit ist  $y_0$  Lösung der inhomogenen Gleichung, genau dann wenn

$$c'(x) \cdot y(x) = b(x), \quad \text{d.h.} \quad c'(x) = \frac{b(x)}{y(x)}.$$

Damit ist das Auffinden von  $y_0$ , d.h., das Auffinden von  $c(x)$ , auf die Integration

$$c(x) = \int \frac{b(x)}{y(x)} dx = \int b(x) e^{-A(x)} dx$$

zurückgeführt. Wieder einmal eine Integration!

Rechnen wir mal zwei Beispiele, ein einfaches, damit man das Prinzip deutlich erkennt, und ein technisches, aus einer Klausuraufgabe.

#### Beispiel 8.4 (einfaches)

$$y' = y + 1.$$

Die zugehörige homogene Differentialgleichung ist  $y' = y$ . Wir kennen ihre Lösungen  $y = c \cdot e^x$  und variieren die Konstante:

$$y_0 = c(x) \cdot e^x.$$

Wir müssen mit der Produktregel differenzieren, und das Resultat mit der Differentialgleichung vergleichen:

$$\begin{aligned}
 y_0' &= c'(x) \cdot e^x + c(x) \cdot e^x \\
 &= c'(x) \cdot e^x + y_0, \\
 y_0' &= y_0 + 1.
 \end{aligned}$$

Subtraktion beider Gleichungen liefert

$$c'(x) \cdot e^x - 1 = 0, \quad c'(x) = e^{-x}, \quad c(x) = \int e^{-x} dx = -e^{-x}.$$

(Die Integrationskonstante bei dieser Integration können wir vergessen, weil es uns nur auf eine spezielle, eine einzige spezielle Lösung  $y_0$  ankommt.) Wir erhalten also

$$y_0 = -e^{-x} \cdot e^x = -1.$$

Überraschend einfach! In der Tat,  $y_0$  ist konstant, also  $y_0' = 0$  und  $y_0 + 1 = 0 = y_0'$ . Das hätte man auch erraten können. Mit der speziellen Lösung  $y_0 = -1$  der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung  $y = c \cdot e^x$  der homogenen Gleichung erhalten wir die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y_0 + y = -1 + c \cdot e^x.$$

### Beispiel 8.5 (technisches)

$$y' = -\cot(x) \cdot y + 5e^{\cos(x)}.$$

Die homogene Gleichung

$$y' = -\cot(x) \cdot y$$

führt uns auf

$$\frac{y'}{y} = -\cot(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = -\frac{d}{dx} \ln|\sin(x)|,$$
$$\ln|y| = -\ln|\sin(x)| + c, \quad y = c \cdot \frac{1}{\sin(x)}.$$

Wir variieren die Konstante mit dem Ansatz

$$y_0 = c(x) \cdot \frac{1}{\sin(x)}.$$

Wieder wenden wir die Produktregel an und vergleichen mit der Differentialgleichung:

$$y'_0 = c'(x) \cdot \frac{1}{\sin(x)} + c(x) \cdot \frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)},$$
$$y'_0 = -\cot(x)y_0 + 5e^{\cos(x)}$$
$$= -c(x) \cdot \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} + 5e^{\cos(x)}.$$

Das liefert

$$\frac{c'(x)}{\sin(x)} = 5e^{\cos(x)}, \quad c'(x) = 5\sin(x)e^{\cos(x)}, \quad c(x) = 5e^{\cos(x)}.$$

Und die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist

$$y_0 + y = \frac{5e^{\cos(x)}}{\sin(x)} + \frac{c}{\sin(x)}.$$

Wegen des Sinus im Nenner, mit seinen vielen Nullstellen, ist es eine ganz andere Frage, wo diese Lösung existiert, darauf kommen wir auch bei einer anderen Gelegenheit zurück.

### 8.2.3 Trennung der Variablen

Die inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung  $y' = a(x) \cdot y + b(x)$  ist eine Verallgemeinerung der homogenen linearen Differentialgleichung  $y' = a(x) \cdot y$ . Eine andere Verallgemeinerung ist die Differentialgleichung

$$y' = a(x) \cdot b(y).$$

Hier kommt  $y$  auf der rechten Seite nicht mehr linear vor, sondern innerhalb einer neuen Funktion  $b$ . Das Wesentliche ist, dass die rechte Seite ein Produkt

$$\text{Funktion } a \text{ von } x \quad \times \quad \text{Funktion } b \text{ von } y$$

ist. Deswegen kann man *die Variablen  $x$  und  $y$  trennen*:

$$\frac{y'}{b(y)} = a(x).$$

Diese Trennung der Variablen treiben wir noch weiter, indem wir von der Gleichung

$$\frac{1}{b(y)} \cdot \frac{dy}{dx} = a(x)$$

zu der Gleichung

$$\frac{1}{b(y)} \cdot dy = a(x) \cdot dx$$

übergehen. Die ist natürlich sinnlos, deswegen integrieren wir bevor das jemand merkt ganz schnell darüber

$$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(x) dx + c.$$

Und diese Gleichung ist glücklicherweise wieder sinnvoll.

Dass dieses Verfahren legitim ist, steht mit allen Voraussetzungen liebevoll im Forster II. Wir wollen uns keine Gedanken darüber machen, sondern einige Beispiele rechnen, um zu dieser Methode Vertrauen zu fassen.

**Beispiel 8.6** *Sei etwa die Gleichung*

$$y' = \frac{x}{y}$$

*vorgelegt. Wir trennen die Variablen*

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = x, \quad y dy = x dx$$

*und integrieren*

$$\int y dy = \int x dx + c', \quad \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c', \quad y^2 = x^2 + c.$$

*Das Verfahren liefert die Funktionen*

$$y = \pm \sqrt{x^2 + c}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

*Machen wir lieber noch die Probe:*

$$y' = \pm \frac{x}{\sqrt{x^2 + c}} = \frac{x}{y},$$

*es stimmt.*

**Beispiel 8.7** *Ein anderes Beispiel ist*

$$y' = -y^r, \quad 0 < r \in \mathbb{R}.$$

*Auf der rechten Seite kommt jetzt gar kein  $x$  vor, macht nichts wir trennen es trotzdem vom  $y$ :*

$$y^{-r} \cdot \frac{dy}{dx} = -1, \quad y^{-r} dy = -dx$$



und integrieren

$$\frac{1}{1-r}y^{1-r} = c - x, \quad y = ((1-r)(c-x))^{1/(1-r)}.$$

Das war ja ganz schön einfach. Wo die Lösung existiert, das ist wieder eine andere Frage, und den Fall  $r = 1$  dürfen wir auch nicht vergessen:

$$\frac{dy}{y} = -dx, \quad \ln|y| = -x, \quad y = c \cdot e^{-x}.$$

### 8.2.4 Bernoullische Differentialgleichung

Manche Integrale kann man durch Substitution ausrechnen, ähnlich kann man manche Differentialgleichungen durch Substitution integrieren. Es gibt im wesentlichen zwei Substitutionen, deren Konsequenzen man kennen muss:

$$z = y^k \quad \text{und} \quad z = y/x.$$

Schauen wir uns das Resultat der ersten Substitution an, wenn man sie auf inhomogene, lineare Differentialgleichungen erster Ordnung loslässt:

Betrachten wir die Gleichung

$$z' = a(x) \cdot z + b(x)$$

und substituieren hier  $z = y^k$ . Was passiert? Wir erhalten

$$k \cdot y^{k-1} \cdot y' = a(x) \cdot y^k + b(x),$$

bzw. nach Division durch  $k \cdot y^{k-1}$  die Differentialgleichung

$$y' = \frac{a(x)}{k} \cdot y + \frac{b(x)}{k} \cdot y^{1-k}.$$

Wenn wir jetzt noch umbenennen  $a/k \rightarrow a$ ,  $b/k \rightarrow b$ ,  $1-k \rightarrow k$  wird daraus die Differentialgleichung

$$y' = a(x) \cdot y + b(x) \cdot y^k.$$

Sie heißt *Bernoullische Differentialgleichung* und sieht ziemlich anders aus, als die inhomogene lineare, aus der sie entstanden ist: Wo bei der inhomogenen linearen der von  $y$  freie Summand  $b(x)$  steht, haben wir jetzt einen Summanden  $b(x) \cdot y^k$  mit einer gefährlichen Potenz  $y^k$ .

Hier kann  $k$  eine beliebige reelle, nicht notwendig ganze Zahl sein. Notfalls muss man sich halt auf den Bereich  $y > 0$  beschränken. Das muss man sich im Einzelfall genau ansehen. Wir wollen jetzt die Transformation noch einmal rückwärts (d.h., in der für die Anwendung wichtigen Richtung) durchgehen:

Sei eine Bernoullische Differentialgleichung

$$y' = a(x) \cdot y + b(x) \cdot y^k$$

vorgelegt. Man dividiert durch das störende  $y^k$

$$y^{-k}y' = a(x) \cdot y^{1-k} + b(x)$$

und macht mit der Substitution

$$z = y^{1-k}, \quad z' = (1-k)y^{-k}y'$$

daraus die lineare Gleichung

$$\frac{1}{1-k}z' = a(x) \cdot z + b(x), \quad \text{bzw.} \quad z' = (1-k)a(x) \cdot z + (1-k)b(x).$$

Der Fall  $k = 1$  muss dabei natürlich ausgeschlossen werden. Da wäre die ursprüngliche Bernoullische Gleichung aber auch eine ganz gewöhnliche homogene lineare Differentialgleichung gewesen.

**Beispiel 8.8** *Schauen wir mal, ob das in der Praxis tatsächlich funktioniert. Die einfachste, nicht ganz triviale Bernoullische Gleichung ist wohl*

$$y' = y + y^2.$$

*Was sagt unser Rezept? Durch  $y^2$  dividieren*

$$y^{-2}y' = y^{-1} + 1$$

*und  $z = y^{-1}$  substituieren*

$$-z' = z + 1, \quad z' = -z - 1.$$

*Die homogene Gleichung  $z' = -z$  hat die allgemeine Lösung  $z = c \cdot e^{-x}$ , und Variation der Konstanten,  $z_0 = c(x) \cdot e^{-x}$ , führt zu*

$$z'_0 = c'(x) \cdot e^{-x} - c(x) \cdot e^{-x} = c'(x) \cdot e^{-x} - z_0(x).$$

*Mit der Differentialgleichung  $z'_0 = -z_0 - 1$  erhalten wir daraus*

$$c'(x) \cdot e^{-x} = -1, \quad c'(x) = -e^x, \quad c(x) = -e^x$$

*und die spezielle Lösung  $z_0(x) = -1$ . Auch das hätten wir wieder erraten können! Die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Gleichung ist also*

$$z(x) = -1 + c \cdot e^{-x}, \quad c \in \mathbb{R},$$

*und die Lösung der Bernoullischen Gleichung wird*

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{c \cdot e^{-x} - 1}.$$

*Natürlich sollte man die Probe machen, ob man sich nicht vielleicht verrechnet hat.*

Fassen wir zusammen:

Bernoullische Gleichung:	$y' = a(x) \cdot y + b(x) \cdot y^k$
Division durch $y^k$ :	$y^{-k}y' = a(x) \cdot y^{1-k} + b(x)$
Substitution $z = y^{1-k}$ :	$\frac{z'}{1-k} = a(x) \cdot z + b(x)$

### 8.2.5 Homogene Differentialgleichung

Lassen wir jetzt die Substitution  $z = y/x$  auf die Differentialgleichung

$$z' = \frac{f(z)}{x}$$

los, die man durch Trennung der Variablen behandeln kann. Mit

$$z' = \frac{xy' - y}{x^2}$$

erhalten wir daraus

$$\frac{xy' - y}{x^2} = \frac{f(y/x)}{x}, \quad y' = \frac{y}{x} + f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Wenn wir  $g(z) := z + f(z)$  setzen, wird daraus

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right).$$

Die rechte Seite hängt nur vom Quotienten  $z = y/x$  ab, so etwas nennt man homogen, und die Differentialgleichung nennt man eine *homogene Differentialgleichung*. Das ist eine etwas unglückliche Sprachregelung, weil sie nichts mit einer homogenen linearen Differentialgleichung zu tun hat.

Spielen wir diese Substitution jetzt nocheinmal rückwärts durch, so wie man sie anwendet. Vorgelegt sei also die homogene Differentialgleichung

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right).$$

Wir müssen substituieren

$$z = \frac{y}{x}, \quad y = z \cdot x, \quad y' = z' \cdot x + z.$$

Dann wird die Gleichung

$$z' \cdot x + z = g(z), \quad z' = \frac{g(z) - z}{x} = \frac{f(z)}{x}$$

mit  $f(z) = g(z) - z$ , eine Differentialgleichung mit trennbaren Variablen.

**Beispiel 8.9** *So, und jetzt schauen wir uns noch an, wie das praktisch funktioniert. Nehmen wir die homogene Differentialgleichung*

$$y' = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{y^2}{x^2} \right)$$

*und substituieren  $z = y/x$ ,  $y = x \cdot z$ ,  $y' = x \cdot z' + z$ . Wir finden*

$$x \cdot z' + z = \frac{1}{2}(1 + z^2), \quad z' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 2z + z^2}{x}, \quad \frac{z'}{(1-z)^2} = \frac{1}{2x}.$$

*Nach einer Integration wird daraus*

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2} \ln|x| + c', \quad 1-z = \frac{2}{\ln|x| + c'}$$

Also wird

$$z = 1 - \frac{2}{\ln|x| + c}, \quad y = x - \frac{2x}{\ln|x| + c}.$$

Auch hier muss man unbedingt wieder die Probe machen. (Natürlich habe ich es mit viel Phantasie so hingetrickt, dass man die entstehende Differentialgleichung mit getrennten Variablen in geschlossener Form integrieren kann.)

