

# Vorlesung Mathematik für Physikstudierende 3

Andreas Knauf\*

Wintersemester 2020/21

## **Zusammenfassung**

Vorlesungsbegleitendes Skript für das 3. Semester. Anregungen und Kritik sind willkommen!

---

\*Department Mathematik, Universität Erlangen-Nürnberg, Cauerstr. 11, 91058 Erlangen, Raum 02.321. e-mail: [knauf@math.fau.de](mailto:knauf@math.fau.de), web: <http://math.fau.de/knauf>

# Inhaltsverzeichnis

<b>Zur Notation</b>	<b>iv</b>
<b>Kleines Englisch-Wörterbuch</b>	<b>v</b>
<b>1 Vektoranalysis I</b>	<b>1</b>
1.1 Multilinearformen . . . . .	1
1.2 Differentialformen . . . . .	7
1.3 Differentialoperatoren, Koordinatenwechsel . . . . .	9
1.4 Die Lie-Ableitung . . . . .	13
<b>2 Lösungsmethoden für gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<b>17</b>
2.1 Trennung der Variablen . . . . .	17
2.2 Hamiltonsche Differentialgleichungen . . . . .	19
2.3 Integrabilität . . . . .	22
<b>3 Stabilität bei gewöhnlichen Differentialgleichungen</b>	<b>23</b>
3.1 Allgemeine Bedeutung der Linearisierung . . . . .	23
3.2 Stabilitätsbegriffe für Gleichgewichtslagen . . . . .	26
3.3 Stabilitätskriterien für Gleichgewichtslagen . . . . .	30
<b>4 Maß und Integration</b>	<b>34</b>
4.1 Treppenfunktionen . . . . .	36
4.2 Das Lebesgue-Integral . . . . .	41
4.3 Der Satz von Fubini . . . . .	47
4.4 Nullmengen . . . . .	51
4.5 Abbildungen von Nullmengen . . . . .	54
<b>5 Sätze und Rechenregeln der Lebesgue-Integration</b>	<b>57</b>
5.1 Der Banach-Raum $L^1(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	57
5.2 Der Satz von Fubini ( $L^1$ -Version) . . . . .	69
5.3 Der Transformationssatz . . . . .	72
5.4 Anwendung: Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	77
5.5 $L^p$ -Räume . . . . .	79
5.6 Der Hilbert-Raum $L^2(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	82
<b>6 Vektoranalysis II</b>	<b>87</b>
6.1 Integration von Differentialformen . . . . .	87
6.2 Der Satz von Stokes . . . . .	92
6.3 Das Poincaré-Lemma . . . . .	97

<b>7 Die Fourier-Transformation</b>	<b>102</b>
7.1 Fourier-Transformation integrierbarer Funktionen . . . . .	102
7.2 Fourier-Transformation auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	110
7.3 Fourier-Transformation für abelsche Gruppen . . . . .	112
<b>8 Funktionentheorie</b>	<b>116</b>
8.1 Holomorphe Funktionen . . . . .	116
8.2 Holomorphie von Potenzreihen . . . . .	121
8.3 Integration holomorpher Funktionen . . . . .	123
8.4 Der Residuensatz . . . . .	129
8.5 Harmonische Funktionen . . . . .	135
<b>9 * Die Mathematik der Quantenmechanik</b>	<b>139</b>
9.1 Quantenmechanische Systeme . . . . .	139
9.2 Unbeschränkte Operatoren . . . . .	141
9.3 Orthonormalbasen und Störungstheorie . . . . .	143
<b>A Rechenregeln der Vektoranalysis im <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>146</b>
<b>Literatur</b>	<b>147</b>
<b>Index</b>	<b>149</b>

**Vorbemerkungen:**

MP-2 bezeichnet die Vorlesung *Mathematik für Physikstudierende 2*.

Mit \* gekennzeichnete Kapitel sind nicht Prüfungsstoff.

Dieses Skript kann kein Lehrbuch ersetzen. Einige Lehrbücher zur Mathematik für Physikstudierende sind im Literaturverzeichnis erwähnt.

Da dieses pdf [intern](#) und [extern](#) verlinkt ist, kann es sinnvoll sein, es *online* zu benutzen statt es auszudrucken.

**Danksagung:** Ich danke Frau I. Moch für ihre hervorragende Arbeit beim Schreiben des Manuskriptes und Herrn PD Dr B. Fauser für zahlreiche wichtige Korrekturhinweise.  
Erlangen, im Februar 2020,  
A.K.

## Zur Notation

**Teilmengen:** Sind  $A$  und  $B$  Mengen, dann heißt  $A$  *Teilmenge* von  $B$  (in Zeichen  $A \subseteq B$ ), wenn gilt:  $x \in A \Rightarrow x \in B$ . Insbesondere gilt  $B \subseteq B$ . Die *echte Inklusion*  $A \subsetneq B$  bedeutet, dass  $A \subseteq B$ , aber  $A \neq B$  gilt (in der mathematischen Literatur findet man davon abweichend auch das Teilmengenzeichen  $A \subset B$ ).

**Potenzmengen:** Ist  $A$  eine Menge, dann ist

$$2^A := \{B \mid B \subseteq A\}$$

die *Potenzmenge* von  $A$ . Synonym findet man auch die Notationen  $\mathfrak{P}(A)$  und  $\mathcal{P}(A)$ .

**Zahlen:** Menge  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  der natürlichen Zahlen,  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,

Ring  $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$  der ganzen Zahlen.

Körper  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  der rationalen, reellen bzw. komplexen Zahlen.

Für einen Körper  $\mathbb{K}$  bedeutet  $\mathbb{K}^*$  die multiplikative Gruppe  $\mathbb{K}^* := \mathbb{K} \setminus \{0\}$ , und

$$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = (0, \infty).$$

**Intervalle:** Für  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  ist

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a, x < b\},$$

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a, x \leq b\} \text{ etc.}$$

(Synonym findet man auch die Notation  $]a, b[ = (a, b)$ ,  $]a, b] = (a, b]$  etc.)

**Matrizen:**  $\text{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$  bezeichnet den  $\mathbb{K}$ -Vektorraum der  $m \times n$ -Matrizen mit Einträgen aus dem Körper  $\mathbb{K}$ , und  $\text{Mat}(n, \mathbb{K})$  den Ring  $\text{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ .

**Das griechische Alphabet:** a) Kleinbuchstaben

$\alpha$	Alpha	$\zeta$	Zeta	$\lambda$	Lambda	$\pi$	Pi	$\phi, \varphi$	Phi
$\beta$	Beta	$\eta$	Eta	$\mu$	My	$\rho, \varrho$	Rho	$\chi$	Chi
$\gamma$	Gamma	$\theta, \vartheta$	Theta	$\nu$	Ny	$\sigma, \varsigma$	Sigma	$\psi$	Psi
$\delta$	Delta	$\iota$	Jota	$\xi$	Xi	$\tau$	Tau	$\omega$	Omega
$\epsilon, \varepsilon$	Epsilon	$\kappa$	Kappa	$\omicron$	Omikron	$\upsilon$	Ypsilon		

b) Großbuchstaben

$\Gamma$	Gamma	$\Theta$	Theta	$\Xi$	Xi	$\Sigma$	Sigma	$\Phi$	Phi	$\Omega$	Omega
$\Delta$	Delta	$\Lambda$	Lambda	$\Pi$	Pi	$\Upsilon$	Ypsilon	$\Psi$	Psi		

## Kleines Englisch-Wörterbuch

abelian	abelsch	intersection	Durchschnitt
absolute value	Betrag	interval	Intervall
accumulation point	Häufungspunkt	inverse mapping	Umkehrabbildung
almost everywhere	fast überall	limit	Limes
area	Fläche	manifold	Mannigfaltigkeit
assertion	Aussage	map	Abbildung
associativity	Assoziativität	measurable	messbar
asymptotic value	Grenzwert	metric	Metrik
average	Mittelwert	metric space	metrischer Raum
ball	Vollkugel	monotonous	monoton
bound	Schranke	neighborhood	Umgebung
bounded	beschränkt	numbers	Zahlen
box	Würfel	- complex	- komplexe
cardinality	Mächtigkeit	- integer	- ganze
cartesian product	kartesisches Produkt	- irrational	- irrationale
chain rule	Kettenregel	- natural	- natürliche
circle	Kreislinie	- rational	- rationale
closed	abgeschlossen	- real	- reelle
complex analysis	Funktionentheorie	one-to-one	injektiv
complete	vollständig	onto	surjektiv
cone	Kegel	open	offen
connected	zusammenhängend	order	Ordnung
continuity	Stetigkeit	partition	Zerlegung
convergent	konvergent	proposition, theorem	Satz
convolution	Faltung	power series	Potenzreihe
countable	abzählbar	power set	Potenzmenge
derivative	Ableitung	primes	Primzahlen
disjoint	disjunkt	real part	Realteil
disk	Kreisscheibe	refinement	Verfeinerung
distance	Abstand	relation	Relation
divergent	divergent	removable singularity	hebbare Singularität
domain	Definitionsbereich	ring	Ring
empty set	leere Menge	root	Wurzel
entire function	ganze Funktion	rotation number	Windungszahl
equilibrium	Gleichgewichtslage	sequence	Folge
equivalence class	Äquivalenzklasse	set	Menge
essential singularity	wesentliche Singular.	sign	Signum
field	Körper	simply connected	einfach zusammenhängend
fixed point	Fixpunkt	stable	stabil
function	Funktion	step function	Treppenfunktion
graph	Graph	subsequence	Teilfolge
group	Gruppe	subset	Teilmenge
image	Bild	triangle inequality	Dreiecksungleichung
imaginary part	Imaginärteil	union	Vereinigung
imaginary unit	imaginäre Einheit	unit	Einheit
inequality	Ungleichung	well defined	wohldefiniert

# 1 Vektoranalysis I

In zahlreichen Anwendungen der Analysis wird *über Untermannigfaltigkeiten* des  $\mathbb{R}^n$  integriert. Um diese Integration durchzuführen, entwickeln wir den Kalkül der Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten.

Dieser Kalkül lässt auch den *geometrischen Gehalt* physikalischer Theorien wie Elektrodynamik oder Allgemeine Relativitätstheorie klar hervortreten (beispielsweise lassen sich die sog. Maxwell'schen Gleichungen der Elektrodynamik mit Differentialformen als  $dF = 0$ ,  $d^*F = j$  schreiben, siehe Beispiel 1.18).

Eine gute Einführung gibt das Buch [AF] von AGRICOLA und FRIEDRICH.

## 1.1 Multilinearformen

Der erste Schritt ist die algebraische Theorie der *äußeren Formen*, denn diese beschreiben das lokale Verhalten der Differentialformen an einem Punkt der Mannigfaltigkeit.

**1.1 Definition** Es sei  $E$  ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum. Eine Abbildung  $\varphi : E \times \dots \times E \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **multilinear**, wenn sie in jedem Argument linear ist, d.h. für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $x_j, x_j^{I/II} \in E$

$$\varphi(x_1, \dots, x_{j-1}, \lambda x_j, x_{j+1}, \dots, x_k) = \lambda \varphi(x_1, \dots, x_k)$$

und

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j^I + x_j^{II}, x_{j+1}, \dots, x_k) \\ = \varphi(x_1, \dots, x_j^I, \dots, x_k) + \varphi(x_1, \dots, x_j^{II}, \dots, x_k). \end{aligned}$$

Genauer spricht man bei  $k$  Argumenten von einer  **$k$ -linearen** Abbildung.

Einige multilineare Abbildungen sind schon aus der Linearen Algebra vertraut:

**1.2 Beispiel** 1.  $k = 1$ . Dann ist  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$  eine *Linearform*, und für  $\varphi \neq 0$  ist  $\varphi^{-1}(0) \subseteq E$  ein Unterraum der Dimension  $n - 1$ .

Auf  $E = \mathbb{R}^n$  mit Standardbasis  $e_1, \dots, e_n \in E$  bezeichne  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in E^*$  die *Dualbasis* (d.h. diejenige Basis des Dualraumes  $E^*$  von  $E$ , für die  $\alpha_i(e_j) = \delta_{ij}$  gilt). Dann ist  $\varphi = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i$  mit Koeffizienten  $c_i := \varphi(e_i)$ .

2.  $k = 2$ ,  $E = \mathbb{R}^n$  mit kanonischem innerem Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Für  $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$  ist

$$\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \varphi(x, y) := \langle x, Ay \rangle$$

eine *Bilinearform*. Sie heißt (*anti-*) *symmetrisch*, wenn

$$\varphi(x, y) = \pm \varphi(y, x) \quad (x, y \in E).$$

3.  $k = n$ ,  $E = \mathbb{R}^n$ . Die  $n$ -lineare Abbildung

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) := \det(x_1, \dots, x_n) \quad (x_i \in E)$$

heißt *Determinantenform*. Sie gibt das orientierte Volumen des von  $x_1, \dots, x_n$  aufgespannten Parallelotops an.  $\diamond$

Offensichtlich können wir zwei  $k$ -lineare Abbildungen  $\varphi_1, \varphi_2$  *addieren*, indem wir

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(x_1, \dots, x_k) := \varphi_1(x_1, \dots, x_k) + \varphi_2(x_1, \dots, x_k)$$

setzen und eine  $k$ -lineare Abbildung  $\varphi$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$  *multiplizieren*:

$$(\lambda\varphi)(x_1, \dots, x_k) := \lambda(\varphi(x_1, \dots, x_k)).$$

Damit wird die Menge  $L^k(E, \mathbb{R})$  der  $k$ -linearen Abbildungen von  $E$  in  $\mathbb{R}$  zu einem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

**1.3 Definition** Es sei  $E$  ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $k \in \mathbb{N}_0$ .

• Dann heißt  $\varphi \in L^k(E, \mathbb{R})$  **äußere  $k$ -Form**, wenn sie **antisymmetrisch** ist, d.h. für alle  $1 \leq i < l \leq k$  und  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_l, \dots, x_k) = -\varphi(x_1, \dots, x_l, \dots, x_i, \dots, x_k).$$

• Der Unterraum der äußeren  $k$ -Formen wird mit  $\Lambda^k(E) \subseteq L^k(E, \mathbb{R})$  bezeichnet.

**1.4 Beispiel** Betrachten wir die Beispiele 1.2:

1.  $\Lambda^1(E) = L^1(E, \mathbb{R}) = E^*$ .
2.  $(x, y) \mapsto \langle x, Ay \rangle$  definiert eine äußere 2-Form auf  $\mathbb{R}^n$  genau, wenn die Matrix  $A$  antisymmetrisch ist.
3. Die Determinantenform ist bis auf ihre Vielfachen die einzige äußere  $n$ -Form auf dem  $\mathbb{R}^n$ .  $\diamond$

**1.5 Definition** Das **äußere Produkt** von  $\omega_1, \dots, \omega_k \in \Lambda^1(E)$  ist die durch

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k(x_1, \dots, x_k) := \det \begin{pmatrix} \omega_1(x_1) & \dots & \omega_k(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_1(x_k) & \dots & \omega_k(x_k) \end{pmatrix} \quad (x_i \in E)$$

definierte  $k$ -lineare Abbildung.

Offensichtlich ist  $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$  eine  $k$ -Form, also in  $\Lambda^k(E)$ .

Insbesondere ist damit für die Dualbasis  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  von  $E^*$

$$\alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_k} \in \Lambda^k(E).$$

Wegen der Eigenschaften der Determinante stimmt diese äußere Form bis auf Vorzeichen mit derjenigen überein, bei der  $i_1, \dots, i_k$  aufsteigend geordnet sind und ist genau dann  $\neq 0$ , wenn alle Indizes voneinander verschieden sind.

Wir können nun jede  $k$ -Form  $\omega \in \Lambda^k(E)$  eindeutig als Linearkombination

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} \alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_k}$$

mit Koeffizienten

$$\omega_{i_1 \dots i_k} := \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \in \mathbb{R}$$

darstellen. Da die Indexmengen  $\{i_1, \dots, i_k\}$  die  $k$ -elementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$  durchlaufen, gilt für  $\dim(E) = n$

$$\dim(\Lambda^k(E)) = \binom{n}{k}.$$

Das *äußere Produkt* der  $k$ -Form  $\omega$  mit einer  $l$ -Form

$$\psi := \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq n} \psi_{j_1 \dots j_l} \alpha_{j_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{j_l}$$

wird nun distributiv als  $\omega \wedge \psi \in \Lambda^{k+l}(E)$ ,

$$\omega \wedge \psi := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} \psi_{j_1 \dots j_l} \alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_k} \wedge \alpha_{j_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{j_l}$$

definiert. All diejenigen Summanden, bei denen ein Indexpaar  $i_r = j_s$  vorkommt, sind gleich Null, denn  $\alpha_l \wedge \alpha_l = -\alpha_l \wedge \alpha_l = 0$ .

- Das äußere Produkt ist *assoziativ*, d.h. für beliebige äußere Formen auf  $E$  gilt

$$(\omega \wedge \psi) \wedge \rho = \omega \wedge (\psi \wedge \rho).$$

- Weiter gilt für eine  $k$ -Form  $\omega$  und eine  $l$ -Form  $\psi$

$$\omega \wedge \psi = (-1)^{k \cdot l} \psi \wedge \omega,$$

denn wir müssen  $k \cdot l$ -mal Eins-Formen kommutieren, um von der einen zur anderen Gestalt zu gelangen.

## 1.6 Beispiel (Symplektische Form auf dem $\mathbb{R}^{2n}$ )

$$\omega := \sum_{i=1}^n \alpha_i \wedge \alpha_{i+n} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{2n}).$$

Für  $n = 2$  ergibt sich

$$\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_3 + \alpha_2 \wedge \alpha_4,$$

also

$$\begin{aligned} \omega \wedge \omega &= (\alpha_1 \wedge \alpha_3 + \alpha_2 \wedge \alpha_4) \wedge (\alpha_1 \wedge \alpha_3 + \alpha_2 \wedge \alpha_4) \\ &= \underbrace{\alpha_1 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_3}_0 + \alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_3 \\ &\quad + \alpha_1 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_4 + \underbrace{\alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_4}_0 \\ &= (-1)^3 \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4 + (-1)^1 \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4 \\ &= -2\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4. \end{aligned}$$

Die symplektische Form  $\omega$  hat eine Schlüsselrolle in der Klassischen Mechanik. Dort bezeichnet man die Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  als Impulskoordinaten, die Koordinaten  $x_{n+1}, \dots, x_{2n}$  als Ortskoordinaten.  $\diamond$

## 1.7 Beispiel (Vektoren und äußere Formen)

Wir ordnen nun Vektoren  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n v_k e_k \in \mathbb{R}^n$  verschiedene äußere Formen zu.

- Das kanonische innere Produkt im  $\mathbb{R}^n$  vermittelt einen Isomorphismus

$$v \mapsto v^* \quad , \quad v^*(u) := \langle v, u \rangle \quad (u \in \mathbb{R}^n)$$

des  $\mathbb{R}^n$  und seines Dualraumes. Die Eins-Form  $v^*$  besitzt dabei die Gestalt

$$v^* = \sum_{i=1}^n v_i \alpha_i \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n).$$

- $v \in \mathbb{R}^n$  wird auch eine  $(n-1)$ -Form  $\omega_v \in \Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\omega_v(u_2, \dots, u_n) := \det(v, u_2, \dots, u_n) \quad (u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n)$$

zugeordnet. Speziell im  $\mathbb{R}^3$  finden wir die 2-Form

$$\omega_v = v_1 \alpha_2 \wedge \alpha_3 + v_2 \alpha_3 \wedge \alpha_1 + v_3 \alpha_1 \wedge \alpha_2.$$

- Wir betrachten jetzt speziell den (physikalisch wichtigen)  $\mathbb{R}^3$ . Das äußere Produkt zweier solcher 1-Formen ergibt auf dem  $\mathbb{R}^3$  die 2-Form

$$\begin{aligned} v^* \wedge u^* &= (v_1\alpha_1 + v_2\alpha_2 + v_3\alpha_3) \wedge (u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + u_3\alpha_3) \\ &= (v_1u_2 - v_2u_1)\alpha_1 \wedge \alpha_2 + (v_2u_3 - v_3u_2)\alpha_2 \wedge \alpha_3 \\ &\quad + (v_3u_1 - v_1u_3)\alpha_3 \wedge \alpha_1 \\ &= \omega_{v \times u}. \end{aligned}$$

Wir haben auf diese Weise das *Kreuzprodukt*

$$v \times u = \begin{pmatrix} v_2u_3 - v_3u_2 \\ v_3u_1 - v_1u_3 \\ v_1u_2 - v_2u_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

zweier Vektoren  $v, u \in \mathbb{R}^3$  gewonnen. ◇

**1.8 Satz** Die Vektoren  $w_1, \dots, w_k \in E^*$  sind genau dann linear abhängig, wenn

$$w_1 \wedge \dots \wedge w_k = 0.$$

**Beweis:**

- Wenn sie linear abhängig sind, können wir einen Index  $i \in \{1, \dots, k\}$  finden, für den  $w_i$  eine Linearkombination  $w_i = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^k c_l w_l$  ist. Damit gilt aber

$$w_1 \wedge \dots \wedge w_k = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^k c_l w_1 \wedge \dots \wedge w_{i-1} \wedge w_l \wedge w_{i+1} \wedge \dots \wedge w_k = 0,$$

denn in jedem Summanden kommt  $w_l$  doppelt vor.

- Andernfalls können wir die Vektoren  $w_1, \dots, w_k$  zu einer Basis

$$w_1, \dots, w_n \quad \text{mit} \quad n := \dim(E^*)$$

ergänzen, sodass  $w_1 \wedge \dots \wedge w_n \neq 0$  ist. Dann ist aber auch  $w_1 \wedge \dots \wedge w_k \neq 0$ . □

**1.9 Definition** Für einen endlich-dimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $E$  heißt der reelle Vektorraum

$$\Lambda^*(E) := \bigoplus_{k=0}^{\dim(E)} \Lambda^k(E)$$

(mit  $\Lambda^0(E) := \mathbb{R}$ ) mit der durch das Dachprodukt gegebenen Multiplikation die **äußere** oder **Grassmann-Algebra** über  $E$ .

**1.10 Bemerkungen** 1.  $\dim(\Lambda^*(E)) = 2^{\dim(E)}$ , denn  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ .

2. Für beliebige  $k, l \in \mathbb{N}_0$  ist für alle  $\omega \in \Lambda^k(E)$  und  $\varphi \in \Lambda^l(E)$ :  
 $\omega \wedge \varphi \in \Lambda^{k+l}(E)$ , aber für  $m > \dim(E)$  ist  $\dim(\Lambda^m(E)) = 0$ .  $\diamond$

**1.11 Definition** Für eine lineare Abbildung  $f : E \rightarrow F$  endlichdimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorräume und  $\omega \in \Lambda^k(F)$  heißt die durch

$$f^*(\omega)(v_1, \dots, v_k) := \omega(f(v_1), \dots, f(v_k)) \quad (v_1, \dots, v_k \in E)$$

definierte  $k$ -Form  $f^*(\omega)$  die **Zurückziehung** (engl. **pull-back**) von  $\omega$  mit  $f$ .

Es gilt offensichtlich  $f^*(\omega) \in \Lambda^k(E)$ , denn  $f^*(\omega)$  ist  $k$ -linear und antisymmetrisch.

### 1.12 Satz

1. Die Abbildung  $f^* : \Lambda^*(F) \rightarrow \Lambda^*(E)$  ist linear.
2. Für  $g \in L(F, G)$  ist  $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ .
3. Für die identische Abbildung  $\text{Id}_E : E \rightarrow E$  ist  $\text{Id}_E^* = \text{Id}_{\Lambda^*(E)}$ .
4. Für eine invertierbare Abbildung  $f \in \text{GL}(E, F)$  ist  $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$ .
5.  $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta)$ .

**Beweis:** Für alle Vektoren  $v_1, \dots, v_k \in E$  gilt

1. Mit  $\alpha, \beta \in \Lambda^k(F)$  und  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  ist

$$\begin{aligned} f^*(c_1\alpha + c_2\beta)(v_1, \dots, v_k) &= (c_1\alpha + c_2\beta)(f(v_1), \dots, f(v_k)) \\ &= c_1\alpha(f(v_1), \dots, f(v_k)) + c_2\beta(f(v_1), \dots, f(v_k)) \\ &= c_1f^*\alpha(v_1, \dots, v_k) + c_2f^*\beta(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

2.  $(g \circ f)^*\alpha(v_1, \dots, v_k) = \alpha(g \circ f(v_1), \dots, g \circ f(v_k)) = g^*\alpha(f(v_1), \dots, f(v_k)) = f^* \circ g^*\alpha(v_1, \dots, v_k)$
3.  $\text{Id}_E^*(\alpha)(v_1, \dots, v_k) = \alpha(\text{Id}_E(v_1), \dots, \text{Id}_E(v_k)) = \alpha(v_1, \dots, v_k)$ .
4. Folgt aus 2. und 3.:  $(f^{-1})^*f^* = (f \circ f^{-1})^* = \text{Id}_F^* = \text{Id}_{\Lambda^*(F)}$ .
5. Hausaufgabe.  $\square$

## 1.2 Differentialformen

Wir wollen nun Differentialformen einführen, aus Zeitgründen aber nur auf offenen Teilmengen  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , nicht auf Mannigfaltigkeiten.

Eine *Differentialform*  $\omega$  auf  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ist eine von Ort zu Ort variierende äußere Form, deren Variation wir als glatt voraussetzen.

Wir schreiben eine allgemeine  $k$ -Form  $\omega$  in der *Grundform*

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \in \Omega^k(U), \quad (1.1)$$

wobei

- die  $\omega_{i_1 \dots i_k} \in \Omega^0(U) := C^\infty(U, \mathbb{R})$ , also glatte reelle Funktionen auf  $U$  sind,
- und die  $dx_i$  den Koordinatenfunktionen  $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  zugeordnete 1-Differentialformen sind ( $dx_i \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ ).
- Den Raum der  $k$ -Differentialformen schreiben wir ab jetzt zur Unterscheidung vom Raum der äußeren  $k$ -Formen mit dem Symbol  $\Omega$  statt  $\Lambda$ .