Fassen wir auch hier zusammen:

$$\begin{aligned} \text{Homogene Gleichung: } & y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \\ \text{Substitution } y = z \cdot x: & z' \cdot x + z = g(z) \\ & z' = \frac{g(z) - z}{x} \end{aligned}$$

### 8.2.6 Substitution

Jetzt noch zwei Fallstudien aus Staatsexamensaufgaben mit anderen Substitutionen, merkwürdigerweise beide vom Frühjahr 93:

Damals war in T 1, A 6 die Differentialgleichung

$$(4y + 2xy) \cdot y' = y^2 - 1$$

zu behandeln. Die linke Seite der Gleichung ist auf den ersten Blick unverdaulich, aber auf der rechten Seite bleibt der Blick am  $y^2$  hängen. Das widersetzt sich jeder linearen Theorie. Sollte man es wegsostituieren, etwa

$$z = y^2$$

setzen? Ja! Denn links kann man  $2y$  ausklammern und die Gleichung

$$(2 + x) \cdot 2yy' = (2 + x)(y^2)' = (2 + x)z' = z - 1$$

schreiben. Dann wird daraus die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$z' = \frac{z - 1}{2 + x}.$$

Hier bietet es sich an, statt der allgemeinen Theorie auf die zweite Substitution  $u = z - 1$  zurückzugreifen, und die Gleichung in die Form

$$u' = \frac{u}{2 + x}$$

zu bringen. Wir trennen die Variablen

$$\frac{u'}{u} = \frac{1}{2 + x}, \quad \ln|u| = \ln|2 + x| + c', \quad u = c \cdot (2 + x).$$

Jetzt machen wir noch die Substitutionen rückgängig:

$$z = 1 + c(2 + x), \quad y = \sqrt{1 + c(2 + x)}.$$

Wo die erhaltenen Lösungen existieren, das wird auf einem anderen Blatt stehen.

In T 2, A 5 war damals die Gleichung

$$y'(x) \cdot \sin(x) + y(x) \cdot \cos(x) = \sin(x) + x \cdot \cos(x)$$

vorgelegt. Scheußlich, was ist zu tun? Kein Hinweis, die Zeit verrinnt, irgendwas ist aber doch komisch: so viele Winkelfunktionen, wo eine die Ableitung der anderen ist. Das ist der Schlüssel! Die linke Seite ist die Ableitung

$$(y(x) \cdot \sin(x))' = y'(x) \cdot \sin(x) + y(x) \cdot \cos(x).$$

Was passiert, wenn wir

$$z(x) = y(x) \cdot \sin(x)$$

substituieren? Etwas sehr erleichterndes: Die Differentialgleichung wird

$$z' = \sin(x) + x \cdot \cos(x) = (x \cdot \sin(x))'.$$

Nach einer Integration erhalten wir

$$z(x) = x \cdot \sin(x) + c, \quad y(x) = x + \frac{c}{\sin(x)}.$$

So, das war das wesentlichste über Substitutionen.

**Aufgabe 8.3** Lösen Sie die Differentialgleichungen

a)  $y'(x) = \exp(2x - y(x)),$

b)  $y' = 2xy^2,$

c)  $y' \cdot \cos(x) - 2y \cdot \sin(x) = x, \quad x \in ] - \pi/2, \pi/2[,$

d)  $xy' + (x - 1)(1 + y^2) = 0.$

**Aufgabe 8.4** Seien  $K, r, s$  Konstanten. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) - s \cdot y(t) = K \cdot e^{rt}.$$

**Aufgabe 8.5** Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'x^2 + 2xy = \ln(x) \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

**Aufgabe 8.6** Lösen Sie die Differentialgleichungen

$$\text{a) } y' = -4y + x^2, \quad \text{b) } y' = 2xy + x^4, \quad \text{c) } y' = \cos(x) \cdot e^y, \quad \text{d) } y' = \frac{xy - 1}{1 - x^2}.$$

**Aufgabe 8.7** Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{x^2}{y(1 + x^3)}, \quad x > 1, \quad y > 0$$

mit  $y(0) = 1$  und bestimmen Sie das maximale Lösungsintervall.

**Aufgabe 8.8** Von einem Sparbuch, das mit  $p = 3\%$  pro Jahr verzinst wird, hebt der Besitzer pro Jahr einen konstanten Geldbetrag  $\delta$  Euro ab. Die Höhe des Sparguthabens nach  $t$  Jahren wird näherungsweise durch die Lösung  $y(t)$  der Anfangswertaufgabe

$$y' = py - \delta, \quad y(0) = B,$$

beschrieben, wenn das Startkapital  $B$  Euro zum Zeitpunkt  $t = 0$  beträgt. Wie groß muss  $\delta$  gewählt werden, damit  $y(20) = 0$  bei  $B = 100000$  gilt?

**Aufgabe 8.9** Lösen Sie die Differentialgleichungen

$$\text{a) } y' = \frac{x}{y}, \quad \text{b) } y' = \frac{3x^2}{2y^3}, \quad \text{c) } y' = \frac{1 + y + y^2}{x(x^2 - 4)}.$$

**Aufgabe 8.10** Lösen Sie die Bernoullischen Differentialgleichungen

$$\text{a) } y' = y^r \text{ für } r = 1/2, 1/3, 2/3, \quad \text{b) } y' = x \cdot y^{2/3}, \quad \text{c) } y' = x(x^2 - 1) \cdot y^{2/3}.$$

**Aufgabe 8.11** Lösen Sie die homogenen Differentialgleichungen

$$\text{a) } y' = \frac{y}{x} - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}, \quad \text{b) } y' = \frac{x^3 - y^3}{xy^2},$$

**Aufgabe 8.12** Verwandeln Sie mit einer Transformation  $x = u + a$ ,  $y = v + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  die Differentialgleichung

$$y' = \frac{x - 2y + 1}{2x - y + 1}$$

in eine homogene Differentialgleichung.

### 8.3 Theorie: Existenz und Eindeutigkeit

Im letzten Paragraphen, haben wir Methoden kennen gelernt, mit denen man explizite Differentialgleichungen erster Ordnung (manchmal) lösen kann. D. h., es waren Methoden, um Lösungen zu finden. In diesem Paragraphen wollen wir uns darum kümmern, ob es immer Lösungen gibt, und wieviele es gibt.

**Satz 8.2 (Existenz-Satz von Peano)** Die Funktion  $F : G \rightarrow \mathbb{R}^2$  sei stetig auf der offenen Menge  $G \subset \mathbb{R}^2$ . Dann gibt es zu jedem Punkt  $(x_0, y_0) \in G$  eine lokale Lösung der Differentialgleichung

$$y' = F(x, y).$$

D.h., es gibt ein  $\epsilon > 0$  und eine differenzierbare Funktion

$$f : ]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[ \rightarrow \mathbb{R}$$

mit:

- (i) für alle  $x \in ]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$  ist  $(x, f(x)) \in G$ ,
- (ii) für alle  $x \in ]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$  ist  $f'(x) = F(x, f(x))$ .

Diesen Satz wollen wir hier nicht beweisen. Er wird weder im Forster, noch im Erwe bewiesen. Einen Beweis findet man etwa im Kamke.

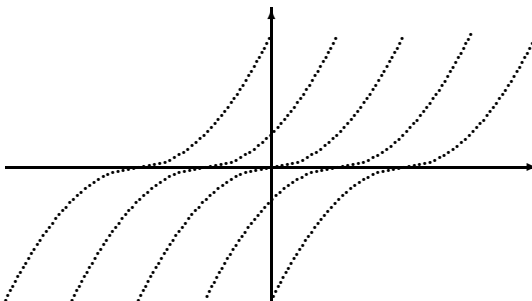
Dieser Satz sagt also: Wenn die rechte Seite  $F(x, y)$  stetig ist, dann existieren (lokale) Lösungen der Differentialgleichung  $y' = F(x, y)$ . Aber es gilt keine Eindeutigkeit: durch einen Punkt  $(x_0, y_0) \in G$  können mehrere Lösungen gehen. Ein Beispiel dafür ist die Differentialgleichung

$$y' = 3 \cdot y^{2/3}.$$

Die rechte Seite  $F(x, y) = 3y^{2/3}$  ist für alle  $(x, y) \in G := \mathbb{R}^2$  definiert und stetig. Wir lösen die Differentialgleichung nach dem Schema 'Trennung der Variablen':

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot y^{-\frac{2}{3}} y' &= 1 \\ y^{\frac{1}{3}} &= x + c \\ y &= (x + c)^3. \end{aligned}$$

Als Lösungen erhalten wir kubische Parabeln  $y = x^3$ , auf der  $x$ -Achse etwas hin- und her-verschoben, mit der Translationskonstante  $c \in \mathbb{R}$ . Das sieht doch ganz ordentlich aus:



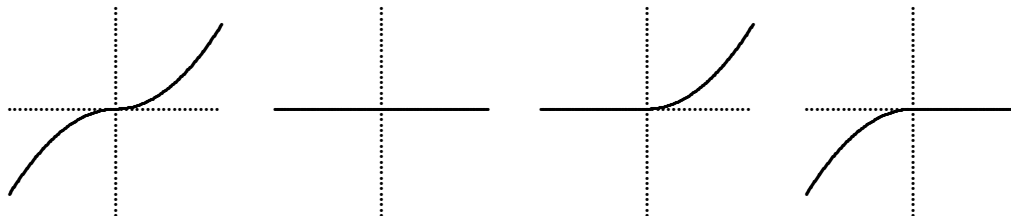
Aber! Durch den Nullpunkt gibt es die beiden verschiedenen Lösungen

$$y = x^3 \quad \text{und} \quad y \equiv 0$$

der Differentialgleichung. Noch schlimmer: Auch die beiden Funktionen

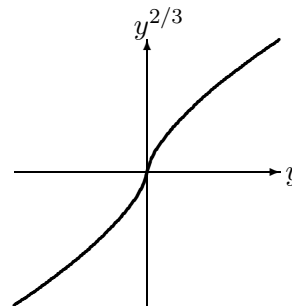
$$y = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x^3 & (x \geq 0) \end{cases} \quad \text{und} \quad y = \begin{cases} x^3 & (x \leq 0) \\ 0 & (x \geq 0) \end{cases}$$

sind differenzierbar, und lösen die Differentialgleichung.



Und noch viel schlimmer: Man kann noch viel mehr Funktionen aus Stücken von verschobenen kubischen Parabeln  $y = (x - c)^3$  und der  $x$ -Achse im Punkt  $(c, 0)$  zusammensetzen, die differenzierbar sind, und die Differentialgleichung lösen. Daraus lernen wir: Wenn man für die rechte Seite  $F(x, y)$  nur die Stetigkeit voraussetzt, gibt es zwar durch jeden Punkt der Definitionsmenge von  $F$  Lösungen, aber i.A. mehr als eine.

Woran liegt das im Fall  $F(x, y) = y^{2/3}$ ? Beim kritischen Wert  $y = 0$  ist die Funktion  $y^{2/3}$  zwar stetig, aber sie hat die Steigung  $\infty$ . Oder anders ausgedrückt: Bei einer winzigen Veränderung von  $y$  ändert sich  $F$  in diesem Bereich sehr merklich. Die folgende Anforderung an die Funktion  $F$  schließt so etwas aus:



**Definition 8.4** Eine Funktion  $F : G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G \subset \mathbb{R}^2$ , genügt auf  $G$  einer Lipschitz-Bedingung, wenn es eine Konstante  $0 < L \in \mathbb{R}$  gibt, so, dass für alle  $(x, y_1)$  und  $(x, y_2) \in G$  gilt:

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|.$$

Eine Konstante  $L$  mit dieser Eigenschaft heißt Lipschitz-Konstante.

Ist  $F$  partiell nach  $y$  differenzierbar, so folgt aus einer Lipschitz-Bedingung mit der Konstanten  $L$

$$\left| \frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0) \right| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x, y) - F(x, y_0)}{y - y_0} \right| \leq L.$$

Die Lipschitz-Konstante schränkt also  $\partial F / \partial y$  ein und hindert diese partielle Ableitung daran, nach unendlich zu gehen, wie es bei der Funktion

$$F(x, y) = 3y^{2/3}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}$$

in der Nähe der  $y$ -Achse der Fall ist.