Die  $dx_i$  sind durch ihre Wirkung auf ein Vektorfeld  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiert, und  $dx_i(v)(y) := v_i(y)$ . 1-Differentialformen machen also aus Vektorfeldern Funktionen, und für  $k$  Vektorfelder  $v^{(l)} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist für das  $\omega$  aus (1.1)

$$\omega(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}) := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} \cdot \det \begin{pmatrix} dx_{i_1}(v^{(1)}) & \dots & dx_{i_k}(v^{(1)}) \\ \vdots & & \vdots \\ dx_{i_1}(v^{(k)}) & \dots & dx_{i_k}(v^{(k)}) \end{pmatrix}$$

definiert. Das Ergebnis ist also eine reelle Funktion auf  $U$ .

Die Rechenregeln übertragen sich von den äußeren Formen auf die Differentialformen.

Auf dem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum

$$\Omega^*(U) := \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(U) \quad (1.2)$$

der Differentialformen betrachten wir jetzt den *Differentialoperator*  $d$ , der durch

- $df := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$  für Funktionen  $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}) = \Omega^0(U)$
- und  $d\omega := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  für  $k$ -Formen  $\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

definiert ist.  $d$  verwandelt eine  $k$ -Form also in eine  $(k+1)$ -Form.

### 1.13 Definition

Die lineare Abbildung  $d : \Omega^*(U) \rightarrow \Omega^*(U)$  heißt **äußere Ableitung**.

### 1.14 Beispiel (Äußere Ableitung)

1. Für  $\omega \in \Omega^0(\mathbb{R}^3)$  ist  $d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \omega}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \omega}{\partial x_3} dx_3$ .

2. Für  $\omega = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2 + \omega_3 dx_3 \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$  ist

$$\begin{aligned} d\omega &= (d\omega_1) \wedge dx_1 + (d\omega_2) \wedge dx_2 + (d\omega_3) \wedge dx_3 \\ &= \left( \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 + \left( \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad + \left( \frac{\partial \omega_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} \right) dx_3 \wedge dx_1 \end{aligned}$$

3. Für  $\omega = \omega_{12} dx_1 \wedge dx_2 + \omega_{23} dx_2 \wedge dx_3 + \omega_{31} dx_3 \wedge dx_1 \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$  ist

$$d\omega = \left( \frac{\partial \omega_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \omega_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_{31}}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

4. Für  $\omega \in \Omega^3(\mathbb{R}^3)$  ist  $d\omega = 0$ . ◇

**1.15 Satz**  $d$  ist eine **Antiderivation**, d.h. für  $\alpha \in \Omega^k(U)$  und  $\beta \in \Omega^l(U)$  ist

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta.$$

**Beweis:** Wegen der Linearität von  $d$  genügt es, diese Gleichung für Monome

$$\alpha := f \underbrace{dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}}_{\tilde{\alpha}}, \quad \beta := g \underbrace{dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}}_{\tilde{\beta}}, \quad f, g \in C^\infty(U, \mathbb{R})$$

zu beweisen. Es gilt

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d(f \cdot g) \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta} = ((df)g + f(dg)) \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta} \\ &= (df) \tilde{\alpha} \wedge g \tilde{\beta} + (-1)^k f \tilde{\alpha} \wedge (dg) \tilde{\beta} = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta. \end{aligned}$$

□

**1.16 Satz** Auf  $\Omega^*(U)$  gilt  $\boxed{dd = 0}$ .

**Beweis:**

1. Für  $f \in \Omega^0(U)$  ist

$$\begin{aligned}ddf &= d\left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_i} dx_l \wedge dx_i \\ &= \sum_{1 \leq r < s \leq n} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_s} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_r} \right) dx_r \wedge dx_s = 0,\end{aligned}$$

da wir wegen der Glattheit von  $f$  die partiellen Ableitungen vertauschen können.

2. Für  $\omega = \sum \omega_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \in \Omega^k(U)$  ist

$$d\omega = \sum \underbrace{(d\omega_{i_1 \dots i_k})}_0 \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = 0,$$

denn gemäß Satz 1.15 wird die äußere Ableitung auf die 1-Formen  $d\omega_{i_1 \dots i_k}$  und  $dx_{i_l}$  angewandt, und nach Teil 1. ist das Ergebnis Null.  $\square$

**1.17 Definition** Eine Differentialform  $\varphi \in \Omega^*(U)$  heißt

- **geschlossen**, wenn  $d\varphi = 0$ ,
- **exakt**, wenn  $\varphi = d\psi$  für ein  $\psi \in \Omega^*(U)$  gilt.

Nach Satz 1.16 sind exakte Differentialformen geschlossen.

Für  $k$ -Formen auf konvexen offenen Teilmengen  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  gilt für  $k \geq 1$  auch die Umkehrung (sog. *Poincaré-Lemma*, siehe Kapitel 6.3).

### 1.3 Differentialoperatoren, Koordinatenwechsel

Wir erinnern uns an Beispiel 1.7, in dem wir Vektoren in 1-Formen bzw.  $(n-1)$ -Formen umgewandelt haben. Gleiches wollen wir jetzt auch für Vektorfelder und Differentialformen tun. Wir ordnen also mithilfe des kanonischen Skalarproduktes  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf dem  $\mathbb{R}^n$  dem Vektorfeld  $v \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$

1. die durch  $v^* \in \Omega^1(U)$ ,  $v^*(w) := \langle v, w \rangle$  ( $w \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ ) definierte 1-Form zu. In Koordinaten ist  $v^* = \sum_{i=1}^n v_i dx_i$ .
2. Die Zuordnung einer  $(n-1)$ -Form  $\omega_v \in \Omega^{n-1}(U)$  zum Vektorfeld  $v$  wird durch

$$\omega_v(w_1, \dots, w_{n-1}) := \det(v, w_1, \dots, w_{n-1}) \quad (w_i \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)) \quad (1.3)$$

definiert, also durch ihre Anwendung auf  $n-1$  Vektorfelder. In Koordinaten ergibt sich  $\omega_v = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n(v, \cdot, \dots, \cdot)$ , also

$$\omega_v = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} v_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n. \quad (1.4)$$

Dabei bedeutet  $\widehat{dx_i}$  Entfernung von  $dx_i$ .

Im ersten Fall sieht man die Rechenregel

$$\boxed{\text{grad}(f)^* = df} \quad (1.5)$$

für den *Gradienten*

$$\text{grad}(f) \equiv \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

einer reellen Funktionen  $f$ , im zweiten gilt

$$\boxed{\text{div}(v) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = d\omega_v} \quad (1.6)$$

für die *Divergenz*

$$\text{div}(v) \equiv \nabla \cdot v := \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_k}$$

eines Vektorfeldes  $v$ . Denn nach (1.4) ist

$$d\omega_v = \sum_{i,k=1}^n (-1)^i \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n,$$

und die Summanden sind für  $k \neq i$  gleich Null. Da  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  die kanonische Volumenform auf dem  $\mathbb{R}^n$  ist, ergibt dies eine Relation, die praktisch nützlich ist.

Speziell für  $n = 3$  Dimensionen ist die *Rotation*

$$\text{rot}(v) \equiv \nabla \times v := \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

des Vektorfeldes  $v$  durch die Relation

$$\boxed{\omega_{\text{rot}(v)} = d(v^*)} \quad (1.7)$$

mit der äußeren Ableitung verknüpft, siehe Beispiel 1.14.2.

- Es ergibt sich aus (1.6), (1.7) und Satz 1.16

$$\text{div}(\text{rot } v) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = d\omega_{\text{rot } v} = ddv^* = 0,$$

also mit  $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \neq 0$

$$\boxed{\text{div rot } v = 0.}$$

Diese und ähnliche Relationen sind übrigens, da sie aus  $dd = 0$  abgeleitet sind, auch bei einer anderen Wahl der Riemannschen Metrik<sup>1</sup> gültig.

<sup>1</sup>**Def.:** Eine **Riemannsche Metrik** auf einer offenen Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ist eine Abbildung  $g \in C^\infty(U, \text{Mat}(n, \mathbb{R}))$ , wobei  $g(x)$  für  $x \in U$  eine symmetrische positiv definite Matrix ist.  $g(x)$  definiert also ein Skalarprodukt  $(Y, Z) \mapsto \langle Y, g(x)Z \rangle$  bei  $x$ ; siehe auch [AF], Kapitel 3.2.

- Auch die Relation

$$\boxed{\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0,}$$

die für beliebige glatte Funktionen  $f$  gültig ist, entpuppt sich als eine Manifestation des Gesetzes  $dd = 0$ : Wegen (1.7) und (1.5) gilt

$$\omega_{\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)} = d(\operatorname{grad} f)^* = dd f = 0.$$

- Als letztes Beispiel für die Nützlichkeit der Differentialformen in der Vektoranalysis soll die Identität

$$\boxed{\operatorname{div}(v \times w) = \langle \operatorname{rot} v, w \rangle - \langle v, \operatorname{rot} w \rangle}$$

abgeleitet werden: Wir haben schon im Beispiel 1.7 gesehen, dass

$$\boxed{v^* \wedge w^* = \omega_{v \times w}} \quad (1.8)$$

gilt, denn die entsprechende Rechenregel für äußere Formen überträgt sich direkt auf Differentialformen im  $\mathbb{R}^3$ . Also gilt unter Benutzung von (1.6), (1.8) und (1.7)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(v \times w) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 &= d\omega_{v \times w} = d(v^* \wedge w^*) \\ &= (dv^*) \wedge w^* - v^* \wedge dw^* = \omega_{\operatorname{rot} v} \wedge w^* - v^* \wedge \omega_{\operatorname{rot} w} \\ &= (\langle \operatorname{rot} v, w \rangle - \langle v, \operatorname{rot} w \rangle) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

### 1.18 Beispiel (Maxwell-Gleichungen)

Die kartesischen Koordinaten  $x_1, \dots, x_4$  auf der Raumzeit  $\mathbb{R}^4$  bezeichnen den Raumpunkt  $x := (x_1, x_2, x_3)$  und den Zeitpunkt  $t := x_4$ .

Die *Feldstärke*  $F \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$  sei durch

$$F := B_1 dx_2 \wedge dx_3 + B_2 dx_3 \wedge dx_1 + B_3 dx_1 \wedge dx_2 + \sum_{i=1}^3 E_i dx_i \wedge dx_4$$

gegeben, wobei  $E := (E_1, E_2, E_3) \in C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$  das elektrische und  $B := (B_1, B_2, B_3) \in C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$  das magnetische Feld bezeichnet.

Die *homogene Maxwell-Gleichung*  $dF = 0$  ist äquivalent zu

$$\operatorname{div}_x(B) = 0 \quad , \quad \frac{\partial B}{\partial t} = -\operatorname{rot}_x E.$$

Aus dem Poincaré-Lemma schließen wir auf die Existenz eines so genannten *Eichfeldes*  $A \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$  mit  $F = dA$ .  $\diamond$

Ein weiterer Aspekt von Differentialformen ist ihr Verhalten unter Abbildungen.

**1.19 Definition** Es seien  $U \subseteq \mathbb{R}^m, V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} : U \rightarrow V$  glatt. Die Zurückziehung (pull-back)  $\varphi^*\omega$  der Differentialform

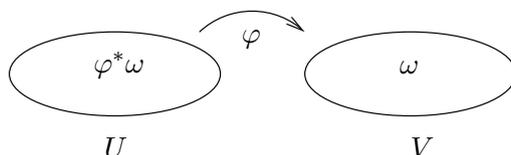
$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \in \Omega^k(V)$$

ist durch

$$\varphi^*\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} \circ \varphi d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}$$

definiert.

Der Pull-back  $\varphi^*\omega$  ist also eine  $k$ -Form auf  $U \subseteq \mathbb{R}^m$ .



### 1.20 Beispiel (Koordinatenwechsel)

Die Polarkoordinaten sind durch  $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$\varphi_1(r, \psi) := r \cos \psi \quad , \quad \varphi_2(r, \psi) := r \sin \psi$$

definiert. Es soll die 2-Form  $\omega = f dx_1 \wedge dx_2$  zurückgezogen werden. Mit  $\tilde{f} := f \circ \varphi$ , also der in Polarkoordinaten geschriebenen Funktion  $f$ , ergibt sich wegen

$$d\varphi_1 = \cos(\psi)dr - r \sin(\psi)d\psi \quad , \quad d\varphi_2 = \sin(\psi)dr + r \cos(\psi)d\psi$$

$$\varphi^*\omega = \tilde{f} d\varphi_1 \wedge d\varphi_2 = \tilde{f} r (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi) dr \wedge d\psi = \tilde{f} r dr \wedge d\psi. \quad \diamond$$

**1.21 Satz** Für alle  $\varphi \in C^\infty(U, V)$  gilt

$$\boxed{\varphi^*d = d\varphi^*}$$

**Beweis:** Durch Anwendung der Kettenregel:

$$d\varphi^*(f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = d((f \circ \varphi) \cdot d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}) = d(f \circ \varphi) \wedge d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \varphi^*d(f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) &= \varphi^* \left( \sum_{l=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_l} dx_l \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \right) \\ &= \underbrace{\sum_{l=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_l} \circ \varphi d\varphi_l}_{d(f \circ \varphi)} \wedge d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}. \end{aligned}$$

□

Durch Spezialisierung auf Diffeomorphismen  $\varphi$  schließen wir aus Satz 1.21, dass die äußere Ableitung einer Differentialform unabhängig vom verwendeten Koordinatensystem definiert ist.

Während die äußere Ableitung den Formgrad um Eins erhöht, erniedrigt das innere Produkt mit einem Vektorfeld diesen um Eins:

### 1.22 Definition

Das **innere Produkt** einer Differentialform  $\omega \in \Omega^k(U)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  auf der offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  nach einem Vektorfeld  $X \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$  ist gegeben durch

$$\mathbf{i}_X \omega \in \Omega^{k-1}(U) \quad , \quad \mathbf{i}_X \omega (V^{(1)}, \dots, V^{(k-1)}) := \omega (X, V^{(1)}, \dots, V^{(k-1)}) .$$

### 1.23 Bemerkungen (Inneres Produkt)

1. Man setzt also das Vektorfeld in die Differentialform ein, keine aufregende Angelegenheit. Die Schreibweise  $\mathbf{i}_X \omega$  ist aber besser als z.B.  $\omega(X, \cdot, \dots, \cdot)$ , weil man damit die Links-Rechts-Reihenfolge nicht durcheinanderbringt, und auch mehr betont, dass das innere Produkt nach  $X$  eine lineare Abbildung  $\mathbf{i}_X$  auf dem Vektorraum  $\Omega^*(U)$  ist.
2. Da man bei Null-Formen  $\omega \in \Omega^0(U)$ , also reellen Funktionen, kein Vektorfeld  $X$  einsetzen kann, setzt man  $\mathbf{i}_X \omega := 0$ .
3. Es gilt  $\mathbf{i}_X \mathbf{i}_Y = -\mathbf{i}_Y \mathbf{i}_X$ , woraus (ähnlich wie  $dd = 0$ ) folgt:  $\mathbf{i}_X \mathbf{i}_X = 0$ . ◇

## 1.4 Die Lie-Ableitung

In Kapitel 8.4 der *MP-2* wurde das Konzept der Richtungsableitung einer differenzierbaren Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  auf der offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  in der Richtung  $X \in \mathbb{R}^n$  eingeführt. Dieser soll nun verallgemeinert werden, indem man eine Ortsabhängigkeit von  $X$  zulässt.

### 1.24 Definition

Es sei  $X \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$  ein Vektorfeld, und  $g \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ . Dann heißt

$$L_X g \in C^\infty(U, \mathbb{R}) \quad , \quad L_X g(m) := Dg(m)(X(m))$$

(mit der im ersten Teil der Vorlesung Mathematik für Physikstudierende definierten totalen Ableitung  $D$ ) die **Lie-Ableitung von  $g$  in Richtung  $X$** .

### 1.25 Bemerkung (Lie-Ableitung)

Offensichtlich ist die Lie-Ableitung  $L_X$  linear, und sie erfüllt die *Leibniz-Regel*:

$$L_X(g_1 + g_2) = L_X g_1 + L_X g_2 \quad ; \quad L_X(g_1 g_2) = g_1 L_X g_2 + g_2 L_X g_1.$$

Außerdem gilt

$$L_{X+Y} = L_X + L_Y \quad , \quad L_{fX} = f L_X.$$

Bezüglich eines Koordinatensystems  $\varphi_1, \dots, \varphi_n : U \rightarrow \mathbb{R}$  haben wir die *Koordinatenvektorfelder*

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_i} \equiv \partial_{\varphi_i} : U \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (i = 1, \dots, n),$$

die durch

$$L_{\partial_{\varphi_i}} \varphi_k := \delta_{ik} \quad (i, k = 1, \dots, n) \quad (1.9)$$

fixiert sind, in deren Richtung also nur die  $i$ -te Koordinate variiert wird. Es gilt

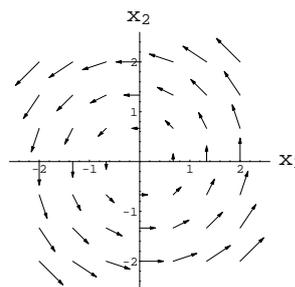
$$L_{\partial_{\varphi_i}} g(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \frac{\partial}{\partial \varphi_i} g(\varphi_1, \dots, \varphi_n),$$

die Lie-Ableitung in Richtung des  $i$ -ten Vektorfeldes ist also gleich der  $i$ -ten partiellen Ableitung; daher die Notation  $\frac{\partial}{\partial \varphi_i}$ . Man beachte, dass wegen (1.9) für  $n > 1$  die Kenntnis der  $i$ -ten Koordinate  $\varphi_i$  allein nicht ausreicht, um  $\frac{\partial}{\partial \varphi_i}$  zu berechnen.  $\diamond$

**1.26 Beispiel (Koordinatenvektorfelder)** Auf der offenen Teilmenge  $U := \mathbb{R}^2 \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\})$  des  $\mathbb{R}^2$  (geschlitzte Ebene) werden Polarkoordinaten

$$\varphi(x) := \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \quad , \quad r(x) := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

definiert (wobei der Winkel  $\varphi(x)$  für  $x_2 \leq 0$  stetig fortgesetzt wird, also  $\varphi(x) \in (-\pi, \pi)$  gilt). In kartesischen Koordinaten besitzt das Vektorfeld  $\frac{\partial}{\partial \varphi}$  die Form  $\frac{\partial}{\partial \varphi}(x) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$  (siehe Abbildung rechts), denn



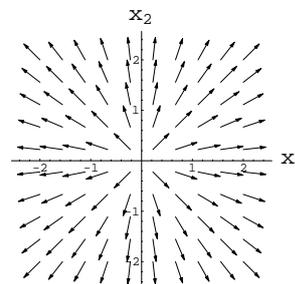
$$0 = L_{\frac{\partial}{\partial \varphi}} r = (x_1/r, x_2/r) \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$1 = L_{\frac{\partial}{\partial \varphi}} \varphi = \left( \frac{-x_2/x_1^2}{1 + (x_2/x_1)^2}, \frac{1/x_1}{1 + (x_2/x_1)^2} \right) \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Analog ist das radiale Vektorfeld gleich

$$\frac{\partial}{\partial r}(x) = \begin{pmatrix} x_1/r(x) \\ x_2/r(x) \end{pmatrix}$$

(siehe Abbildung rechts).



Ist für das Vektorfeld  $X$  die Trajektorie  $t \mapsto x(t, x_0)$  die Lösung des Anfangswertproblems

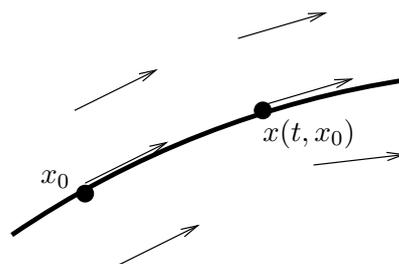
$$\dot{x} = X(x) \quad , \quad x(0) = x_0,$$

dann gilt  $\frac{d}{dt}x(t, x_0)|_{t=0} = X(x_0)$ , und damit für eine Funktion  $g$  auf dem Phasenraum

$$\boxed{L_X g(x_0) = \frac{d}{dt}g(x(t, x_0))|_{t=0}} \quad (1.10)$$

Die Lie-Ableitung in Richtung  $X$  ist also die zeitliche Ableitung der Funktion entlang der lokalen Lösungskurve des durch das Vektorfeld  $X$  definierten dynamischen Systems.

In analoger Weise kann man auch die Lie-Ableitung von Vektorfeldern und anderen Tensoren in  $X$ -Richtung einführen.



**1.27 Beispiel** Die Lie-Ableitung der Funktion  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ,  $g(x) := x_1^2$  bezüglich des Vektorfeldes  $X = \frac{\partial}{\partial \varphi}$  aus Beispiel 1.26 ist

$$L_X g(x) = (2x_1, 0) \begin{pmatrix} -x_2 \\ +x_1 \end{pmatrix} = -2x_1x_2,$$

siehe Abbildung 1.1. ◇

Lie-Ableitungen nach verschiedenen Vektorfeldern  $X, Y \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$  vertauschen im Allgemeinen nicht miteinander. Allerdings zeigt eine kleine Rechnung, dass für  $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$

$$(L_X L_Y - L_Y L_X)f = L_Z f$$

gilt, mit dem Vektorfeld

$$Z \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n) \quad , \quad Z = DY(X) - DX(Y).$$

Es ist bemerkenswert, dass überhaupt  $L_X L_Y - L_Y L_X$  eine Lie-Ableitung ist. Denn die Ausdrücke  $L_X L_Y$  und  $L_Y L_X$  enthalten zweite Ableitungen, während

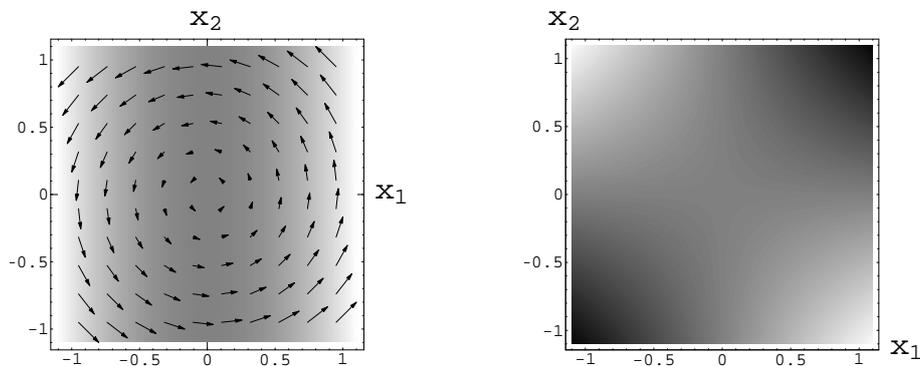


Abbildung 1.1: Contourplot von  $g$  und Vektorfeld  $X$  (links); Contourplot der Lieableitung  $L_X g$  (rechts)

ja  $L_Z$  ein Differentialoperator erster Ordnung ist.

Oft benutzt man den *Kommutator* (auch *Lie-Klammer* genannt)

$$[X, Y] := DY(X) - DX(Y)$$

als Bezeichnung für das Vektorfeld  $Z$ . Dies ist aus folgendem Grund naheliegend. Sind nämlich  $X$  und  $Y$  linear, d.h.

$$X(x) = \widehat{X}x \quad , \quad Y(x) = \widehat{Y}x \quad \text{mit} \quad \widehat{X}, \widehat{Y} \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}),$$

dann gilt  $DX(x) = \widehat{X}$ ,  $DY(x) = \widehat{Y}$ , also

$$[X, Y](x) = \widehat{Y}\widehat{X}(x) - \widehat{X}\widehat{Y}(x) =: [\widehat{Y}, \widehat{X}](x).$$

Der Kommutator der linearen Vektorfelder  $X$  und  $Y$  ist also wieder ein lineares Vektorfeld  $Z(x) = \widehat{Z}x$ , dessen Matrix  $\widehat{Z}$  der negative<sup>2</sup> Kommutator  $[\widehat{X}, \widehat{Y}]$  der Matrizen von  $X$  und  $Y$  ist.

Besitzen die Anfangswertprobleme

$$\dot{x} = X(x) \quad , \quad x(0) = x_0$$

bzw.

$$\dot{x} = Y(x) \quad , \quad x(0) = x_0$$

Lösungen (*Flüsse*)  $\Phi_t : U \rightarrow U$  bzw.  $\Psi_t : U \rightarrow U$  für alle Zeiten  $t \in \mathbb{R}$ , dann gilt

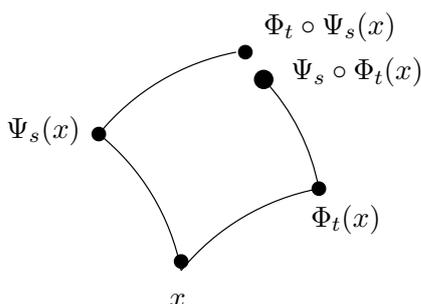
<sup>2</sup> Oft definiert man den Kommutator von Vektorfeldern daher mit umgekehrtem Vorzeichen.

**1.28 Satz** *Es gilt genau dann*

$$\Phi_t \circ \Psi_s = \Psi_s \circ \Phi_t \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

(die Flüsse  $\Phi_t$  und  $\Psi_s$  kommutieren), wenn  $[X, Y] = 0$ .

**Beweis:** Siehe z.B. ARNOL'D, [Ar, Kapitel 39]. □



**1.29 Bemerkung** Die *Lie-Ableitung* von Differentialformen nach einem Vektorfeld  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  auf der offenen Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ist allgemein als

$$L_X := \mathbf{i}_X d + d \mathbf{i}_X$$

definiert. Für eine Null-Form  $\omega \in \Omega^0(U)$ , also eine reelle Funktion, ist nach Definition  $\mathbf{i}_X \omega = 0$ , also  $L_X \omega = (d\omega)(X)$ , was mit Def. 1.24 übereinstimmt.  $\diamond$

## 2 Lösungsmethoden für gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir haben schon in *MP-2*, Kapitel 7 mit der Untersuchung gewöhnlicher Differentialgleichungen begonnen.