**Satz 8.3 (Lokale Lipschitz-Bedingung)** Die Funktion  $F : G \rightarrow \mathbb{R}$  auf der offenen Menge  $G \subset \mathbb{R}^2$  sei stetig partiell nach  $y$  differenzierbar. Dann genügt  $F$  auf  $G$  lokal einer Lipschitz-Bedingung. D.h., zu jedem Punkt  $(x_0, y_0) \in G$  gibt es ein Quadrat

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq \epsilon, |y - y_0| \leq \epsilon\} \subset G, \quad \epsilon > 0,$$

und eine Konstante  $L$  so, dass für alle  $(x, y_1)$  und  $(x, y_2) \in Q$  gilt:

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|.$$

Beweis. Da  $G$  offen ist, gibt es zu jedem Punkt  $(x_0, y_0)$  ein Quadrat  $Q$  wie in der Behauptung, das noch ganz in  $G$  enthalten ist.  $Q$  ist kompakt und  $\partial F/\partial y$  ist stetig vorausgesetzt, also ist  $\partial F/\partial y$  auf  $Q$  beschränkt, etwa  $|\partial F/\partial y| \leq L$ . Aus dem MWS der Differentialrechnung folgt

$$F(x, y_1) - F(x, y_2) = (y_1 - y_2) \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(x, \eta)$$

mit  $\eta$  zwischen  $y_1$  und  $y_2$ . Für  $(x, y_1)$  und  $(x, y_2) \in Q$  ist also auch  $(x, \eta) \in Q$ . Deswegen ist

$$\left| \frac{\partial F}{\partial y}(x, \eta) \right| \leq L$$

und

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|.$$

□

**Satz 8.4 (Existenz- und Eindeutigkeitsatz von Picard - Lindelöf)** Die Funktion  $F : G \rightarrow \mathbb{R}$  genüge auf der offenen Menge  $G \subset \mathbb{R}^2$  lokal einer Lipschitz-Bedingung. Dann gibt es durch jeden Punkt  $(x_0, y_0) \in G$  lokal eine Lösung  $y(x)$  der Differentialgleichung

$$y' = F(x, y),$$

und diese ist durch  $(x_0, y_0)$  eindeutig bestimmt.

Die Behauptung bedeutet: Es gibt ein  $\epsilon > 0$  und eine differenzierbare Funktion  $f(x)$  auf einem Intervall  $]x - \epsilon, x + \epsilon[$  so, dass für alle  $x$  in diesem Intervall gilt:

$$(x, f(x)) \in G, \quad f'(x) = F(x, f(x)), \quad f(x_0) = y_0.$$

Und falls  $g$  eine andere Funktion mit diesen Eigenschaften ist, so gilt  $f(x) = g(x)$  für alle  $x \in ]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$ .

Aus einer lokalen Lipschitz-Bedingung für die Funktion  $F(x, y)$  folgt die Stetigkeit dieser Funktion. Die Existenz-Aussage im Satz von Picard-Lindelöf folgt also aus dem Satz von Peano. Das Wesentliche beim Picard-Lindelöf ist deswegen die Eindeutigkeitsaussage. Und wesentlich ist auch die Beweis-Methode. Denn man kann sie benützen, um konkret Lösungen zu ermitteln. Diese Beweismethode besteht darin, die Differentialgleichung  $y' = F(x, y)$  in eine Integralgleichung umzuschreiben:

$$y(x) = \int_{x_0}^x F(t, y(t)) dt + C.$$

Eine Funktion  $y = f(x)$ , welche diese Integralgleichung löst, ist auch Lösung der Differentialgleichung  $y' = F(x, y)$  (Differentiation des Integrals nach seiner oberen Grenze). Und wenn man noch  $C := y_0$  wählt, so ist

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} F(t, y(t)) dt = y_0.$$

Die Lösung geht also durch den Punkt  $(x_0, y_0)$ .

Beweis des Eindeutigkeits-Teils: Sind  $f$  und  $g$  zwei differenzierbare Funktionen, die auf einem Intervall  $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$  obige Integralgleichung erfüllen, so folgt für alle  $x$  in diesem Intervall

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &= \left| \int_{x_0}^x (F(t, f(t)) - F(t, g(t))) dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |F(t, f(t)) - F(t, g(t))| dt \right| \\ &\leq L \cdot \left| \int_{x_0}^x |f(t) - g(t)| dt \right| \end{aligned}$$

und daraus für

$$M = M(\epsilon) := \max_{|x-x_0| \leq \epsilon} |f(x) - g(x)|$$

die Bedingung

$$M \leq L \cdot |x - x_0| \cdot M \leq L \cdot \epsilon \cdot M.$$

Jetzt lässt man  $\epsilon$  gegen 0 gehen. In dem Moment, wo  $\epsilon < 1/L$  wird, hat man einen Widerspruch, außer es ist  $M = 0$ , d.h.,  $f \equiv g$  auf dem Intervall  $]x - 1/L, x + 1/L[$ . Auf einem ganz kleinen Intervall um  $x_0$  herum stimmen also beide Funktionen  $f$  und  $g$  überein! Jetzt wiederholt man diese Betrachtung, wobei man statt  $x_0$  einen der Endpunkte dieses kleinen Intervalls nimmt. Dann kriegt man schon ein größeres Intervall, auf dem  $f$  und  $g$  übereinstimmen. Und so hangelt man sich halt durch das ganze Intervall  $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$  durch:

Man definiert formal eine 'rechte Eindeutigkeitsmenge'

$$E_r := \{x \in [x_0, x_0 + \alpha[ : f(t) = g(t) \text{ für alle } x_0 \leq t \leq x\}$$

und setzt  $\xi := \sup(E_r)$ . Dann ist also  $f(t) = g(t)$  für alle  $x_0 \leq t \leq \xi$ . Wenn  $\xi = x_0 + \alpha$  ist, dann sind wir (rechts von  $x_0$ ) fertig. Wenn aber  $\xi < x_0 + \alpha$  sein sollte, können wir uns wie oben ein ganz kleines Stück weiter nach rechts hangeln, und hätten einen Widerspruch.

Nach links geht der Beweis ganz analog.

Den *Existenz*-Teil möchte ich hier nicht beweisen, sondern nur motivieren. Die Idee ist, die Lösung iterativ anzunähern. Dazu beginnen wir mit der Konstanten  $f_0(x) \equiv y_0$ . Die ist wahrscheinlich meilenweit davon entfernt, die Integralgleichung zu lösen. Aber die Bedingung  $f_0(x_0) = y_0$  erfüllt sie sehr schön. Und dann definieren wir  $f_1$  durch die Integralgleichung:

$$f_1(x) := y_0 + \int_{x_0}^x F(t, f_0(t)) dt.$$

Auch  $f_1$  ist wahrscheinlich keine Lösung der Integralgleichung, hat aber immer noch die Eigenschaft  $f_1(x_0) = y_0$ . Und so macht man sukzessive weiter:

$$f_k(x) := y_0 + \int_{x_0}^x F(t, f_{k-1}(t)) dt.$$

Mit der Lipschitz-Bedingung zeigt man nun zweierlei:

- 1) Ist  $\epsilon$  klein genug, so liegen alle Punkt  $(x, f_k(x))$  mit  $|x - x_0| \leq \epsilon$  wieder in  $G$ . Man kann sie in  $F$  einsetzen, und die Iteration fortführen.
- 2) Die Funktionenfolge  $f_k$  konvergiert gegen eine stetige Grenzfunktion  $f$ . Diese erfüllt dann die Integralgleichung

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F(t, f(t))dt.$$

Deswegen ist sie eine Lösung der Differentialgleichung mit  $f(x_0) = y_0$ .

Die Details sind technisch-trübe, und im Forster II nachzulesen. Wir wollen sie uns hier ersparen. Stattdessen möchte ich ein Beispiel durchrechnen (Forster II (10.2), Kamke Nr. 32). Schauen wir uns mal die homogene lineare Differentialgleichung

$$y' = 2x \cdot y$$

an. Bestimmen wir mit dem Näherungsverfahren von Picard-Lindelöf die Lösung  $y(x)$  mit  $y(0) = c$ . Es ist also  $y_0 \equiv c$ . Und die Integralgleichung für die sukzessive Bestimmung der Näherungen  $y_k$  ist

$$y_k(x) = c + \int_0^x 2t \cdot y_{k-1}(t)dt.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} y_1(x) &= c + \int_0^x 2t \cdot c dt \\ &= c \cdot (1 + x^2), \\ y_2(x) &= c + c \cdot \int_0^x 2t \cdot (1 + t^2) dt \\ &= c \cdot (1 + x^2 + \frac{x^4}{2}), \\ y_3(x) &= c + c \cdot \int_0^x 2t \cdot (1 + t^2 + \frac{t^4}{2}) dt \\ &= c \cdot (1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}), \\ &\vdots \\ y_k(x) &= c \cdot (1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \dots + \frac{x^{2k}}{k!}) \\ &= c \cdot \sum_{\nu=0}^k \frac{x^{2\nu}}{\nu!}. \end{aligned}$$

Und die Grenzfunktion, die Lösung der Differentialgleichung, ist

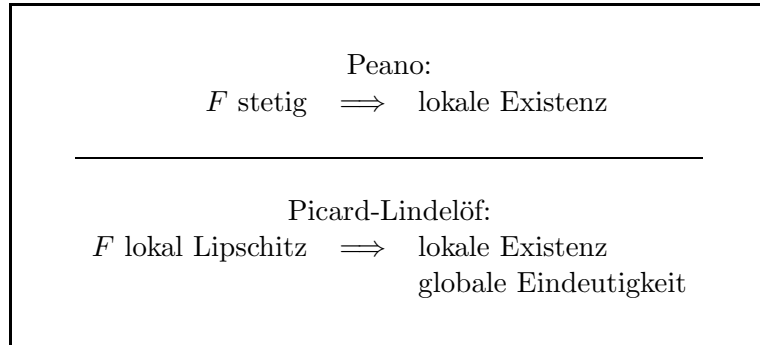
$$y(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k(x) = c \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{2\nu}}{\nu!} = c \cdot e^{2x}.$$

Man kann also das Näherungsverfahren manchmal auch zur expliziten Lösung der Differentialgleichung brauchen.

Ich möchte versuchen, die bisher skizzierte Theorie etwas plakativ zusammenzufassen: Für eine *explizite Differentialgleichung erster Ordnung*

$$y' = F(x, y)$$

sagen



Was heißt eigentlich *lokale Existenz*? Heißt das, die Mathematiker bringen halt nichts globales, oder liegt es in der Natur der Sache? Dumme Frage, letzteres natürlich. Sehen wir uns als Beispiel mal die Differentialgleichung

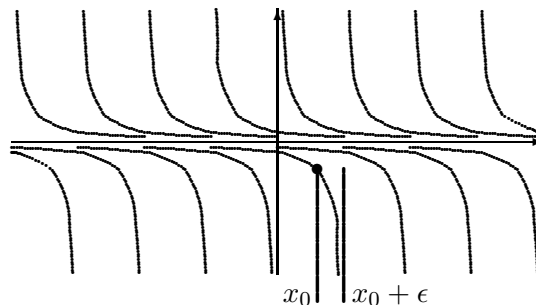
$$y' = -y^2$$

an. Sie ist nicht-linear, aber lokal Lipschitz, weil  $F(x, y) := y^2$  nach  $y$  stetig partiell differenzierbar ist. Aber die partielle Ableitung  $\partial F / \partial y = -2y$  wird für große  $|y|$  selbst auch dem Betrage nach sehr groß. Dort wird dann die lokale Lipschitz-Konstante  $L$  auch immer größer. Und je größer die Lipschitz-Konstante  $L$ , desto weniger Kontrolle hat man über die Lösung.

Was sind die Lösungen? Etwa mit der Trennung der Variablen findet man

$$y(x) = \frac{1}{x + c}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Die Lösungskurven sehen so aus:



In der Tat, je größer die  $y$ -Werte auf einer Lösungskurve, desto zielstrebiger strebt sie nach unendlich. Und wenn sie dort ist, dann existiert sie natürlich nicht mehr. Deswegen gibt es für jeden Punkt  $(x_0, y_0)$  mit  $y_0 \neq 0$  eben nur ein Intervall, auf dem die Lösungsfunktion  $y(x)$  mit  $y(x_0) = y_0$  existiert. Dieses Intervall ist in unserem Beispiel auf der einen Seite zwar unendlich, auf der anderen aber begrenzt.

Und was heißt *globale Eindeutigkeit*? Das heißt, wenn zwei Lösungen

$$y_1 : ]a_1, b_1[ \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad y_2 : ]a_2, b_2[ \rightarrow \mathbb{R}$$

in einem Punkt

$$x_0 \in ]a_1, b_1[ \cap ]a_2, b_2[$$

denselben Wert haben, dann stimmen sie überein, soweit sie existieren, echt global halt! Dann haben sie in Wirklichkeit auch keine verschiedenen Existenz-Intervalle, sondern existieren auf dem Intervall  $]a_1, b_1[ \cup ]a_2, b_2[$ .

Für das Angeben von Lösungen, die durch einen festen Punkt gehen, hat man noch eine eigene Redewendung geprägt, weil das halt in der Praxis so eine wichtige Frage ist:

**Definition 8.5** *Eine Funktion  $y(x)$  heißt Lösung des Anfangs-Wert-Problems (AWP)*

$$y' = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

wenn  $y(x)$  eine Lösung der Differentialgleichung  $y' = F(x, y)$  ist und im Punkt  $x_0$  den Wert  $y_0$  hat.

Für homogene lineare Differentialgleichungen

$$y' = a(x) \cdot y, \quad a : ]\alpha, \beta[ \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig,}$$

gilt ein verschärfter Existenzsatz.

**Satz 8.5** *Jede Lösung  $y = f(x)$  der obigen linearen homogenen Differentialgleichung existiert auf dem ganzen Definitions-Intervall  $] \alpha, \beta [$  der Koeffizientenfunktion  $a(x)$ .*

Beweis. Sei  $y = f(x)$  eine Lösung der Differentialgleichung, definiert auf einem Teilintervall von  $] \alpha, \beta [$ . Wir fixieren einen Punkt  $x_0$  in diesem Intervall und setzen  $y_0 := f(x_0)$ . Nun haben wir in 8.2 Lösungen der Form

$$y = c \cdot e^{A(x)}, \quad A(x) = \int a(x) dx, \quad c \in \mathbb{R},$$

definiert auf dem ganzen Existenz-Intervall von  $a(x)$ , gefunden. Wählen wir die Konstante

$$c := \frac{y_0}{e^{A(x_0)}},$$

so hat diese Lösung in  $x_0$  den Wert  $y_0 = f(x_0)$ .