### 2.1 Trennung der Variablen

**2.1 Beispiel (Trennung der Variablen)** Das Anfangswertproblem (AWP)  $\dot{x} = x^2$ ,  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$  besitzt die folgenden Lösungen:

- $x_0 = 0$  :  $x(t) = 0$
- $x_0 > 0$  :  $x(t) = \frac{x_0}{1-t/x_0} \quad (t \in (-\infty, 1/x_0))$
- $x_0 < 0$  :  $x(t) = \frac{x_0}{1-t/x_0} \quad (t \in (1/x_0, \infty))$ .

Der Lösungsansatz für  $x_0 \neq 0$  ist

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dy}{y^2} = \int_0^t ds \quad , \text{ also } \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)} = t.$$

Allgemein kann man Differentialgleichungen erster Ordnung in einer abhängigen Variablen lösen, wenn sie die Form

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad \text{mit} \quad f(x, t) = g(x)h(t) \in C(I \times J, \mathbb{R})$$

haben, wir also eine Zerlegung von  $f$  in stetige reelle Funktionen  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $h : J \rightarrow \mathbb{R}$  auf den Intervallen  $I$  und  $J$  vornehmen können. Setzt man nämlich o.B.d.A.  $g > 0$  voraus (denn der Fall  $g(x)$  ist trivial,  $g < 0$  auf  $g > 0$  rückführbar, und wir können gegebenenfalls das Intervall  $I$  restringieren), dann ergibt sich für die Anfangsbedingungen

$$x(t_0) = x_0 \in I \quad , \quad t_0 \in J \quad \text{und}$$

$$G(x) := \int_{x_0}^x \frac{dy}{g(y)} \quad , \quad H(t) = \int_{t_0}^t h(s) ds$$

die Lösung

$$x(t) = G^{-1} \circ H(t) \quad (t \in J \cap F^{-1} \circ H(I)). \quad (2.1)$$

Dies verifiziert man (Hausaufgabe!) durch Einsetzen von (2.1) in die DGL und die Feststellung, dass in (2.1)  $x(t_0) = x_0$  gilt.

Die Lösung ist sogar eindeutig, wenn  $g \neq 0$  vorausgesetzt wird, ohne dass Lipschitz-Stetigkeit vorliegen muss (siehe Kapitel 6.2 des Skripts *Gewöhnliche Differentialgleichungen*).  $\diamond$

## 2.2 Bemerkung (Differentialgleichungen und Differentialformen)

Wir können die DGL auch in der Gestalt  $\omega = 0$  schreiben, für die Eins-Form

$$\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2) \quad , \quad \omega(t, x) := \frac{dx}{g(x)} - h(t)dt$$

Diese ist geschlossen, also nach dem Poincaré-Lemma 6.20 äußere Ableitung einer Funktion auf  $\mathbb{R}^2$ . Die Funktion gewinnt man durch Integration, und der Ansatz lässt sich auf beliebige geschlossene  $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$  und die mit ihnen zusammenhängenden Differentialgleichungen erweitern.  $\diamond$

## 2.2 Hamiltonsche Differentialgleichungen

Diese spielen in vielen Bereichen der Physik eine wichtige Rolle, z.B. in der klassischen Mechanik bei Abwesenheit von Reibungseffekten, in der geometrischen Optik usw.

### 2.3 Definition

- Ein Vektorfeld  $X \in C^1(P, \mathbb{R}^{2m})$  auf dem (offenen) Phasenraum  $P \subseteq \mathbb{R}^{2m}$  heißt **Hamiltonsch**, wenn mit  $\mathbb{J} := \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2m, \mathbb{R})$  gilt:

$$X = \mathbb{J}\nabla H \quad \text{mit} \quad H : P \rightarrow \mathbb{R}.$$

- $H$  heißt dann eine **Hamilton-Funktion** von  $X$ ,  $m$  (also die halbe Dimension des Phasenraumes  $P$ ) heißt **Zahl der Freiheitsgrade**.

### 2.4 Beispiel (Newtonsche Kraftgleichung)

Es sei  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine nur vom Ort  $q \in \mathbb{R}^3$  abhängige Kraft, und  $m > 0$  die Masse eines Teilchens in diesem Kraftfeld. Dann gilt nach Newton  $m\ddot{q} = F(q)$ , oder mit  $p := m\dot{q}$  (Impuls) das DGL-System erster Ordnung

$$\dot{p} = F(q) \quad , \quad \dot{q} = p/m.$$

Ist das Kraftfeld  $F$  nun *konservativ* im Sinn  $F = -\nabla V$  für  $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , dann ist für den Phasenraumpunkt  $x := \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla V(q) \\ p/m \end{pmatrix} = \mathbb{J}\nabla H(x)$$

mit  $H(p, q) := \frac{\|p\|^2}{2m} + V(q)$  als Hamilton-Funktion. ◇

In der *Himmelsmechanik* etwa ist die Gravitationskraft  $F(q) = -\gamma m \frac{q}{\|q\|^3}$  eines am Koordinatenursprung befindlichen Massepunktes der Masse  $m$  negativer Gradient des sogenannten Gravitationspotentials  $V(q) = \frac{-\gamma m}{\|q\|}$ , d.h.  $F = -\nabla V$ .

Natürlich ist  $H$  nicht schon durch  $X$  bestimmt, wir können ja eine beliebige Konstante zu  $H$  addieren. Interpretiert man  $H(x)$  als die Energie des Zustandes  $x$ , dann entspricht dies der physikalischen Tatsache, dass nicht Energien, sondern nur Energiedifferenzen messbar sind. Es gilt aber

**2.5 Satz** *Ist die Hamilton-Funktion  $H \in C^2(P, \mathbb{R})$ , dann ist sie entlang den Lösungskurven der Hamiltonschen Differentialgleichung  $\dot{x} = \mathbb{J}\nabla H(x)$  konstant.*

**Beweis:** Es sei  $t \mapsto x(t)$  Lösung des AWP

$$\dot{x} = \mathbb{J}\nabla H(x) \quad , \quad x(0) = x_0.$$

Dann ist

$$\frac{d}{dt}H(x(t)) = \langle \nabla H(x(t)), \dot{x}(t) \rangle = \langle \nabla H(x(t)), \mathbb{J}\nabla H(x(t)) \rangle = 0,$$

denn  $\mathbb{J}$  ist antiselbstadjungiert:  $\mathbb{J}^* = \mathbb{J}^T = -\mathbb{J}$ , sodass für alle Vektoren  $v \in \mathbb{R}^{2m}$

$$\langle v, \mathbb{J}v \rangle = \langle \mathbb{J}^*v, v \rangle = -\langle \mathbb{J}v, v \rangle = -\langle v, \mathbb{J}v \rangle = 0$$

ist. □

Das *Hamiltonsche Vektorfeld* von  $H : P \rightarrow \mathbb{R}$  wird oft mit

$$X_H := \mathbb{J}\nabla H : P \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$$

bezeichnet.

## 2.6 Bemerkung (Lösung für einen Freiheitsgrad)

Im Fall  $m = 1$  eines Freiheitsgrades können wir die Lösung der Hamiltonschen Differentialgleichung  $\dot{x} = X_H(x)$  auf die Integration einer Funktion zurückführen. Es sei nämlich bei  $x_0 \in P$  das Hamiltonsche Vektorfeld  $X_H(x_0) \neq 0$ . Dann ist auch  $\nabla H(x_0) \neq 0$ .

Außerdem gibt es eine Funktion  $g : P \rightarrow \mathbb{R}$ , für die  $\nabla g(x)$  linear unabhängig von  $\nabla H(x)$  ist. Damit bilden  $g$  und  $H$  bei  $x_0$  ein lokales Koordinatensystem, und wegen  $L_{X_H}H = 0$  ist

$$X_H = f \frac{\partial}{\partial g} \quad (2.2)$$

für eine geeignete Funktion  $f$ . Nun gilt

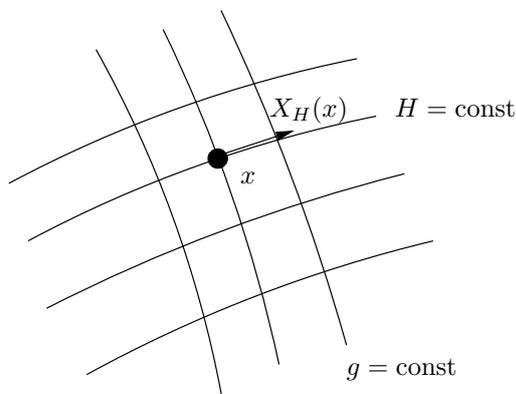
$$L_{X_H}g = f L_{\frac{\partial}{\partial g}}g = f,$$

sodass für die Lösung  $t \mapsto x(t, x_0)$  des AWP gilt:

$$\begin{aligned} g(x(t, x_0)) &= g(x_0) + \int_0^t \frac{d}{ds}g(x(s, x_0)) ds = g(x_0) + \int_0^t L_{X_H}g(x(s, x_0)) ds \\ &= g(x_0) + \int_0^t f(x(s, x_0)) ds. \end{aligned}$$

Schreibt man  $f$  in den lokalen Koordinaten  $g$  und  $H$ , also

$$f(x) = \hat{f}(g(x), H(x)),$$



dann ist die Zeitentwicklung von  $g$  implizit durch

$$\dot{g} = \hat{f}(g, E) \quad , \text{ d.h. } \int_{g_0}^{g(t)} \frac{d\tilde{g}}{\hat{f}(\tilde{g}, E)} = t \quad (2.3)$$

mit  $E := H(x_0)$  gegeben. Das Integral existiert, denn wegen der Stetigkeit von  $X_H$  ist in einer Umgebung von  $x_0$  das Hamiltonsche Vektorfeld ungleich Null, also wegen (2.2) auch  $\hat{f}(\hat{g}, E) \neq 0$ .  $\diamond$

### 2.7 Beispiel (Bewegung im Potential)

Für die Hamilton-Funktion  $H(p, q) := \frac{1}{2}p^2 + V(q)$  sei  $E := H(x_0)$  die Energie des Anfangswerts  $x_0 = (p_0, q_0)$ .

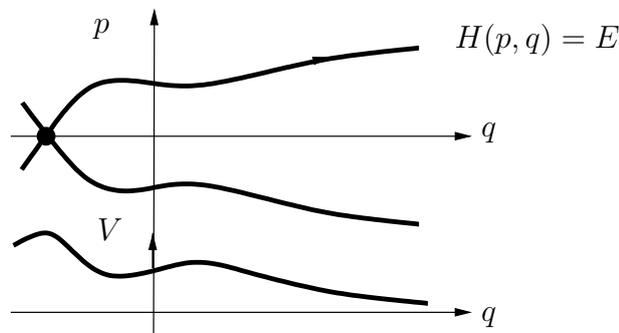


Abbildung 2.1: Potential  $V$  (unten) und Niveaulinien der Hamilton-Funktion (oben)

Außer an den *Umkehrpunkten*  $(p, q) = (0, q)$  ist die Koordinate  $g(p, q) := q$  von  $H$  unabhängig, und im  $(q, H)$ -Koordinatensystem gilt  $X_H = p \frac{\partial}{\partial q}$ , also  $f(p, q) = p$ . (2.3) entspricht

$$\int_{q_0}^{q(t)} \frac{dq}{\hat{p}(q, E)} = \int_{q_0}^{q(t)} \frac{dq}{\sqrt{2(E - V(q))}} = t.$$

Beispielsweise führt das periodische Potential  $V(q) = \sin(q)$  auf das sogenannte *elliptische Integral erster Gattung*  $F$  mit  $F(\varphi, k) := \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}}$ . Wie man einer Formelsammlung entnimmt oder sich von einem Computeralgebrasystem ausrechnen lässt, kann man die implizite Funktion  $t(q)$ ,

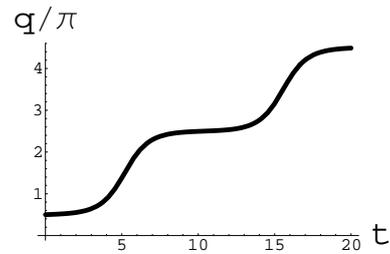
$$t = \int_{q_0}^q \frac{dq'}{\sqrt{2(E - \sin(q'))}}$$

durch

$$q(t) = 2 \operatorname{am} \left( \sqrt{(E-1)/2t}, \frac{2}{1-E} \right) + q_0 \quad (2.4)$$

invertieren. Dabei ist die *Jacobi-Amplitude*  $\operatorname{am}$  für  $u = F(\varphi, k)$  die Umkehrfunktion  $\varphi = \operatorname{am}(u, k)$ .

Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen von (2.4) für Energie  $E = 1.001$ , also etwas oberhalb des Maximums der potentiellen Energie  $V$ . Da die Hamilton-Funktion die des planaren Pendels ist, entspricht die Lösung einer Rotation des Pendels. Dabei bleibt es in der Nähe des oberen Umschlagpunktes  $q = \pi/2 \pmod{2\pi}$  fast stehen.  $\diamond$



Es sei  $H \in C^2(\mathbb{R}^{2m}, \mathbb{R})$ ,  $X_H$  das hamiltonsche Vektorfeld von  $H$  und  $\dot{x} = X_H(x)$  die Hamiltonsche DGL. Wir nehmen an, dass für alle  $t \in \mathbb{R}$  die Lösung  $\Phi_t(x_0)$  des AWP für  $x(0) = x_0$  existiert. Damit ist  $\Phi_t : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$  ein Diffeomorphismus.