Es ist klar, dass die Funktion  $F(x, y) = a(x) \cdot y$  lokal Lipschitz ist, denn sie ist partiell nach  $y$  differenzierbar mit der stetigen partiellen Ableitung

$$\frac{\partial F}{\partial y} = a.$$

Wegen der globalen Eindeutigkeit nach Picard-Lindelöf stimmt sie mit der Lösung  $y$  global überein, also gilt

$$f(x) = c \cdot e^{A(x)}$$

auf dem ganzen Existenz-Intervall von  $f$ . Und wir können die Lösung  $y = f(x)$  auf das ganze Intervall  $]\alpha, \beta[$  fortsetzen, indem wir  $f(x) := c \cdot e^{A(x)}$  setzen.  $\square$

Weil auch für lineare Differentialgleichungen der globale Eindeutigkeits-Satz gilt, stimmen zwei Lösungen  $y_1$  und  $y_2$  auf dem ganzen Existenz-Intervall  $]\alpha, \beta[$  überein, wenn sie nur in einem Punkt  $x_0$  dieses Intervalls denselben Wert haben. Nehmen wir  $c_0 = 0$  als diesen Wert, so sehen wir:

*Hat eine Lösung  $y(x)$  der homogenen linearen Differentialgleichung  $y' = a(x) \cdot y$  eine Nullstelle, so ist sie identisch  $= 0$ .*

In der Tat, die Null-Funktion  $y_2(x) \equiv 0$  ist ja auch eine Lösung, sie stimmt mit  $y$  in einem Punkt überein, dann auch auf dem ganzen Intervall.

Wir können dies auch so sagen:

*Hat eine Lösung  $y(x)$  der homogenen linearen Differentialgleichung in einem Punkt  $x_0$  einen Wert  $y(x_0) \neq 0$ , so hat sie keine Nullstellen.*

Damit können wir jetzt eine Frage entscheiden, die in 8.2 offen geblieben war: die Differentialgleichung  $y' = a(x) \cdot y$  zu lösen bedeutet, alle ihre Lösungen anzugeben. Wir haben nur die Lösungen

$$y(x) = c \cdot e^{A(x)}, \quad c \in \mathbb{R},$$

angegeben. Aber das sind alle. Denn ist  $y(x)$  irgend eine Lösung, so fixieren wir  $x_0$ , setzen wie oben  $c_0 := y(x_0)/e^{A(x_0)}$ , und haben eine Lösung  $y_2(x) = c_0 \cdot e^{A(x)}$ , welche in  $x_0$  mit  $y(x)$  übereinstimmt. Dann ist identisch

$$y(x) \equiv y_2(x) = c_0 \cdot e^{A(x)}.$$

Also ist auch die Lösung  $y(x)$  von der speziellen Form  $c \cdot e^{A(x)}$ .

Das kann man noch etwas wissenschaftlicher ausdrücken:

*Die Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung  $y' = a(x) \cdot y$  bilden einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.* In der Tat, mit  $y_1(x)$  ist auch jede Funktion  $c \cdot y_1(x)$  eine Lösung, und mit  $y_1(x)$  und  $y_2(x)$  ist auch  $y_1(x) + y_2(x)$  eine Lösung.

Genau wie in der Linearen Algebra bei linearen Gleichungs-Systemen nennt man auch hier die Menge aller Lösungen den *Lösungsraum*.

*Der Lösungsraum einer homogenen linearen Differentialgleichung  $y' = a(x) \cdot y$  hat Dimension  $= 1$ .* In der Tat, fixieren wir wieder einmal einen festen Punkt  $x_0$  im Definitions-Intervall der Koeffizientenfunktion  $a(x)$  und betrachten die Abbildung

$$y(x) \mapsto y(x_0), \quad \text{Lösungsraum} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Diese Abbildung ist offenbar  $\mathbb{R}$ -linear. Weil jedes AWP mit einem Anfangswert  $(x_0, y_0)$  lösbar ist (man wähle die Konstante  $c$  geeignet), ist diese Abbildung surjektiv. Wegen der globalen Eindeutigkeit ist sie auch injektiv, also ein Vektorraum-Isomorphismus.

Das AWP mit einem Anfangswert  $(x_0, y_0)$  stellt sich nun als die Aufgabe dar, ein Urbild von  $y_0$  unter der obigen linearen Abbildung

$$\text{Lösungsraum} \rightarrow \mathbb{R}$$

anzugeben.

Übrigens kommt auch jeder eindimensionale Vektorraum von reellen, differenzierbaren Funktionen als Lösungsraum einer linearen homogenen Differentialgleichung vor, falls es darin eine Funktion ohne Nullstellen gibt:

**Satz 8.6** *Es sei  $V$  ein ein-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum von stetig differenzierbaren Funktionen auf einem Intervall  $]\alpha, \beta[ \subset \mathbb{R}$ . Es gebe eine Funktion  $f \in V$  ohne Nullstelle. Dann gibt es eine stetige Funktion  $a : ]\alpha, \beta[ \rightarrow \mathbb{R}$  derart, dass  $V$  der Lösungsraum der Differentialgleichung*

$$y' = a(x) \cdot y$$

*ist.*

Beweis. Sei  $f \in V$  eine solche Funktion ohne Nullstelle. dann ist sie natürlich nicht der Nullvektor in  $V$ , denn dieser ist die Null-Funktion. Also erzeugt  $f$  den ein-dimensionalen Vektorraum  $V$ , d.h., jede Funktion  $g \in V$  hat die Form  $g = c \cdot f$ .

Die Funktion  $a := f'/f$  ist stetig, weil  $f$  stetig differenzierbar ist und keine Nullstelle hat. Die Gleichung

$$f' = a(x) \cdot f$$

ist offensichtlich erfüllt. Dann gilt auch für alle  $g \in V$

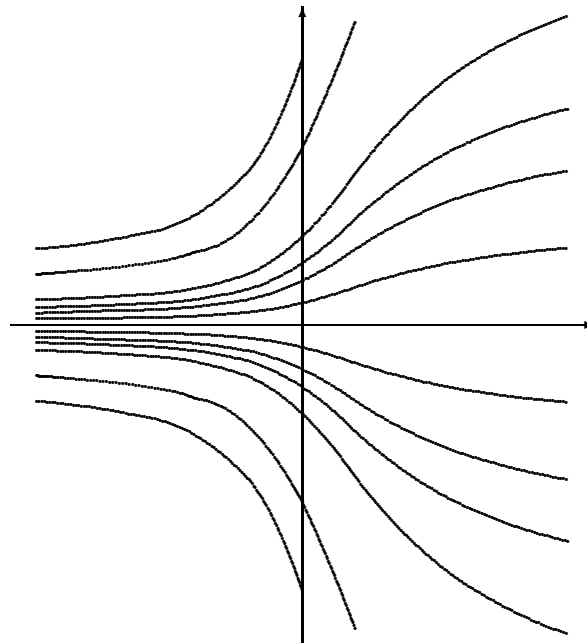
$$g' = c \cdot f' = a(x) \cdot cf = a(x) \cdot g.$$

□

Ich habe mal für die Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{1+x^2} \cdot y$$

mit den Lösungen  $y = c \cdot e^{\arctan(x)}$  einige Lösungskurven geplottet:



Dies ist das typische Bild eines Lösungsraumes einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung.

**Aufgabe 8.13** Gegeben Sei die Differentialgleichung

$$(D) \quad y'(x) = \cos \left[ \frac{\pi}{2} (y(x))^2 \right], \quad x \in \mathbb{R}.$$

- a) Man zeige, dass  $y(x) := 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  eine Lösung von (D) mit  $y(1) = 1$  ist.  
b) Man zeige mit Hilfe des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes (ohne explizite Berechnung der Lösung!), dass für jede Lösung  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der Differentialgleichung (D) mit  $\varphi(0) = 0$  gilt:  $\varphi(x) < 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . (Hinweis: Widerspruchsbeweis führen!)

**Aufgabe 8.14** Bestimmen Sie eine Lösung  $y : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  der Differentialgleichung

$$y'x^2 + 2xy = \ln x \quad (x \in \mathbb{R}_+)$$

mit  $y(1) = 2$ .

**Aufgabe 8.15** Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$xy' + (x-1)(1+y^2) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Berechnen Sie eine Lösung dieses Problems und zeigen Sie, dass diese Lösung nicht auf das Intervall  $]0, \infty[$  fortsetzbar ist.

**Aufgabe 8.16** Bestimmen Sie die Lösung  $y : ]-2, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto y(x)$ , des Anfangswertproblems  $(4y + 2xy) \cdot y' = y^2 - 1$ ,  $y(1) = 2$ .

**Aufgabe 8.17** Man löse das Anfangswertproblem  $y' = 2xy^2$  mit  $y(1) = a$  in den Fällen  $a = 1/2$  und  $a = -1/2$  und bestimme jeweils das maximale Definitionsintervall der Lösung.

**Aufgabe 8.18** Gegeben sei ein eindimensionaler Vektorraum  $V$  von auf einem Intervall  $]\alpha, \beta[ \subset \mathbb{R}$  differenzierbaren Funktionen, der Funktionen ohne Nullstellen enthält, sowie eine differenzierbare Funktion  $g : ]\alpha, \beta[ \rightarrow \mathbb{R}$ . Zeigen Sie: Es gibt eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung auf  $]\alpha, \beta[$ , deren Lösungen genau die Funktionen  $f + g$ ,  $f \in V$  sind.

**Aufgabe 8.19** Bestimmen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

- a)  $y' = \frac{3y+2x}{x}$  ( $x > 0$ ) mit  $y(1) = 0$ ,  
b)  $y' = \frac{1}{1+x^2} \cdot (y^2 + 1)$ ,  $y(0) = 0$ ,  
c)  $y' = \sqrt{xy}$ ,  $x > 0, y > 0$ ,  $y(1) = 1$ ,  
d)  $y' = \frac{1}{x-2}y + x^2 - 2x$ ,  $x < 2$ , mit  $y(1) = \frac{3}{2}$ ,  
e)  $y' = \frac{1}{x}y^2$ ,  $x > 0$ ,  $y(1) = 1$ ,  
f)  $y' = -e^x \cdot y$ ,  $y(0) = -1$ .



**Aufgabe 8.20** Bestimmen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems,

$$y' = (x + y)^2, \quad y(0) = 0,$$

indem Sie  $u(x) = x + y(x)$  substituieren.

**Aufgabe 8.21** Zu bestimmen ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{1}{2} \left( y^2 + \frac{1}{x^2} \right) \quad \text{mit} \quad y(1) = 0.$$

a) Eine offensichtliche Lösung ist  $y = -1/x$ . Sie erfüllt aber nicht die Anfangsbedingung  $y(1) = 0$ . Zeigen Sie: Durch die Substitution

$$y(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{u(x)}$$

geht die Differentialgleichung über in

$$u' = \frac{1}{x} \cdot u - \frac{1}{2}.$$

b) Bestimmen Sie mittels a) die Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems.

**Aufgabe 8.22** Bestimmen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = y^3 - \frac{y}{x}, \quad x > 0, \quad y(1) = \frac{1}{2},$$

indem Sie  $z = 1/y^2$  substituieren.

## 8.4 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Hier betrachten wir also Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$f'' + a_1 f' + a_0 f = b(x)$$

mit konstanten Koeffizienten  $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ . Zunächst behandeln wir, wie immer, den homogenen Fall  $b(x) \equiv 0$ .

Das Zauberwort ist hier: Der e-hoch-Ansatz. Wir setzen an

$$f(x) := e^{\lambda x}.$$

Dann ist also

$$f' = \lambda e^{\lambda x}, \quad f'' = \lambda^2 e^{\lambda x}.$$

Und die homogene Differentialgleichung für  $f = e^{\lambda x}$  lautet

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0.$$

Wenn man hier  $e^{\lambda x}$  ausklammert, und anschließend durch diese Funktion dividiert, stößt man auf die Gleichung

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Das ist eine quadratische Gleichung für  $\lambda$ . Sie hat genau die gleichen Koeffizienten, wie die ursprüngliche Differentialgleichung. Das Polynom auf der linken Seite heißt das *charakteristische Polynom* der Differentialgleichung.

Und wenn  $\lambda$  eine Lösung dieser Polynomgleichung ist, dann ist die Funktion  $e^{\lambda x}$  eine Lösung der Differentialgleichung. Für diejenigen, die das nicht glauben, ein Beispiel:

**Beispiel 8.10**

$$f'' + 2f' - 3f = 0$$

Die Polynomgleichung für  $\lambda$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

hat die Lösungen  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = -3$ . Also sind

$$y_1(x) = e^x \quad \text{und} \quad y_2(x) = e^{-3x}$$

Lösungen der Differentialgleichung. Das kann man leicht nachprüfen.

Es ist klar, dass die Lösungen der linearen Differentialgleichung, die wir betrachten, einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum bilden. Im letzten Beispiel enthält dieser Lösungsraum alle Funktionen

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = c_1e^x + c_2e^{-3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Deswegen hat dieser Lösungsraum mindestens die Dimension 2. Das folgt aus dem Satz:

**Satz 8.7** *Es seien  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  zwei verschiedene reelle Zahlen. Dann sind die Funktionen*

$$e^{\lambda_1 x} \quad \text{und} \quad e^{\lambda_2 x}$$

*linear unabhängig.*

Beweis. Zum Test auf lineare Unabhängigkeit nehmen wir an, es gebe zwei reelle Koeffizienten  $c_1, c_2$  so, dass

$$c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 x} \equiv 0$$

die Nullfunktion ist. Diese Gleichung dividieren wir durch  $e^{\lambda_1 x}$  und erhalten

$$c_1 + c_2 \cdot e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} \equiv 0.$$

Wenn wir diese Gleichung differenzieren, fliegt  $c_1$  raus und wir finden

$$c_2 \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} \equiv 0.$$

Dies Gleichung können wir z.B. in  $x = 0$  auswerten:

$$c_2 \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \equiv 0.$$

Wegen  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  erhalten wir daraus  $c_2 = 0$ . Und analog hätten wir auch  $c_1 = 0$  zeigen können. □

Die entscheidende Frage ist jetzt: Wie groß ist der Lösungsraum unserer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, d.h., was ist seine Dimension? Hierzu:

**Satz 8.8** Es sei  $f : ]\alpha, \beta[ \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung der Differentialgleichung

$$f'' + a_1 \cdot f' + a_0 \cdot f = 0.$$

Dann gilt:

- a) Die Funktion  $f$  ist beliebig oft differenzierbar.
- b) Die Taylor-Reihe  $T_f(x)$  von  $f$  bezüglich eines jeden Punktes  $x_0 \in ]\alpha, \beta[$  konvergiert auf ganz  $\mathbb{R}$ .
- c) Die Funktion  $f$  stimmt auf ihrem ganzen Definitions-Intervall mit der Taylor-Reihe  $T_f(x)$  überein, ist also auf ganz  $\mathbb{R}$  fortsetzbar.
- d) Die fortgesetzte Funktion ist auf ganz  $\mathbb{R}$  eine Lösung der Differentialgleichung.

Beweis a) Damit die Differentialgleichung überhaupt sinnvoll ist, muss  $f$  zweimal differenzierbar sein. Wir schreiben die Gleichung um

$$f'' = -a_1 f' - a_0 f$$

und sehen: auch  $f''$  ist differenzierbar. Also ist  $f$  mindestens dreimal differenzierbar. Wir differenzieren die letzte Gleichung

$$f''' = -a_1 f'' - a_0 f'$$

und sehen: auch  $f'''$  ist wieder differenzierbar. Die Behauptung folgt durch Induktion.

b) Die Taylor-Reihe ist

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Wir müssen die Ableitungen  $f^{(n)}(x_0)$  abschätzen. Dazu sei

$$C := \max\{|a_0|, |a_1|, 1\} \quad \text{und} \quad M := \max\{|f(x_0)|, |f'(x_0)|\}$$

Es genügt

$$|f^{(n)}(x_0)| \leq (2C)^{n-1} \cdot M \quad \text{für} \quad n \geq 2$$

zu zeigen, denn dann folgt die behauptete Konvergenz aus dem Quotientenkriterium. Das geht natürlich mit Induktion:

Induktionsanfang: Es ist

$$|f''(x_0)| \leq |a_1| \cdot |f'(x_0)| + |a_0| \cdot |f(x_0)| \leq 2C \cdot M.$$

Wir brauchen auch noch die Abschätzung für die dritte Ableitung:

$$|f'''(x_0)| \leq |a_1| \cdot |f''(x_0)| + |a_0| \cdot |f'(x_0)| \leq |a_1| \cdot 2C \cdot M + |a_0| \cdot M \leq (2C^2 + C) \cdot M \leq (2C)^2 \cdot M$$

wegen  $C \leq C^2$ .

Induktionsschluss: Wir nehmen  $n \geq 4$  an und setzen die Behauptung für  $n$  und  $n-1$  voraus. Dann können wir abschätzen

$$\begin{aligned} |f^{(n+1)}(x_0)| &\leq |a_1| \cdot |f^{(n)}(x_0)| + |a_0| \cdot |f^{(n-1)}(x_0)| \leq (C \cdot (2C)^{n-1} + C \cdot (2C)^{n-2}) \cdot M = \\ &= C \cdot ((2C)^{n-1} + (2C)^{n-2}) \cdot M \leq C \cdot 2 \cdot (2C)^{n-1} \cdot M = (2C)^n \cdot M \end{aligned}$$

wegen  $(2C)^{n-2} \leq (2C)^{n-1}$ .

c) Es sei  $x_0$  der Mittelpunkt des Intervalls  $]\alpha, \beta[$  also  $]\alpha, \beta[ = ]x_0 - r, x_0 + r[$  mit  $r > 0$ . Für  $|\xi - x_0| < |x - x_0| < r$  müssen wir das Restglied

$$R_n(\xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

abschätzen. Es genügt dies für  $|x - x_0| \leq s$  zu tun, wo  $0 < s < r$  fest ist. Auf dem abgeschlossenen Intervall  $[x_0 - s, x_0 + s]$  sind  $f$  und  $f'$  beschränkt. Also existiert

$$M := \max_{|x-x_0| \leq s} (\max(|f(x)|, |f'(x)|)).$$

Aus b) folgt damit

$$|f^{(n+1)}(\xi)| \leq (2C)^n \cdot M$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(\xi)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2C)^n \cdot s^n}{(n+1)!} = 0.$$

d) Es sei  $F(x)$  die Funktion, welche durch die Taylor-Reihe von  $f$  bezüglich  $x_0$  dargestellt wird. Dann ist die Funktion

$$g(x) := F''(x) + a_1 F'(x) + a_0 F(x)$$

eine auf ganz  $\mathbb{R}$  konvergente Potenzreihe. Auf dem Intervall  $]\alpha, \beta[$  stimmt  $F$  mit  $f$  überein. Deswegen verschwindet  $g$  auf diesem Intervall identisch. Aus der Eindeutigkeit der Potenzreihenentwicklung folgt  $g \equiv 0$  auf ganz  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Satz 8.9 (Korollar)** *Es sei  $V$  der Lösungsraum unserer gegebenen Differentialgleichung (ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum). Dann ist für jedes  $x_0 \in \mathbb{R}$  der Homomorphismus*

$$V \ni f \mapsto (f(x_0), f'(x_0)) \in \mathbb{R}^2$$

*injektiv. Insbesondere hat der Lösungsraum eine Dimension  $\leq 2$ .*

Beweis. Sei  $f$  eine Funktion im Kern des Homomorphismus, d.h., mit  $f(x_0) = f'(x_0) = 0$ . Im Beweis von Satz 8.8 b) können wir dann für  $f$  annehmen  $M = 0$ . Und die Abschätzung zeigt  $f^{(n)}(x_0) = 0$  für alle  $n$ . Die Taylor-Reihe  $T_f(x)$  für  $f$  mit Entwicklungspunkt  $x_0$  stellt die Nullfunktion dar. Wir haben gezeigt: Der Kern besteht nur aus der Nullfunktion, also ist unser Homomorphismus injektiv.  $\square$

Als nächstes zeigen wir, dass der Lösungsraum tatsächlich immer die Dimension 2 hat, indem wir zwei linear unabhängige Lösungen explizit angeben. Damit haben wir die Differentialgleichung gelöst. Aber wir müssen eine Reihe von Fallunterscheidungen machen, abhängig von den Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0.$$

1) Das Polynom  $p(\lambda)$  habe zwei verschiedene reelle Nullstellen  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Oben haben wir die beiden Lösungen  $e^{\lambda_1 x}$  und  $e^{\lambda_2 x}$  angegeben und gezeigt, dass sie linear unabhängig sind. Allerdings kann hier durchaus eine Nullstelle  $\lambda_1 = 0$  sein. Das passiert genau dann, wenn  $a = 0$  ist. Der Test auf lineare Unabhängigkeit funktioniert aber ganz genau so. Wir haben dann die beiden linear unabhängigen Lösungen

$$1 \quad \text{und} \quad e^{\lambda_2 x}.$$

2) Das Polynom  $p(\lambda)$  habe die doppelte reelle Nullstelle  $\lambda_1$ . Dann ist also

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2 = \lambda^2 - 2\lambda_1 \cdot \lambda + \lambda_1^2.$$

Unsere Differentialgleichung lautet

$$f'' - 2\lambda_1 \cdot f' + \lambda_1^2 \cdot f = 0.$$

Natürlich ist  $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$  nach wie vor eine Lösung. Aber der e-hoch-Ansatz liefert keine zweite unabhängige Lösung. Eine zweite Lösung ist  $y_2(x) := x \cdot e^{\lambda_1 x}$ . Die findet man durch probieren, oder wenn man einen Mathematiker fragt, der das schon weiß. Hier wollen wir nur nachrechnen, dass  $y_2$  tatsächlich eine Lösung ist:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x \cdot e^{\lambda_1 x}, \\ y_2'(x) &= e^{\lambda_1 x} + x \cdot \lambda_1 e^{\lambda_1 x} = (1 + \lambda_1 x) \cdot e^{\lambda_1 x}, \\ y_2''(x) &= \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + (1 + \lambda_1 x) \cdot \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + (2 + \lambda_1 x) \cdot \lambda_1 e^{\lambda_1 x}. \end{aligned}$$

Damit wird

$$y_2''(x) - 2\lambda_1 y_2'(x) + \lambda_1^2 y_2(x) = [(2 + \lambda_1 x) - 2(1 + \lambda_1 x) + \lambda_1 x] \cdot \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 x} = 0.$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass  $y_1$  und  $y_2$  linear unabhängig sind. Wir nehmen also an, es gebe zwei reelle Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  mit

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda_1 x} \equiv 0.$$

Nach Division durch  $e^{\lambda_1 x}$  folgt daraus

$$c_1 + c_2 x \equiv 0.$$

Setzen wir hier  $x = 0$  ein, so folgt  $c_1 = 0$ . Und wenn wir dann noch  $x = 1$  einsetzen, folgt auch  $c_2 = 0$ .

Anzumerken ist noch, dass dieses Verfahren auch auf zwei linear unabhängige Lösungen führt, wenn  $\lambda_1 = 0$  ist. Die Funktionen sind dann

$$y_1(x) \equiv 1, \quad y_2(x) = x.$$

Aber die Differentialgleichung hat die langweilige Form  $f'' = 0$ .

3) Das Polynom  $p(\lambda)$  habe die beiden komplex-konjugierten Nullstellen  $\mu \pm i \cdot \omega$  mit  $\mu, \omega \in \mathbb{R}$  und  $\omega \neq 0$ . Dann ist also

$$p(\lambda) = (\lambda - \mu - i\omega)(\lambda - \mu + i\omega) = (\lambda - \mu)^2 + \omega^2 = \lambda^2 - 2\mu\lambda + (\mu^2 + \omega^2).$$

Und die zugehörige Differentialgleichung lautet

$$f'' - 2\mu f' + (\mu^2 + \omega^2) f = 0.$$

Der e-hoch-Ansatz würde hier auf die beiden komplexen e-Funktionen

$$z_1(x) = e^{(\mu+i\omega)x}, \quad z_2(x) = e^{(\mu-i\omega)x}$$

führen. Die können wir aber nicht brauchen. Die Eulersche Formel

$$e^{i \cdot \omega x} = \cos(\omega \cdot x) + i \cdot \sin(\omega \cdot x)$$

macht daraus

$$z_1(x) = e^{\mu x} (\cos(\omega \cdot x) + i \cdot \sin(\omega \cdot x)),$$

$$z_2(x) = e^{\mu x} (\cos(\omega \cdot x) - i \cdot \sin(\omega \cdot x)).$$

Sieht auch nicht viel besser aus. Aber wir können diese beiden komplexen Funktionen rekombinieren zu zwei reellen Funktionen

$$y_1(x) = \frac{1}{2}(z_1(x) + z_2(x)) = e^{\mu x} \cos(\omega \cdot x), \quad y_2(x) = \frac{1}{2i}(z_1(x) - z_2(x)) = e^{\mu x} \sin(\omega \cdot x).$$

Diese beiden Funktionen sind tatsächlich Lösungen. Das sieht man, indem man beim Gang durch das Komplexe etwas sorgfältiger ist, oder indem man es direkt nachrechnet. Hier möchte ich es mir sparen.

Allerdings müssen wir  $y_1$  und  $y_2$  auf lineare Unabhängigkeit testen. Seien also  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  mit

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = e^{\mu x} \cdot (c_1 \cos(\omega \cdot x) + c_2 \sin(\omega \cdot x)) \equiv 0.$$

Nach Division durch die  $e$ -Funktion erhalten wir

$$c_1 \cos(\omega \cdot x) + c_2 \sin(\omega \cdot x) \equiv 0.$$

Setzen wir hier  $x = 0$  ein, so folgt  $c_1 = 0$ . Und dann ist  $c_2 = 0$  offensichtlich.

Das Verfahren funktioniert auch, wenn  $\mu = 0$  ist. Dann liefert es die beiden Lösungen

$$y_1(x) = \cos(\omega \cdot x), \quad y_2(x) = \sin(\omega \cdot x)$$

ohne Exponential-Faktor.