### 2.8 Satz $\Phi_t$ ist volumenerhaltend.

**Beweis:** Wir zeigen dies nur für lineare Hamiltonsche DGLn. Sei also das Vektorfeld  $X_H : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$  linear, also

$$\Phi_t(x) = \exp(X_H t)(x) = \exp(At)x \quad \text{mit der Matrix } A := DX_H \in \operatorname{Mat}(2m, \mathbb{R}).$$

Daher ist  $D\Phi_t = \exp(\operatorname{tr}(A)t)$ . Nun ist  $A = D\mathbb{J}(DH)^T$ , also

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(\mathbb{J}D^2H) = \operatorname{tr}(D^2H\mathbb{J}).$$

$D^2H \in \operatorname{Mat}(2m, \mathbb{R})$  ist symmetrisch. Daher ist mit  $\mathbb{J}^T = -\mathbb{J}$

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr}(D^2H\mathbb{J}^T) = -\operatorname{tr}(D^2H\mathbb{J}) = -\operatorname{tr}(A),$$

also  $\operatorname{tr}(A) = 0$ .  $\square$

## 2.3 Integrabilität

Die Konstanz der Hamilton-Funktion  $H : P \rightarrow \mathbb{R}$  entlang der Orbits des Flusses bedeutet die effektive Verringerung der Dimension des Phasenraumes  $P \subseteq \mathbb{R}^{2n}$  um Eins, und damit, wie wir gesehen haben, eine Erleichterung unserer Aufgabe, die Hamiltonschen Differentialgleichungen zu lösen.

Gibt es noch weitere Phasenraumfunktionen, die entlang der Orbits konstant sind, dann hilft dies bei der Integration von Hamiltonschen Differentialgleichungen in höheren Dimensionen. Nun lässt sich dies für die Phasenraumfunktion  $F \in C^\infty(P)$  testen, indem wir berechnen, ob die Lie-Ableitung  $L_{X_H}F$

in Richtung des Hamiltonschen Vektorfeldes  $X_H = \mathbb{J}\nabla H$  von  $H$  gleich Null ist. Definieren wir allgemein die *Poissonklammer* zweier Phasenraumfunktionen  $F, H \in C^\infty(P)$  als

$$\{F, H\} \in C^\infty(P) \quad , \quad \{F, H\} := L_{X_H}F,$$

dann ergibt sich wegen  $\mathbb{J}^T = -\mathbb{J}$

$$\{H, F\} = DF(X_H) = DF(\mathbb{J}\nabla H) = \langle \nabla F, \mathbb{J}\nabla H \rangle = -\{F, H\}.$$

Wir betrachten eine Hamilton-Funktion  $H : P \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Phasenraum mit  $m$  Freiheitsgraden und  $m-1$  weitere Funktionen  $F_2, \dots, F_m : P \rightarrow \mathbb{R}$ , deren Poissonklammer mit der Hamilton-Funktion verschwindet:  $\{F_l, H\} = 0$ . Aus der Beziehung (1.10) zwischen Lie-Ableitung und Fluss folgt nun die Konstanz von  $F_l$  entlang der Lösungskurven von  $X_H$ .

Wir setzen der Einfachheit halber  $F_1 := H$  und nehmen an, dass der Bildpunkt  $f \in \mathbb{R}^m$  *regulärer Wert* der vektorwertigen Funktion

$$F := \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix} : P \rightarrow \mathbb{R}^m$$

ist, d.h. dass

$$\text{rang}(DF(x)) = n \quad (x \in F^{-1}(f))$$

gilt. Dann bleibt die Lösung  $t \mapsto x(t, x_0)$  des AWP  $\dot{x} = X_H(x)$ ,  $x(0) = x_0$  für  $x_0 \in M := F^{-1}(f)$  in  $M$ .

Nach dem Satz über implizite Funktionen (Satz 10.17 der *MP-2*) lässt sich  $M$  in der Umgebung jedes Punktes  $y \in M$  durch  $m$  Parameter koordinatisieren. Damit können wir die DGL vereinfacht als DGL erster Ordnung in nur  $m$  Variablen schreiben.

Gilt zusätzlich  $\{F_k, F_l\} = 0$  für alle  $1 \leq k < l \leq m$ , dann heißt das Hamiltonsche System *integrabel*, und es lässt sich explizit lösen, da die von den Funktionen  $F_k$  erzeugten Flüsse auf  $M$  gemäß Satz 1.28 kommutieren<sup>3</sup>.

## 3 Stabilität bei gewöhnlichen Differentialgleichungen

### 3.1 Allgemeine Bedeutung der Linearisierung

Wir besitzen jetzt eine Lösungsmethode für lineare DGLn (mit konstanten Koeffizienten). Es ist dies aber leider die einzige große Klasse "algorithmisch" lösbarer

<sup>3</sup>Siehe z.B. das Skript *Mathematische Physik I*

DGLn. Andererseits sind viele Anfangswertprobleme zwar nicht linear, können aber immerhin näherungsweise mithilfe linearer AWP's gelöst werden.

**3.1 Bemerkung** Ein Grund dafür ist die Tatsache, dass sich viele in der Natur auftretenden Systeme näherungsweise im Gleichgewicht befinden, also nahe bei einem kräftefreien Fall. Besitzt die ortsabhängige Kraft  $F$  eine Nullstelle bei  $q_s$ , dann gilt (für glattes  $F$ ) nach Taylor für  $q$  nahe bei  $q_s$

$$\begin{aligned} F(q) &= \underbrace{F(q_s)}_0 + DF(q_s)(q - q_s) + \mathcal{O}(\|q - q_s\|^2) \\ &= A(q - q_s) + \mathcal{O}(\|q - q_s\|^2) \end{aligned}$$

mit  $A := DF(q_s)$ . Führt man die Relativkoordinate  $y := q - q_s$  ein, so wird aus der Newtongleichung  $\ddot{q} = F(q)$  (für Masse 1)

$$\ddot{y} = Ay + \mathcal{O}(\|y\|^2).$$

Es liegt nun nahe (und ist auch richtig), anzunehmen, dass für kurze Zeiten die Lösungen des AWP für  $\ddot{y} = Ay$  mit betragsmäßig kleinen Anfangswerten  $y(0)$  und  $\dot{y}(0)$  nahe bei den entsprechenden Lösungen der nicht linearen DGL liegen. Manchmal gilt das sogar für alle Zeiten, zumindest wenn man statt der Lösungen die Orbits vergleicht, also die Zeitparametrisierung vergisst.  $\diamond$

Wir formulieren nun das Konzept der Linearisierung allgemein für Differentialgleichungssysteme erster Ordnung.

**3.2 Definition** Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ . Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x). \tag{3.1}$$

auf dem Phasenraum  $U$ .

1. Das Bild  $x(I) \subseteq U$  einer Lösungskurve  $x : I \rightarrow U$  von (3.1) heißt **Orbit**.
2. Ist  $x_s \in U$  Nullstelle des Vektorfeldes  $f$ , dann heißt  $x_s$  auch **Ruhelage** oder **Gleichgewichtslage** von (3.1).
3. Für eine Ruhelage  $x_s$  heißt die lineare Differentialgleichung

$$\dot{y} = Ay \quad \text{mit} \quad A := Df(x_s) \tag{3.2}$$

die **Linearisierung** von (3.1) bei  $x_s$ .

Die Nullstellen  $x_s$  heißen Ruhelagen, weil das AWP  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x(0) = x_s$  die eindeutige Lösung  $x(t) = x_s$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) besitzt.

Wir untersuchen an einem Beispiel den Zusammenhang zwischen den Lösungen von (3.1) und denen der Linearisierung (3.2).

### 3.3 Beispiel (Das planare Pendel)

Zunächst leiten wir mithilfe des Newtonschen Kraftgesetzes eine Differentialgleichung ab, die wir anschließend untersuchen.

Im ersten Schritt (oft *Modellierung* genannt) idealisieren wir das Pendel wie folgt. Es soll aus einem Massepunkt der Masse  $m > 0$  bestehen, der sich in einer Ebene auf einem Kreis mit Radius  $L > 0$  (Pendellänge) um den Ursprung bewegt. Seine Koordinaten seien  $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix}$ , und auf ihn wirke eine in  $-z_2$ -Richtung wirkende Kraft  $F(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -m \end{pmatrix}$  der Stärke  $m$  (Schwerkraft). Deren Komponente in Tangentialrichtung ist daher gleich  $-\sin \varphi$ . Es ergibt sich damit die Differentialgleichung

$$L\ddot{\varphi} = -\sin \varphi,$$

denn die Masse  $m$  tritt auf beiden Seiten des Newtonschen Kraftgesetzes als Faktor auf, kann also gekürzt werden. Auf dem Phasenraum  $U = \mathbb{R}^2$  erhalten wir durch Einführung der Winkelgeschwindigkeit  $v$  das Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\dot{\varphi} = v \quad , \quad \dot{v} = -\frac{1}{L} \sin \varphi.$$

Durch Reskalierung der Zeit können wir erreichen, dass  $L = 1$  ist.

Mit  $x := \begin{pmatrix} \varphi \\ v \end{pmatrix}$  ist

$$\dot{x} = f(x) = \begin{pmatrix} v \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Es gilt  $f(x + y) = f(x)$ , falls  $y = (0, 2\pi k)$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  ist. Innerhalb einer Periode ( $\varphi \in [0, 2\pi)$ ) besitzt aber  $f$  nur die Nullstellen  $x_s = (0, 0)$  und  $(0, \pi)$ , entsprechend der unteren bzw. oberen Ruhelage des Pendels. Linearisierung bei  $x_s = (0, 0)$  ergibt die lineare Differentialgleichung auf dem Phasenraum  $\mathbb{R}^2$

$$\dot{y} = Ay \quad \text{mit} \quad A = Df(x_s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese besitzt mit der Bezeichnung  $y = (q, p)$  die Lösung

$$q(t) = q_0 \cos t + p_0 \sin t \quad , \quad p(t) = -q_0 \sin t + p_0 \cos t, \quad (3.4)$$

mit der Periode  $2\pi$ . Abbildung Sind diese Lösungen für Anfangsbedingungen  $(q_0, p_0)$  in der Nähe der Ruhelage  $x_s = (0, 0)$  eine gute Näherung an die Lösungen von (3.3)?

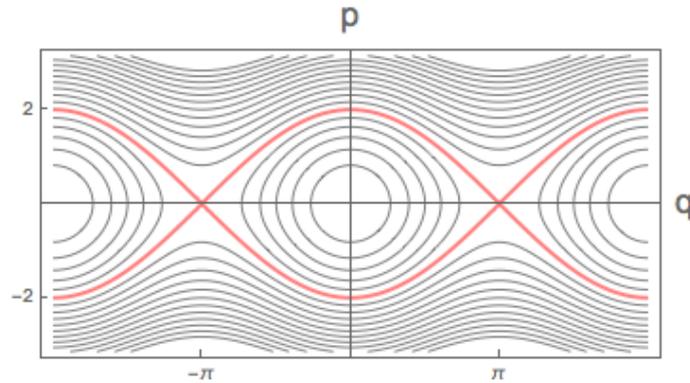


Abbildung 3.1: Rot: Niveaueurve für die Energie der oberen Ruhelage des Pendels

Um dies zu untersuchen, stellen wir fest, dass die *Hamilton-Funktion*<sup>4</sup> von (3.3)

$$H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad H(\varphi, v) = \frac{1}{2}v^2 - \cos \varphi$$

gemäß Satz 2.5 entlang der Lösungskurven ihren Wert nicht ändert:

$$\frac{d}{dt}H(\varphi(t), v(t)) = v\dot{v} + \sin(\varphi)\dot{\varphi} = -v \sin(\varphi) + v \sin(\varphi) = 0.$$

Damit fixieren die Niveaulinien von  $H$  im Phasenraum  $\mathbb{R}^2$  auch schon die Orbits der DGL (siehe Abbildung 3.1). Da  $x_s$  Minimalstelle von  $H$  ist, und die Hessesche Hess  $H(x_s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  positiv definit ist, sind diese Niveauflächen  $H^{-1}(H(x_0))$  für  $x_0$  nahe bei  $x_s$  näherungsweise von der Form eines Kreises mit Radius  $\|x_0\|$ , also nahe bei dem Orbit (3.4) der Linearisierung.

Damit bleibt insbesondere die Lösung von (3.3) für alle Zeiten in der Nähe von  $x_s$ . Diese Lösung kann man mittels Übergang von  $\varphi$  zu  $\varphi + \pi/2$  durch die in Beispiel 2.7 berechnete Lösung ausdrücken. Die Schwingungsdauer des Pendels ist aber größer als die Periode  $2\pi$  der Lösung (3.4) der linearen DGL, sodass die beiden Lösungen nach einiger Zeit nicht mehr synchron sind (siehe Abb. 3.2).

### 3.2 Stabilitätsbegriffe für Gleichgewichtslagen

Anschaulich wird man eine Gleichgewichtslage  $x_s$  der DGL  $\dot{x} = f(x)$  dann stabil nennen, wenn benachbarte Lösungen nicht von  $x_s$  wegstreben. Diese Vorstellung

<sup>4</sup>Physikalisch ist  $H(\varphi, v)$  die Gesamtenergie des Pendels mit Winkel  $\varphi$  und Winkelgeschwindigkeit  $v$

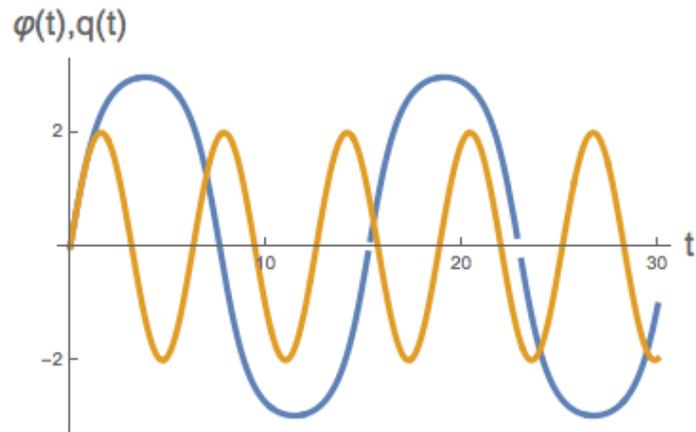


Abbildung 3.2: Pendelausschlag als Funktion der Zeit, und Linearisierung

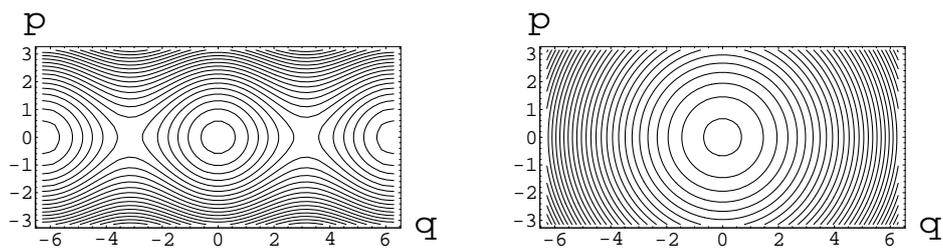


Abbildung 3.3: Orbits der Pendelgleichung (links) und ihrer Linearisierung an der unteren Gleichgewichtslage (rechts)

muss natürlich noch präzisiert werden, ihre praktischen Implikationen sind aber offensichtlich.

### 3.4 Beispiel (Bedeutung von Gleichgewichtslagen)

In vielen technischen Anwendungen ist man daran interessiert, das System in eine Gleichgewichtslage zu bringen. Man kann das aber natürlich nur bis auf einen gewissen Fehler erreichen.

Ist nun die Gleichgewichtslage stabil, dann ist auch in Zukunft das System nahe bei der Gleichgewichtslage, sonst im Allgemeinen nicht.

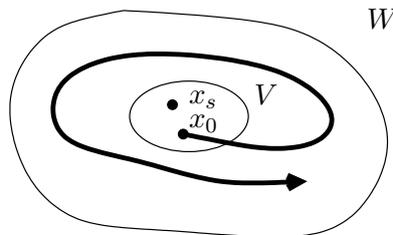
Das Pendel ist in diesem Sinn in seiner unteren Gleichgewichtslage stabil, in seiner oberen nicht.

Ist das Pendel ungedämpft, so wird es für alle Zeiten kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage vollführen; ist es gedämpft, dann wird es sich der Gleichgewichtslage immer mehr annähern. Entsprechend unterscheiden wir auch zwei Stabilitätsbegriffe.  $\diamond$

**3.5 Definition** Die Gleichgewichtslage  $x_s \in U \subseteq \mathbb{R}^n$  der DGL

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad f \in C^1(U, \mathbb{R}^n) \quad (3.5)$$

- heißt **Liapunov-stabil**, falls für jede Umgebung  $W \subseteq U$  von  $x_s$  eine Umgebung  $V \subseteq W$  von  $x_s$  existiert, sodass das AWP für alle Anfangswerte  $x_0 \in V$  und alle Zeiten  $t \geq 0$  lösbar ist und die Lösungen  $\varphi$  in  $W$  bleiben ( $\varphi([0, \infty)) \subseteq W$ ).
- Andernfalls heißt sie **instabil**.

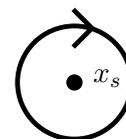


### 3.6 Beispiel

1. Die untere Gleichgewichtslage  $x_s := (\varphi, v) = (0, 0)$  des planaren Pendels

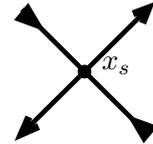
$$\begin{cases} \dot{\varphi} = v \\ \dot{v} = -\sin \varphi \end{cases}$$

ist Liapunov-stabil, denn jede Umgebung  $W$  von  $x_s$  enthält eine Umgebung  $V$  der Form  $V = H^{-1}((-\infty, E))$ , wobei  $H(v, \varphi) = \frac{v^2}{2} - \cos \varphi$  die Hamilton-Funktion ist.



$V$  ist aber flussinvariant, denn die Energie  $H$  ist, wie wir gesehen haben, auf den Lösungskurven konstant (lässt man Winkel  $\varphi \in \mathbb{R}$  zu, muss man statt  $H^{-1}((-\infty, E))$  die  $x_s$  enthaltende Zusammenhangskomponente  $V$  dieser nicht beschränkten Menge verwenden).

2. Die obere Gleichgewichtslage  $x_s := (\varphi, v) = (\pi, 0)$  ist *nicht* Liapunov-stabil, denn  $H(x_s) = 1$ , und  $E^{-1}(1)$  enthält von  $x_s$  verschiedene, aber diesem beliebig nahe Phasenraumpunkte, die von  $x_s$  wegstreben.



Der Begriff der Liapunov-Stabilität ist vergleichsweise schwach, denn er setzt ja keine Annäherung an die Gleichgewichtslage voraus. So ist der untere Gleichgewichtspunkt des Pendelbeispiels auch für negative Zeiten, also bei Richtungsumkehr des Vektorfeldes, Liapunov-stabil.

**3.7 Definition** Die Gleichgewichtslage  $x_s$  von (3.5) heißt **asymptotisch stabil**, wenn sie Liapunov-stabil ist und eine Umgebung  $V \subseteq U$  von  $x_s$  existiert mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_s \quad \text{für alle } x(0) \in V.$$

### 3.8 Beispiel (Asymptotische Stabilität)

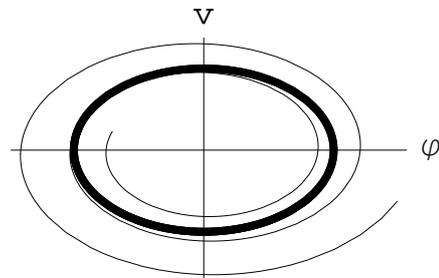
- Die untere Gleichgewichtslage  $x_s = (0, 0)$  des Pendels ist *nicht* asymptotisch stabil, denn nur  $x_s$  selbst hat Energie  $H(x_s) = -1$ , alle Nachbarpunkte haben echt größere Energie, und diese bleibt erhalten.
- Wirkt auf das Pendel eine geschwindigkeitsproportionale Reibung mit Proportionalitätskonstante  $k > 0$ , dann wird seine Bewegung durch die DGL

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = v \\ \dot{v} = -\sin \varphi - k \cdot v \end{cases}$$

beschrieben. In diesem Fall ist die untere Gleichgewichtslage sogar asymptotisch stabil. Es gilt nämlich für  $H(\varphi, v) = \frac{1}{2}v^2 - \cos \varphi$

$$\frac{d}{dt}H(\varphi(t), v(t)) = v(t) \cdot \dot{v}(t) + \sin(\varphi) \cdot \dot{\varphi} = -k(v(t))^2 \leq 0,$$

was ja auch anschaulich zu erwarten ist. Man kann nun zeigen, dass mit der Zeit die Energie  $H$  tatsächlich gegen  $-1$  geht, der Orbit also auf die untere Gleichgewichtslage zusteuert. In diesem Beispiel spielt  $H$  die Rolle einer *Liapunov-Funktion*, d.h. einer entlang der Lösung monoton fallenden Phasenraumfunktion  $H$ .



### 3.3 Stabilitätskriterien für Gleichgewichtslagen

Das letzte Beispiel zeigt eine wichtige Beweisidee für asymptotische Stabilität. Man möchte ja Stabilitätsfragen auch für DGLn klären, deren Lösungen man nicht hinschreiben kann. Die Rolle der Funktion  $H$  bestand nun in der Tatsache, dass die Mengen  $H^{-1}((-\infty, \varepsilon)) \subset U$  Umgebungen der Gleichgewichtslage waren, die wegen  $\frac{dH}{dt} \leq 0$  nicht verlassen werden können. Die Größe von  $H$  ist ein Maß für den Abstand von der Gleichgewichtslage, und dieser wird immer kleiner. Unsere Strategie besteht nun darin, zunächst Kriterien für die Stabilität im linearen Fall zu entwickeln, um danach, soweit möglich, diese auf den nichtlinearen Fall mittels Linearisierung zu übertragen.

Der lineare Fall ist dabei ganz einfach:

**3.9 Satz** *Gilt für die Eigenwerte  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  von  $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$   $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ , dann ist die Gleichgewichtslage  $0 \in \mathbb{R}^n$  der DGL  $\dot{x} = Ax$  asymptotisch stabil.*

**Beweis:**

1. Die Einträge der Matrixfunktion  $t \mapsto \exp(At)$  sind Summen von  $\lambda_i$ -Quasipolynomen, also von der Form  $\sum_i e^{\lambda_i t} p_i(t)$  mit Polynomen  $p_i$ . Damit ist wegen  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$  ihr  $t \rightarrow \infty$ -Limes Null, also auch  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\exp(At)\| = 0$ .
2. Da  $\sup_{t \geq 0} \|\exp(At)\| < \infty$ , ist die Gleichgewichtslage  $0$  Liapunov-stabil. □

Wir betrachten nun eine nicht notwendig lineare DGL auf  $U \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$$

in einer Umgebung einer Gleichgewichtslage  $x_s$ . Von dieser können wir (durch Einführung verschobener Koordinaten  $x - x_s$ ) o.B.d.A. annehmen, dass sie sich im Nullpunkt befindet.

Mit  $A := Df(0)$  bezeichne

$$R \in C^1(U, \mathbb{R}^n) \quad , \quad R(x) := f(x) - Ax$$

die Abweichung des Vektorfeldes von seiner Linearisierung an der Gleichgewichtslage.

Wir wollen nun zeigen, dass die Lösungen der DGL in führender Ordnung durch die Linearisierung von  $f$  kontrolliert werden, soweit wir uns in der Nähe der Gleichgewichtslage befinden. Dazu benutzen wir das

**3.10 Lemma**  $x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}R(x(s)) ds$

**Beweis:** Wir setzen die Lösung  $x(t)$  des AWP  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x(0) = x_0$  in der Form

$$x(t) = e^{At}c(t) \quad \text{mit} \quad c(0) = x_0$$

an, und suchen eine Bestimmungsgleichung für den Vektor  $c(t)$  (sog. *Variation der Konstanten*). Es gilt

$$\dot{x}(s) = Ae^{As}c(s) + e^{As}\dot{c}(s) = Ax(s) + e^{As}\dot{c}(s)$$

und

$$\dot{x}(s) = Ax(s) + R(x(s)),$$

also

$$e^{As}\dot{c}(s) = R(x(s)) \quad \text{oder} \quad \dot{c}(s) = e^{-As}R(x(s)).$$

Damit ist

$$c(t) = c(0) + \int_0^t \dot{c}(s) ds = x_0 + \int_0^t e^{-As}R(x(s)) ds$$

und

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}R(x(s)) ds.$$

□

Scheinbar nützt uns diese Identität nicht viel, denn auch auf der rechten Seite taucht  $x(s)$ , also die unbekannte Lösung des AWP auf.

Wir können aber die Gronwall–Ungleichung auf diese Integralgleichung anwenden. Diese in der Differentialgleichungstheorie wichtige Abschätzung ähnelt Münchhausens Methode, sich an den eigenen Haaren aus dem Sumpf zu ziehen.

### 3.11 Lemma (Gronwall–Ungleichung)

Für  $f, g \in C^0([t_0, t_1], [0, \infty))$  gelte mit einem geeigneten  $a \geq 0$  die Ungleichung

$$f(t) \leq a + \int_{t_0}^t f(s)g(s) ds \quad (t \in [t_0, t_1]).$$

Dann ist

$$f(t) \leq a \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t g(s) ds\right) \quad (t \in [t_0, t_1]).$$

**Beweis:** • Ist  $a > 0$ , dann gilt für die rechte Seite  $h(t) := a + \int_{t_0}^t f(s)g(s) ds$  der Voraussetzung  $h(t) > 0$  und  $h'(t) = f(t)g(t) \leq h(t)g(t)$ , also  $\frac{h'(t)}{h(t)} \leq g(t)$ .