Wir haben bewiesen:

**Satz 8.10** *Jede lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten hat einen Lösungsraum der Dimension 2.*

Mit dem Homomorphismus aus Satz 8.9 kann man das auch so formulieren:

**Satz 8.11** *Jedes Anfangswert-Problem*

$$f'' + a_1 f' + a_0 f = 0, \quad f(x_0) = c_1, f'(x_0) = c_2$$

*hat eine eindeutig bestimmte Lösung.*

Soweit die Theorie. Jetzt möchte ich aber die behandelten Fälle und die erhaltenen Lösungen noch in einer Tabelle zusammenstellen. Zunächst eine Sprachregelung:

**Definition 8.6** *Eine Basis  $y_1(x), y_2(x)$  für den Lösungsraum  $V$  unserer Differentialgleichung heißt ein Lösungsfundamentalsystem, abgekürzt LFS. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist dann  $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$  mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .*

Die folgende Tabelle gibt Lösungsfundamentalsysteme für unsere Differentialgleichung  $f'' + a_1 f' + a_0 f = 0$  zweiter Ordnung mit dem charakteristischen Polynom  $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$ . Dessen Wurzeln  $\lambda_1, \lambda_2$  hängen ab von seiner Diskriminante

$$\Delta := a_1^2 - 4a_0.$$

$\Delta$	Wurzeln	LFS
$> 0$ wenn $a_0 = 0$	$\lambda_1 \neq \lambda_2$ reell $\lambda_1 = 0$	$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$ $1, e^{\lambda_2 x}$
$= 0$ wenn $a_1 = a_0 = 0$	$\lambda_1 = \lambda_2$ reell $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$	$e^{\lambda_1 x}, x \cdot e^{\lambda_1 x}$ $1, x$
$< 0$ wenn $a_1 = 0$	$\mu \pm i \cdot \omega, \omega \neq 0$ $\pm i\omega$	$e^{\mu x} \cos(\omega \cdot x), e^{\mu x} \sin(\omega \cdot x)$ $\cos(\omega \cdot x), \sin(\omega \cdot x)$

**Beispiel 8.11 (Gedämpfter harmonischer Oszillator)** Die Differentialgleichung des ungedämpften harmonischen Oszillators ist (der Punkt bedeutet Ableitung nach der Zeit)

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$\lambda^2 + \omega_0^2.$$

Das hat die beiden komplexen Nullstellen  $\pm i\omega_0$ . Ein Lösungsfundamentalsystem enthält deswegen auch keine Exponentialfunktionen, sondern ist z.B.

$$\sin(\omega_0 t), \cos(\omega_0 t).$$

Ein realistischerer harmonischer Oszillator ist der gedämpfte harmonische Oszillator

$$\ddot{y} + 2\mu\dot{y} + \omega_0^2 y = 0, \quad 0 < \mu \in \mathbb{R}.$$

Sein charakteristisches Polynom ist

$$\lambda^2 + 2\mu \cdot \lambda + \omega_0^2$$

mit den beiden Wurzeln

		falls
komplex-konjugiert	$-\mu \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$	$\mu < \omega_0$
zusammenfallend	$-\mu$	$\mu = \omega_0$
reell und $< 0$	$-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$	$\mu > \omega_0$

Der erste Fall heißt der Fall schwacher Dämpfung. Ein Lösungsfundamentalsystem sind die beiden Funktionen

$$y_1(t) = e^{-\mu t} \sin(\omega t), \quad y_2(t) = e^{-\mu t} \cos(\omega t), \quad \omega := \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}.$$

Es sind Schwingungen mit Frequenz  $\omega$ , deren Amplitude wegen der Dämpfung exponentiell kleiner wird.

Der zweite Fall ist der Grenzfall mit dem Lösungsfundamentalsystem

$$y_1(t) = e^{-\mu t}, \quad y_2(t) = t \cdot e^{-\mu t}.$$

Hier schwingt nichts mehr, die Lösung fällt unaufhaltsam gegen 0. Aber wenn bei einer Lösung

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{-\mu t} + c_2 t \cdot e^{-\mu t}$$

die Koeffizienten verschiedenes Vorzeichen haben, geht die Lösung bei  $t = -c_1/c_2$  durch die Null-Lage, ein einziges mal, bevor sie vorübergehend nochmal anwächst, und sich dann unwiderruflich monoton fallend zur Null-Lage hinbewegt.

Der dritte Fall heißt der Fall starker Dämpfung. Beide Wurzeln

$$\mu_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$$

sind negativ. Beide Lösungen

$$y_1(t) = e^{-\mu_1 t}, \quad y_2(t) = e^{-\mu_2 t}$$

beschreiben eine exponentielle Abnahme der Auslenkung. Auch hier kann die Lösung, für Koeffizienten  $c_1$  und  $c_2$  mit verschiedenem Vorzeichen, eine Nullstelle haben, aber nur eine einzige.

Schließlich müssen wir uns noch um die inhomogene Gleichung

$$f'' + a_1 f' + a_0 = b(x)$$

kümmern. Alles läuft darauf hinaus, eine spezielle Lösung  $y_0(x)$  dieser Gleichung zu finden. Denn, wenn  $y_1(x), y_2(x)$  ein LFS der homogenen Gleichung bilden, dann ist

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_0(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung.

Es gibt dazu ein allgemeines Lösungs-Verfahren, das hier aber zu weit führt. Dagegen gibt es ein einfaches, spezielles Verfahren, wenn die rechte Seite  $b(x)$  eine einfache Funktion vom Typ

- Exponentialfunktion  $e^{cx}$ ,
- Winkelfunktion  $\cos(\omega x), \sin(\omega x)$
- Polynom  $x^k$

ist. Man steckt die rechte Seite, die rauskommen soll, als Input in die Differentialgleichung rein, und analysiert den Output.



Am einfachsten funktioniert es, wenn  $b(x) = e^{cx}$  eine Exponentialfunktion ist. Dazu kürze ich das charakteristische Polynom jetzt ab als

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0.$$

Wenn wir die gewünschte rechte Seite  $e^{cx}$  in die homogene Gleichung stecken, dann ist der Output (s. Anfang dieses Paragraphen)

$$p(c) \cdot e^{cx}.$$

Damit ist

$$y_0(x) := \frac{1}{p(c)} \cdot e^{cx}$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Allerdings leider nur, wenn nicht  $p(c) = 0$ , d.h.,  $c$  eine Wurzel des charakteristischen Polynoms ist. In diesem Fall muss man  $f(x) = x \cdot e^{cx}$  verwenden. Man erhält

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot e^{cx} \\ f'(x) &= e^{cx} + x \cdot ce^{cx} = (1 + cx) \cdot e^{cx} \\ f''(x) &= ce^{cx} + (1 + cx) \cdot ce^{cx} = (2c + c^2x) \cdot e^{cx} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f'' + a_1f' + a_0f &= \left( (2c + c^2x) + a_1(1 + cx) + a_0x \right) e^{cx} \\ &= \left( 2c + a_1 + \underbrace{(c^2 + a_1c + a_0)}_{=0} \right) e^{cx} \\ &= (2c + a_1) \cdot e^{cx} \end{aligned}$$

Man erhält die spezielle Lösung

$$y_0(x) = \frac{1}{2c + a_1} \cdot e^{cx}.$$

Allerdings, auch wieder nur, wenn nicht  $2c + a_1 = 0$  sein sollte. Was ist aber dann los? Es ist

$$p(c) = c^2 + a_1c + a_0 = 0 \quad \text{und} \quad a_1 = -2c,$$

also

$$c^2 - 2c \cdot c + a_0 = a_0 - c^2 = 0.$$

Das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2c \cdot \lambda + c^2 = (\lambda - c)^2$$

hat  $c$  sogar als doppelte Nullstelle. In diesem Fall muss man als Input die Funktion

$$f(x) = x^2 \cdot e^{cx}$$

verwenden. Das möchte ich aber hier nicht mehr allgemein diskutieren. Stattdessen ein Beispiel:

**Beispiel 8.12** *Gesucht ist eine spezielle Lösung der Differentialgleichung*

$$f'' + 2f' + f = e^{-x}.$$

*Das charakteristische Polynom ist*

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$$

*mit der doppelten Nullstelle  $\lambda = -1$ . Die ist aber gerade der Faktor im Exponenten der Exponentialfunktion. Wir verwenden  $x^2 e^{-x}$  als Input und finden*

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 e^{-x} \\ f'(x) &= 2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x} = (2x - x^2) \cdot e^{-x} \\ f''(x) &= (2 - 2x) \cdot e^{-x} - (2x - x^2) \cdot e^{-x} = (2 - 4x + x^2) \cdot e^{-x} \end{aligned}$$

*und*

$$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = ((2 - 4x + x^2) + 2(2x - x^2) + x^2) \cdot e^{-x} = 2 \cdot e^{-x}.$$

*Eine spezielle Lösung ist*

$$y_0(x) := \frac{x^2}{2} \cdot e^{-x}.$$

Wenn Winkelfunktionen auf der rechten Seite stehen geht es ganz ähnlich: Man wendet die Differentialgleichung auf diese Winkelfunktionen an, und sucht eine geeignete Linearkombination aus. Die allgemeinen Formeln sind unschön hinzuschreiben, und unmöglich zu merken. Ich möchte das Prinzip nur an einem Beispiel illustrieren:

**Beispiel 8.13** *Gesucht sei eine spezielle Lösung der Gleichung*

$$f'' + 2f' + f = \sin(2x).$$

*Die linke Seite der Gleichung schreibe ich jetzt als*

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + 2 \cdot \frac{d}{dx} + 1\right)[f]$$

*Und wende den in der Klammer stehenden 'Operator' auf verschiedene Input-Funktionen an: Es ist*

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} + 2 \frac{d}{dx} + 1\right)[\sin(2x)] &= -4\sin(2x) + 4\cos(2x) + \sin(2x) \\ &= -3\sin(2x) + 4\cos(2x) \\ \left(\frac{d^2}{dx^2} + 2 \frac{d}{dx} + 1\right)[\cos(2x)] &= -4\cos(2x) - 4\sin(2x) + \cos(2x) \\ &= -4\sin(2x) - 3\cos(2x), \\ \left(\frac{d^2}{dx^2} + 2 \frac{d}{dx} + 1\right)[3\sin(2x) + 4\cos(2x)] &= -25\sin(2x), \end{aligned}$$

*und eine spezielle Lösung ist*

$$y_0(x) = -\frac{1}{25}(3\sin(2x) + 4\cos(2x)).$$

Auch wenn die rechte Seite  $b(x)$  der Gleichung ein Polynom ist, funktioniert das Input-Output-Verfahren ganz ähnlich. Hierzu nur folgendes Beispiel:

**Beispiel 8.14** *Gesucht sei eine spezielle Lösung der Gleichung*

$$f'' + 2f' + f = x^2.$$

*Es ist*

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx} + 1 \right) [1] &= 1, \\ \left( \frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx} + 1 \right) [x] &= 2 + x, \\ \left( \frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx} + 1 \right) [x^2] &= 2 + 4x + x^2, \\ \left( \frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx} + 1 \right) [x^2 - 4x + 6] &= x^2. \end{aligned}$$

*Also ist*

$$y_0(x) := x^2 - 4x + 6$$

*eine spezielle Lösung.*

**Beispiel 8.15 (Angestoßener harmonischer Oszillator)** *Damit ein harmonischer Oszillator nicht durch die in der Realität unausweichliche Dämpfung abgebremst wird, stößt man ihn manchmal periodisch an. Eine Differentialgleichung dafür ist*

$$\ddot{y} + 2\mu\dot{y} + \omega_0^2 y = a \cdot \cos(t).$$

*Es kommt darauf an, eine spezielle Lösung  $y_0(t)$  zu finden. Denn weil die Lösungen der homogenen Gleichung auf 0 zu fallen, wird sich jede Lösung langfristig in die Nähe dieser speziellen Lösung hin einpendeln. Wir wenden mal die linke Seite der Gleichung*

$$\frac{d^2}{dt^2} + 2\mu\frac{d}{dt} + \omega_0^2$$

*auf die beiden Winkelfunktionen  $\sin(t)$  und  $\cos(t)$  an:*

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2}{dt^2} + 2\mu\frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) [\sin(t)] &= -\sin(t) + 2\mu\cos(t) + \omega_0^2\sin(t) \\ &= (\omega_0^2 - 1)\sin(t) + 2\mu\cos(t), \\ \left( \frac{d^2}{dt^2} + 2\mu\frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) [\cos(t)] &= -\cos(t) - 2\mu\sin(t) + \omega_0^2\cos(t) \\ &= (\omega_0^2 - 1)\cos(t) - 2\mu\sin(t). \end{aligned}$$

Setzen wir erst einmal

$$z(t) := 2\mu \sin(t) + (\omega_0^2 - 1)\cos(t),$$

so wird also

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\mu\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right)[z] = (4\mu^2 + (\omega_0^2 - 1)^2)\cos(t).$$

Deswegen ist

$$y_0(t) := \frac{a}{4\mu^2 + (\omega_0^2 - 1)^2}(2\mu \sin(t) + (\omega_0^2 - 1)\cos(t))$$

eine spezielle Lösung.

Das ist schön. Allerdings erkennt das inzwischen (hoffentlich) geschulte Auge für  $\omega_0 = 1$  ein Problem. Das liegt aber in der Natur der Sache: Hier ist die Eigenfrequenz  $\omega_0$  des Oszillators gleich der Frequenz 1, mit der angestoßen wird. Das ist der sogenannte Resonanz-Fall und muss anders behandelt werden.

Eigentlich sollen in Staatsexamenaufgaben keine Differentialgleichungen vorkommen mit einer Ordnung höher als zwei. Gelegentlich passiert das aber doch noch. Solch eine Aufgabe möchte ich hier auch noch diskutieren. In Prinzip geht alles genauso wie bei Gleichungen der Ordnung zwei.

**Beispiel 8.16 (H 05, T3, A5)** Finden Sie sämtliche reellen Lösungen des AWP

$$y'''' - 16y = 0, \quad y(0) = 0.$$

Man macht den e-hoch-Ansatz  $y = e^{\lambda x}$ . Dann ist also  $y'''' = \lambda^4 e^{\lambda x}$  und die Differentialgleichung lautet

$$(\lambda^4 - 16)e^{\lambda x} = 0.$$

Das charakteristische Polynom  $\lambda^4 - 16$  hat jetzt den Grad 4 und die Nullstellen

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = 2i, \quad \lambda_4 = -2i.$$

Zu den reellen Nullstellen gehören die Lösungen

$$y_1(x) = e^{2x}, \quad y_2(x) = e^{-2x}.$$

Die komplexen Nullstellen kann man mit der Eulerschen Formel analysieren. Man kann aber auch gleich feststellen

$$\cos(2x)'''' = 2^4 \cdot \cos(2x), \quad \sin(2x)'''' = 2^4 \cdot \sin(2x).$$

Damit hat man zwei weitere Lösungen

$$y_3(x) = \cos(2x), \quad y_4(x) = \sin(2x).$$

Eigentlich müsste man jetzt nachprüfen, dass diese vier Lösungen linear unabhängig sind. Das möchte ich mir sparen. Und eigentlich bräuchte man noch die Hintergrundinformation, dass der Lösungsraum der Gleichung vierter Ordnung die Dimension vier hat. Das führt hier zu weit. Gehen wir davon aus: Die allgemeine Lösung der Gleichung ist

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos(2x) + c_4 \sin(2x), \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

Und  $y(x)$  ist Lösung des AWP, wenn

$$y(0) = c_1 + c_2 + c_3 = 0.$$

**Beispiel 8.17 (Freier Fall mit Luftwiderstand)** In 8.1 habe ich die Gleichung des freien Falls mit einem nicht zu vernachlässigenden Luftwiderstand in der Form

$$\ddot{y} = -\mu\dot{y} - g$$

angegeben. Sie ist eine inhomogene lineare Gleichung

$$\ddot{y} + \mu\dot{y} = -g$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^2 + \mu \cdot \lambda = \lambda \cdot (\lambda + \mu).$$

Aus dessen Nullstellen  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\mu$  bekommt man die allgemeine Lösung

$$c_1 + c_2 e^{-\mu t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

der homogenen Gleichung. Als spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung erraten wir das lineare Polynom

$$y_0(t) = -\frac{g}{\mu} \cdot t.$$

Damit wird die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{-\mu t} - \frac{g}{\mu} \cdot t.$$

Der wesentliche Effekt ist hier  $y_0(t)$ , das lineare Fallen mit konstanter Geschwindigkeit  $-g/\mu$ . Die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  enthalten Anfangs-Höhe und -Geschwindigkeit. Und die Exponentialfunktion klingt exponentiell ab.

**Aufgabe 8.23** Bestimmen Sie die Lösung des AWP

a)  $y''(x) + 5y'(x) = x + e^{-5x}, \quad y(0) = y'(0) = 0,$

b)  $y'' + y = e^x, \quad y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0.$

**Aufgabe 8.24** Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

a)  $y'' + 4y' - 2y = x,$

b)  $y'' + y' - 2y = x^2,$

c)  $y'' + 16y = -\sin(4t),$

d)  $y'' + y' - 6y = \cos(x),$

e)  $y'' + 2y' + 5y = 10e^{-2x}.$

**Aufgabe 8.25** Für welches  $a \in \mathbb{R}$  gibt es eine Lösung  $y(x)$  der Differentialgleichung

$$y'' + 2a \cdot y' + a^2 \cdot y = 0$$

mit

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y(1) = b > 0?$$

Wie lautet diese Lösung. Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von  $b$ ) das Verhalten dieser Lösung für  $x \rightarrow -\infty$  und  $x \rightarrow \infty$ .

**Aufgabe 8.26** a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von  $a \in \mathbb{R}$  alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' - y' - 2y = -2ae^x.$$

b) Bestimmen Sie alle  $a \in \mathbb{R}$ , für welche die entsprechenden Lösungen für  $x \rightarrow \infty$  beschränkt bleiben.

**Aufgabe 8.27** Bestimmen Sie

a) ein LFS der Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + 2y = 0,$$

b) eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + 2y = -4x^2 - 2.$$

## 8.5 Systeme von Differentialgleichungen

Ähnlich, wie man Systeme linearer Gleichungen für mehrere Unbekannte betrachtet, kann man auch Systeme von Differentialgleichungen für mehrere unbekannte Funktionen betrachten. Wir wollen nur Systeme von zwei Gleichungen für zwei unbekannte Funktionen betrachten. Die sehen allgemein so aus:

$$\begin{aligned}y_1' &= f_1(y_1, y_2, x), \\y_2' &= f_2(y_1, y_2, x).\end{aligned}$$

Sie sind uns zu schwer. Deswegen betrachten wir nur  $2 \times 2$ -Systeme von linearen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}y_1' &= a_{1,1}(x) \cdot y_1 + a_{1,2}(x) \cdot y_2 + b_1(x) \\y_2' &= a_{2,1}(x) \cdot y_1 + a_{2,2}(x) \cdot y_2 + b_2(x)\end{aligned}$$

Die sind uns (und nicht nur uns) immer noch zu schwer. Deswegen betrachten wir nur homogene  $2 \times 2$ -Systeme von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{aligned}y_1' &= a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 \\y_2' &= a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2\end{aligned}$$

Wenn man will, kann man ein solches System auch in Vektorform

$$\mathbf{y}'(x) = A \cdot \mathbf{y}(x)$$

schreiben. Dabei ist

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

die Koeffizientenmatrix und

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

eine vektorwertige Lösungsfunktion. Das ist genau das, was ich in 7.1 eine (parametrisierte) Kurve genannt habe. Das Problem kann man dann geometrisch so deuten: In jedem Punkt  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$  ist ein Vektor  $A \cdot \mathbf{y}$  gegeben, und gesucht sind Kurven  $\mathbf{y}(t)$ , die in jedem ihrer Punkte den vorgegebenen Vektor als Tangentialvektor besitzen. Das sieht alles aus, wie eine neue Beschäftigungsmöglichkeit für gelangweilte Mathematiker. Aber:

**Satz 8.12** *Jede homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist äquivalent zu einem  $2 \times 2$ -System von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.*

Beweis. Es sei die Gleichung zweiter Ordnung

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

gegeben. Wir setzen  $y_1 = y$  und  $y_2 = y'$ . Damit wird die Differentialgleichung

$$y_2' + a_1 y_2 + a_0 y_1 = 0.$$

Und sie ist äquivalent zu dem System

$$\begin{aligned} y_1' &= & y_2 \\ y_2' &= -a_0 y_1 - a_1 y_2 \end{aligned} \quad \square$$

Äquivalent heißt hier: Wenn man das obige System durch zwei Funktionen  $y_1(x), y_2(x)$  gelöst hat, dann ist  $y(x) := y_1(x)$  eine Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung. Und so bekommt man auch jede Lösung. Es scheint also so, dass die Theorie der  $2 \times 2$ -Systeme allgemeiner ist, als die Theorie der Gleichungen zweiter Ordnung. Wir werden sehen, dass das nicht ganz stimmt.

Zuerst aber wollen wir  $2 \times 2$ -Systeme transformieren. D.h., wenn ein solches System

$$\mathbf{y}'(x) = A \cdot \mathbf{y}(x)$$

gegeben ist, gehen wir mit einer invertierbaren  $2 \times 2$ -Matrix  $T$  über zu  $\mathbf{z}(x) = T \cdot \mathbf{y}(x)$ . Für  $\mathbf{z}(x)$  bedeutet das ursprüngliche System

$$\mathbf{z}'(x) = T \cdot \mathbf{y}'(x) = T \cdot A \cdot \mathbf{y}(x) = (T \cdot A \cdot T^{-1}) \cdot \mathbf{z}(x).$$

Die alte Koeffizientenmatrix  $A$  ist ersetzt durch die ähnliche Matrix  $A' := T \cdot A \cdot T^{-1}$ . Man kann also versuchen, ein gegebenes System zu vereinfachen, indem man die Koeffizientenmatrix durch eine dazu ähnliche Matrix ersetzt.

**Beispiel 8.18** *Die  $2 \times 2$ -Matrix  $A$  habe zwei verschiedene reelle Eigenwerte  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Dann ist sie ähnlich zur Diagonalmatrix*

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Und nach der Transformation haben wir das System

$$\begin{aligned} z_1'(x) &= \lambda_1 z_1(x) \\ z_2'(x) &= \lambda_2 z_2(x) \end{aligned}$$

Das ist gar kein richtiges System mehr, sondern wir haben zwei entkoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung mit den beiden Lösungen

$$z_1(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x}, \quad z_2(x) = c_2 \cdot e^{\lambda_2 x}.$$

Dazu gehören die Vektorwertigen Lösungen

$$\mathbf{z}(x) = c_1 \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix}.$$

Aus dem Beispiel machen wir einen Satz:

**Satz 8.13** Die Koeffizientenmatrix  $A$  des Systems  $\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y}$  habe die beiden verschiedenen reellen Eigenwerte  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  mit zugehörigen Eigenvektoren  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ . Dann sind die beiden Vektorwertigen Funktionen

$$e^{\lambda_1 x} \mathbf{v}_1, \quad e^{\lambda_2 x} \mathbf{v}_2$$

Lösungen des Systems.

Beweis. Wir sparen uns die Transformation in die Basis aus Eigenvektoren und die Transformation zurück, sondern rechnen direkt nach:

$$(e^{\lambda_1 x} \mathbf{v}_1)' = \lambda_1 e^{\lambda_1 x} \mathbf{v}_1, \quad A \cdot e^{\lambda_1 x} \mathbf{v}_1 = e^{\lambda_1 x} A \mathbf{v}_1 = \lambda_1 e^{\lambda_1 x} \mathbf{v}_1$$

und ebenso für  $\lambda_2$ . □

Diese Methode ist der e-hoch-Ansatz für Systeme. Er funktioniert immer, wenn es zwei linear unabhängige Eigenvektoren zu zwei (verschiedenen oder auch gleichen) Eigenwerten gibt.

Bis jetzt habe ich noch keinerlei Existenz- und Eindeutigkeits-Theorie vorgestellt. Die will ich auf den entsprechenden Satz 8.11 für Gleichung zweiter Ordnung zurückführen. Dazu ein

**Satz 8.14 (Aus der Linearen Algebra)** Die reelle  $2 \times 2$ -Matrix sei keine Skalarmatrix, d.h., nicht von der Form  $\lambda \mathbb{1}_2$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $A$  ähnlich zu einer Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & d \end{pmatrix}, \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Die Aussage bedeutet: Es gibt eine Basis  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$  mit

$$A \cdot \mathbf{v}_1 = c \cdot \mathbf{v}_2, \quad A \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + d \cdot \mathbf{v}_2.$$

Und die Voraussetzung an  $A$  bedeutet: Es mag vielleicht 1-dimensionale Eigenräume für  $A$  geben, aber der ganze  $\mathbb{R}^2$  selbst ist kein Eigenraum. Es gibt also einen Vektor  $\mathbf{0} \neq \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ , der kein Eigenvektor ist.

Zuerst suchen wir einen Vektor  $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  mit  $A \cdot \mathbf{v} = t \cdot \mathbf{v}_2, t \in \mathbb{R}$ . Wenn  $A$  nicht vollen Rang hat, dann ist das einfach: Es gibt einen Vektor  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  mit

$$A \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{v}_2.$$

Und wenn  $A$  vollen Rang hat, dann ist das auch einfach: Die Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\mathbf{v} \rightarrow A \cdot \mathbf{v}$  ist surjektiv, und es gibt einen Vektor  $\mathbf{v}$  mit

$$A \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 = 1 \cdot \mathbf{v}_2.$$

Wegen  $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$  ist auch  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ .



Als nächstes zeigen wir:  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{v}_2$  sind linear unabhängig. Sei dazu etwa

$$s \cdot \mathbf{v} + s_2 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}.$$

Diese Gleichung multiplizieren wir mit der Matrix  $A$  und erhalten

$$A \cdot (s\mathbf{v} + s_2\mathbf{v}_2) = st\mathbf{v}_2 + s_2A\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}.$$

Hier muss  $s_2 = 0$  sein, weil  $\mathbf{v}_2$  kein Eigenvektor ist. Und weil  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  ist, muss auch  $s = 0$  sein.

Die Vektoren  $\mathbf{v}, \mathbf{v}_2$  bilden also eine Basis des  $\mathbb{R}^2$ . Wir schreiben  $A \cdot \mathbf{v}_2 = b\mathbf{v} + d\mathbf{v}_2$ . Weil  $\mathbf{v}_2$  kein Eigenvektor ist, muss hier  $b \neq 0$  sein. Wir setzen  $\mathbf{v}_1 := b \cdot \mathbf{v}$ . Dann ist auch  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  eine Basis des  $\mathbb{R}^2$ . Wir haben alles so eingerichtet, dass

$$A \cdot \mathbf{v}_1 = c \cdot \mathbf{v}_2 \text{ mit } c = bt, \quad A \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + d \cdot \mathbf{v}_2.$$

□

Ein AWP für unser System  $\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y}$  sieht so aus: Gegeben sind  $x_0 \in \mathbb{R}$  und ein Vektor  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ . Gesucht ist eine Lösung  $\mathbf{y}(x)$  mit  $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{a}$ .

**Satz 8.15 (Existenz und Eindeutigkeit)** *Gegeben sei eine beliebige reelle  $2 \times 2$ -Matrix. Dann hat jedes AWP*

$$\mathbf{y}'(x) = A \cdot \mathbf{y}(x), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{a},$$

*eine eindeutig bestimmte Lösung.*

Beweis. Wir müssen in Abhängigkeit von  $A$  zwei Fälle unterscheiden:

Fall 1: Es ist  $A = \lambda \cdot \mathbb{1}_2$  ein skalares Vielfaches der Einheitsmatrix. Das System besteht aus zwei entkoppelten Gleichungen. Jede Lösung hat die Form

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda x} \\ c_2 e^{\lambda x} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Für jede Lösung des AWP muss gelten

$$c_1 = a_1 e^{-\lambda x_0}, \quad c_2 = a_2 e^{-\lambda x_0},$$

und mit diesen  $c_1, c_2$  wird die eindeutig bestimmte Lösung definiert.

Fall 2: Es ist  $A \neq \lambda \mathbb{1}_2$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Nach Satz 8.14 ist  $A$  ähnlich zu einer Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Ohne dass sich die Beweislast ändert, können wir unser System transformieren in

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2 \\ z_2' &= cz_1 + dz_2 \end{aligned}$$

Dieses System ist äquivalent zur Gleichung zweiter Ordnung

$$z'' - dz' - cz = 0,$$

d.h., jede Lösung unseres Systems ist von der Form

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix},$$

wo  $z$  eine Lösung der Gleichung zweiter Ordnung ist. Die Behauptung folgt aus Satz 8.11.  $\square$

Also sind doch  $2 \times 2$ -Systeme und Gleichungen zweiter Ordnung im Wesentlichen äquivalent. Trotzdem ist es sinnvoll, Systeme gesondert zu behandeln. Man kann ihre Lösungskurven nämlich zeichnen. Durch jeden Punkt des  $\mathbb{R}^2$  geht genau eine Lösungskurve. (Das ist die Aussage von Satz 8.15.) Diese Lösungskurven zeichne ich lieber in einem  $(x, y)$ -System, als im  $(y_1, y_2)$ -Koordinatensystem. Ich ersetze also die

unabhängige Variable  $x$     durch     $t$   
abhängige Variable  $y_1$     durch     $x$   
abhängige Variable  $y_2$     durch     $y$

Und wie üblich bezeichne ich die Ableitung nach  $t$  (= Zeit) durch einen Punkt. Das System sieht dann als so aus:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a \cdot x + b \cdot y \\ \dot{y} &= c \cdot x + d \cdot y \end{aligned}$$

In Abhängigkeit von der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

unterscheiden wir verschiedene Fälle.

**Fall 1:** Die Matrix  $A$  ist diagonalisierbar mit den reellen Eigenwerten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ . Nachdem wir in ein Koordinatensystem übergehen, das von Eigenvektoren aufgespannt wird, sieht unser System so aus:

$$\dot{x} = \lambda_1 x, \quad \dot{y} = \lambda_2 y.$$

Es hat die Lösungskurven

$$x = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x}, \quad y = c_2 \cdot e^{\lambda_2 x}.$$

Zunächst sortieren wir einige Spezialfälle aus:

	Lösungskurven
$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$	Punkte $(c_1, c_2)$
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$	Geraden $x = c_1$
$\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$	Geraden $y = c_2$
$\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$	Geraden durch den Nullpunkt.

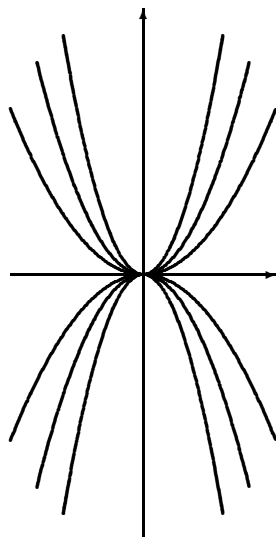
Es bleiben die Fälle

$$0 \neq \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0.$$

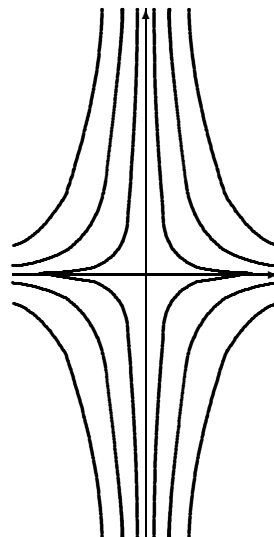
Für  $c_1 = 0$ , bzw.  $c_2 = 0$  haben wir als Lösungskurve die positiven oder negativen Halbachsen auf der  $y$ -, bzw.  $x$ -Achse. Für  $c_1 \cdot c_2 \neq 0$  eliminieren wir  $t$  vermöge

$$\left(\frac{x}{c_1}\right)^{\lambda_2} = \left(\frac{y}{c_2}\right)^{\lambda_1}, \quad \frac{y}{c_2} = \left(\frac{x}{c_1}\right)^{\lambda_2/\lambda_1}, \quad y = c \cdot x^{\lambda_2/\lambda_1} \text{ mit } c \neq 0.$$

Einen wesentlichen Unterschied macht es jetzt noch, ob die Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  das gleiche oder verschiedene Vorzeichen haben.



$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$



$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$$

**Fall 2:** Beide Eigenwerte  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  stimmen überein, aber die Matrix  $A$  ist nicht diagonalisierbar. Wir wählen das Koordinatensystem so, dass  $\mathbf{e}_2$  ein Eigenvektor für  $A$  ist. In einem solchen Koordinatensystem wird die Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} * & 0 \\ s & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ s & \lambda \end{pmatrix} \text{ mit } s \neq 0.$$

Jetzt ersetzen wir noch  $\mathbf{e}_1$  durch  $\frac{1}{s}\mathbf{e}_1$  und bringen damit die Koeffizientenmatrix auf die Form

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Damit hat das System die Form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda \cdot x \\ \dot{y} &= x + \lambda \cdot y \end{aligned}$$

Daraus folgt zunächst für  $x$

$$x = c_1 e^{\lambda t}$$

und für  $y$  die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$\dot{y} = \lambda y + c_1 e^{\lambda t}.$$

Eine spezielle Lösung dieser Gleichung ist

$$y_0 = c_1 t \cdot e^{\lambda t},$$

und unsere Lösungen haben deswegen die Form

$$x = c_1 \cdot e^{\lambda t}, \quad y = (c_1 t + c_2) \cdot e^{\lambda t}.$$

Spezielle Lösungskurven bildet für  $c_1 = 0$  die  $y$ -Achse, schön unterteilt in ihren positiven, ihren negativen Abschnitt und den Nullpunkt.

Für  $c_1 \neq 0$  haben wir

$$y = \left(t + \frac{c_2}{c_1}\right)x$$

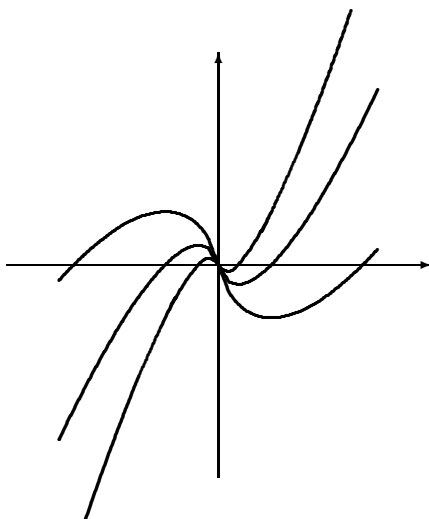
mit

$$e^{\lambda t} = \frac{x}{c_1}, \quad \lambda t = \ln\left(\frac{x}{c_1}\right), \quad t = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{x}{c_1}\right).$$

In der rechten Halbebene ist  $x > 0$  und  $c_1 > 0$ . Hier können wir schreiben

$$y = \frac{c_2}{c_1}x + \frac{1}{\lambda}x \ln\left(\frac{x}{c_1}\right) = \left(\frac{c_2}{c_1} - \frac{1}{\lambda} \ln(c_1)\right) \cdot x + \frac{1}{\lambda}x \ln(x) = cx + \frac{1}{\lambda}x \ln(x), \quad c \in \mathbb{R}.$$

(Die Lösungskurven in der linken Halbebene liegen punktsymmetrisch zu denen in der rechten Halbebene.) Interessant ist, dass die Funktion  $x \cdot \ln(x)$ , die sonst nur für Gegenbeispiele herangezogen wird, hier eine tragende Rolle spielt.



**Fall 3:** Es gibt zwei konjugiert-komplexe Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \mu \pm i \cdot \omega, \quad \omega > 0.$$

Das charakteristische Polynom ist dann

$$\chi(\lambda) = (\lambda - \mu - i\omega)(\lambda - \mu + i\omega) = (\lambda - \mu)^2 + \omega^2 = \lambda^2 - 2\mu\lambda + \mu^2 + \omega^2.$$

Wir betrachten zunächst den Fall  $\mu = 0$  und  $\chi(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$ . Nach Satz 8.14 wissen wir, dass die Koeffizientenmatrix ähnlich ist zu einer Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$-\lambda \cdot (d - \lambda) - c = \lambda^2 - d\lambda - c.$$

Hier muss also

$$d = 0, \quad c = -\omega^2$$

sein, und die Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir gehen über zu der ähnlichen Matrix

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\omega} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\omega} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\omega} & 0 \\ 0 & \sqrt{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega y \\ \dot{y} &= -\omega x \end{aligned}$$

hat die allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ -\cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Es sind Kreise um den Nullpunkt mit

$$x^2 + y^2 = c_1^2 + c_2^2.$$

Im Allgemeinfall ( $\mu \neq 0$ ) hat

$$A - \lambda \mathbb{1}_2$$

die beiden Eigenwerte  $\pm\omega i$  und ist ähnlich zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist  $A$  ähnlich zu einer Matrix

$$\begin{pmatrix} \mu & \omega \\ -\omega & \mu \end{pmatrix},$$

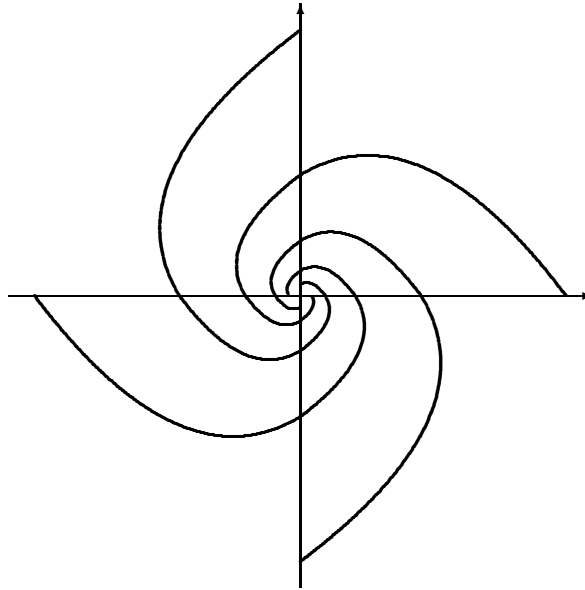
und nach der entsprechenden Transformation hat unser Gleichungssystem die Form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu \cdot x + \omega \cdot y \\ \dot{y} &= -\omega \cdot x + \mu y. \end{aligned}$$

Man rechnet nach: die allgemeine Lösung ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\mu t} \cdot \left( c_1 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} \right).$$

Die Lösungskurven sind vom Ursprung ausgehende Spiralen.



**Aufgabe 8.28** Lösen Sie das System

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_1(x) + 4y_2(x) \\ y_2'(x) &= 2y_1(x) + 3y_2(x) \end{aligned}$$

**Aufgabe 8.29** Lösen Sie das AWP

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= y_2 + 1 \end{aligned} \quad \text{mit } y_1(0) = y_2(0) = 1.$$

**Aufgabe 8.30** Lösen Sie das System

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 3x(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) + 3y(t) \end{aligned}$$

und zeigen Sie, dass die Lösungskurven implizit gegeben sind durch Gleichungen

$$a \cdot (x + y) = b \cdot (x - y)^2, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

## Index

Anfangswertproblem, 53, 62

Bogenlänge, 2

Cavalierisches Prinzip, 18

charakteristisches Polynom  
einer Differentialgleichung, 58

Differentialgleichung

explizite, 33

gewöhnliche, 33

lineare, 33

partielle, 34

Fläche, 13

Geschwindigkeitsvektor, 2

harmonischer Oszillator, 29

gedämpfter, 63

Kurve, 2

differenzierbare, 2

Länge, 2

Parametrisierung, 2

Lösungsfundamentalsystem, 62

Lipschitz-Bedingung, 48

Newtonsche Gleichung, 28

Parallelogramm, 18

Parallelotop, 18

Pyramide, 19

Spat, 18

Stetigkeit

gleichmäßige, 7

Volumen, 17

Wendeltreppe, 2