Integration ergibt  $\ln\left(\frac{h(t)}{a}\right) \leq \int_{t_0}^t g(s) ds$ , oder  $h(t) \leq a \exp\left(\int_{t_0}^t g(s) ds\right)$ , also die Behauptung.

• Ist  $a = 0$ , dann gelten Voraussetzung und Resultat für alle  $\hat{a} := \varepsilon > 0$ , also ist  $f = 0$ . □

**3.12 Bemerkung (Gronwall–Ungleichung)** Man kann sich die Abschätzung leicht merken, wenn man Gleichheit annimmt. Die Integralgleichung

$$f(t) = a + \int_{t_0}^t f(s)g(s) ds$$

entspricht ja dem Anfangswertproblem  $\dot{f} = f \cdot g$ ,  $f(t_0) = a$  mit der Lösung  $f(t) = a \exp\left(\int_{t_0}^t g(s) ds\right)$ .  $\diamond$

### 3.13 Satz Eine Gleichgewichtslage $x_s \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ der DGL

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$$

ist asymptotisch stabil, wenn für die Eigenwerte  $\lambda$  von  $Df(x_s)$  gilt:  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ .

**Beweis:** • Wieder können wir durch eine Verschiebung  $x_s = 0$  erreichen. Da  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen ist, gehört eine Kugelumgebung vom positiven Radius  $\tilde{r}$  zu  $U$ .

• Für die Eigenwerte  $\lambda_i$  von  $A := Df(x_s)$  gelte die Abschätzung  $\operatorname{Re}(\lambda_i) < -\Lambda$ ,  $\Lambda > 0$  geeignet. Dann gibt es ein  $c > 0$ , sodass gilt

$$\|e^{At}\| \leq c \cdot e^{-\Lambda t} \quad (t \geq 0).$$

Das ersieht man aus der Tatsache, dass die Einträge von  $e^{At}$  Summen von  $\lambda_i$ -Quasipolynomen  $e^{\lambda_i t} p_i(t)$  sind und dass wegen  $\operatorname{Re}(\lambda_i) + \Lambda < 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp((\lambda_i + \Lambda)t) p_i(t) = 0$$

ist.

• Nun existiert ein Radius  $r \in (0, \tilde{r})$  mit

$$\|R(x)\| \leq \frac{\Lambda}{2c} \|x\| \quad , \quad \text{falls} \quad \|x\| \leq r, \quad (3.6)$$

denn  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|R(x)\|}{\|x\|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|f(x) - Df(0) \cdot x\|}{\|x\|} = 0$ .

• Wenn wir nun zeigen können, dass aus

$$\|x(0)\| \leq \varepsilon < \frac{r}{c}$$

folgt, dass für  $t \geq 0$  gilt:

$$\|x(t)\| \leq c\varepsilon e^{-\Lambda t/2}, \quad (3.7)$$

dann haben wir den Satz bewiesen, denn für die rechte Seite von (3.7) gilt:  $c\varepsilon e^{-\Lambda t/2} \leq c\varepsilon < r < \tilde{r}$ , und für  $t \rightarrow \infty$  strebt sie gegen Null.

Nun gilt nach Lemma 3.10:  $x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}R(x(s)) ds$ , woraus mit (3.6) die Ungleichung

$$\|x(t)\| \leq ce^{-\Lambda t}\|x_0\| + \int_0^t ce^{-\Lambda(t-s)} \frac{\Lambda}{2c} \|x(s)\| ds$$

folgt, soweit  $\|x\| \leq r$ .

Setzt man  $F(t) := e^{\Lambda t}\|x(t)\|$ , dann gilt

$$F(t) \leq \underbrace{c\|x_0\|}_{=:a} + \int_0^t \underbrace{\frac{\Lambda}{2}}_{=:g(s)} F(s) ds,$$

also nach dem Gronwall-Lemma 3.11

$$F(t) \leq c\|x_0\| \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^t \Lambda ds\right) \leq c\epsilon e^{\frac{\Lambda}{2}t} \leq r e^{\frac{\Lambda}{2}t}$$

oder  $\|x(t)\| \leq r e^{-\frac{\Lambda}{2}t}$ . Die Lösungskurve bleibt also für alle positiven Zeiten in der Vollkugel  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$  und konvergiert gegen Null.  $\square$

**3.14 Bemerkung** Der Beweis lieferte zusätzlich die Aussage, dass alle  $x \in U$  mit  $\|x\| < \frac{r}{c}$  zu gegen die Gleichgewichtslage konvergierenden Orbits gehören, also in deren Einzugsbereich, dem so genannten *Bassin*, liegen.  $\diamond$

Während ein hinreichendes Kriterium für das Vorliegen *asymptotischer Stabilität* die strikte Ungleichung  $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$  für die Eigenwerte  $\lambda_i$  der Jacobi-Matrix war, ist die Situation bezüglich der Liapunov-Stabilität komplizierter.

**3.15 Satz** *Besitzen die Eigenwerte  $\lambda_i$  von  $A \in \operatorname{Mat}(n, \mathbb{R})$  Realteil  $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$ , und ist im Fall  $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$  die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen, dann ist  $0 \in \mathbb{R}^n$  Liapunov-stabile Gleichgewichtslage der DGL  $\dot{x} = Ax$ .*

**Beweis:** • Aus der Jordan-Normalform  $A = VJV^{-1}$  mit Jordan-Matrix  $J$  der Form

$$J = \begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & J_{r_2}(\lambda_2) & \\ & & \ddots \\ 0 & & & J_{r_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}, \quad J_r(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & \ddots & \lambda \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}(r, \mathbb{C})$$

folgt mit

$$\exp(Jt) = \begin{pmatrix} \exp(J_{r_1}(\lambda_1)t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(J_{r_k}(\lambda_k)t) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

die Liapunov-Stabilität der Gleichgewichtslage aus

$$\|\exp(At)\| = \|V \exp(Jt) V^{-1}\| \leq \|V\| \|V^{-1}\| \|\exp(Jt)\|,$$

wenn für alle Jordanblöcke  $J_{r_i}(\lambda_i)$  von  $J$  der Ursprung  $0 \in \mathbb{C}^{r_i}$  Liapunov-stabile Gleichgewichtslage der DGL  $\dot{y} = J_{r_i}(\lambda_i)y$  ist.

- Aus  $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$  folgt sogar asymptotische Stabilität.
- Da für einen komplexen Eigenwert  $\lambda$  von  $A$  mit  $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$  die geometrische Vielfachheit nach Voraussetzung gleich der algebraischen ist, sind die ihm zugeordneten Jordanblöcke alle eindimensional:  $J_{r_i}(\lambda_i) = \lambda$ . Damit ist in diesem Fall

$$\|\exp(J_{r_i}(\lambda_i)t)\| = |\cos(\operatorname{Im}(\lambda)t) + i \sin(\operatorname{Im}(\lambda)t)| = 1. \quad \square$$

**3.16 Bemerkung** Dass man die Gleichheit von geometrischer und algebraischer Vielfachheit fordern muss, sieht man schon am Beispiel von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \diamond$$

Leider kann man nicht wie im Fall der asymptotischen Stabilität vom linearen auf den nicht linearen Fall folgern.

**3.17 Beispiel** DGL  $\dot{x} = \alpha x + \beta x^3$  mit Parametern  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Die Null ist Gleichgewichtslage der DGL und ihrer Linearisierung  $\dot{y} = \alpha y$ .

	linearisierte Gleichung	nicht lineare Gleichung
$\alpha < 0$	asymptotisch stabil	asymptotisch stabil
$\alpha > 0$	instabil	instabil
$\alpha = 0$	Liapunov-stabil	$\left\{ \begin{array}{l} \text{asymptotisch stabil für } \beta < 0 \\ \text{stabil für } \beta = 0 \\ \text{instabil für } \beta > 0. \end{array} \right.$

**3.18 Bemerkung** Anschaulich gesprochen kann asymptotische Stabilität nur vorliegen, wenn der Fluss in der Nähe der Gleichgewichtslage das Phasenraumvolumen verkleinert. Daher kann man in physikalischen Situationen ohne Reibungseffekte höchstens Liapunov-Stabilität erwarten. Das hat z.B. zur Folge, dass die Frage der **Stabilität des Sonnensystems** sehr subtil ist.  $\diamond$

## 4 Maß und Integration

Die Messung und Berechnung von Längen, Flächen und Volumina gehört zu den ersten mathematischen Aktivitäten der Menschheit. Integration und Volumenberechnung aber sind zwei Seiten einer Medaille:

- In der *Analysis I* wurde das Riemann-Integral einer (positiven) reellen Funktion als Fläche unter dem Graphen der Funktion eingeführt. Diese Idee wird jetzt auf Funktionen mehrerer Variablen erweitert.
- Ist andererseits  $A \subset \mathbb{R}^n$  eine (messbare) Teilmenge, dann ist ihr Maß gleich dem Integral  $\int \mathbb{1}_A dx$  ihrer charakteristischen Funktion.

Tatsächlich ist die Integration historisch wesentlich älter als die Differentiation, die ja (in einer Dimension) ihre Umkehroperation ist.

Andererseits hat sich der Integralbegriff zusammen mit dem Begriff der Funktion erweitert. Bis zum 19. Jahrhundert waren in der Regel die betrachteten Funktionen stetig (sogar beliebig oft stetig differenzierbar). In der Zwischenzeit ist uns der Gedanke vertraut geworden, dass fraktale Mengen und Funktionen nicht nur als mathematische Konstrukte sondern auch für die Beschreibung von Naturvorgängen von Bedeutung sind.

Schon beim *Riemann-Integral* muss ja die zu integrierende Funktion nicht stetig sein, sondern kann Sprungstellen besitzen, wenn diese sich nicht häufen.

In den nächsten Wochen werden Sie den Begriff des *Lebesgue-Integrals* kennen lernen. Man kann noch mehr Funktionen Lebesgue-integrieren als die Riemann-integrieren, z.B. die charakteristische Funktion

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$$

der Teilmenge  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  der rationalen Zahlen, und es ist  $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} dx = 0$ . Dies bedeutet, dass  $\mathbb{Q}$  im Gegensatz zu den irrationalen Zahlen Maß Null besitzt und korrespondiert mit der Abzählbarkeit von  $\mathbb{Q}$ . Dass man bei der Lebesgue-Integration allgemein sogenannte *Nullmengen* wie z.B.  $\mathbb{Q}$  unberücksichtigt lassen kann, ist oft praktisch.

Der Hauptvorteil des Lebesgue-Integrals gegenüber dem Riemann-Integral ist aber, dass es sich bei Operationen wie Limesbildung etc. einfacher verhält.

Für Funktionen, für die *beide* Integralbegriffe definiert sind, stimmen aber Riemann- und Lebesgue-Integral überein.

Die Grundidee aller Integration ist es, das  $(n + 1)$ -dimensionale Volumen unter dem Graphen von  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  zu betrachten. Integration lässt sich also auf die Berechnung von Maßen zurückführen<sup>5</sup>. In einem gewissen Sinn sind Maße damit ein fundamentaleres Konzept als das der Integration.

Ein *Maß*  $\mu$  auf einer Menge  $M$  wie z.B. dem  $\mathbb{R}^n$  ordnet geeigneten Teilmengen  $A \subseteq M$  Zahlen

$$\mu(A) \in [0, \infty] := [0, \infty) \cup \{\infty\}$$

zu, eben das Maß von  $A$ . Diese Teilmengen heißen *messbar*. Die Leere Menge ist dabei messbar, mit  $\mu(\emptyset) = 0$ . Sind die messbare Teilmengen  $A_1$  und  $A_2$  disjunkt, dann gilt außerdem

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2).$$

(sog. *Additivität* von  $\mu$ ). Das Buch [Ba] von BAUER gibt eine Einführung in die allgemeine Maß- und Integrationstheorie. Siehe auch das Skript *Analysis III*. Wichtige Maße sind z.B. die folgenden.

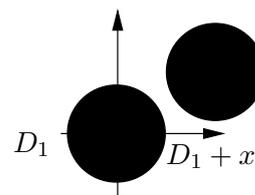
**4.1 Beispiel 1.** Das *Zählmaß*  $m$  auf einer endlichen Menge  $M$ , mit

$$m(A) := |A| \quad (A \subseteq M).$$

Hier sind insbesondere alle Teilmengen messbar.

2. Das *Lebesgue-Maß*  $\lambda^n$  auf dem  $\mathbb{R}^n$ , das wir bald kennen lernen,

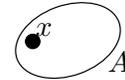
zeichnet sich dadurch aus, dass es einem verschobenen Körper das gleiche Volumen zuordnet wie dem unverschobenen, es also *translationsinvariant* ist, und der Einheitswürfel  $[0, 1]^n$  Maß 1 besitzt.



<sup>5</sup>Diesen Weg werden wir allerdings nicht verfolgen.

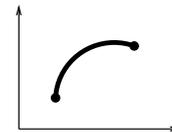
3. Das *Dirac-Maß*  $\delta_x$  ist im Punkt  $x$  des  $\mathbb{R}^n$  konzentriert, und für  $A \subset \mathbb{R}^n$  ist

$$\delta_x(A) \equiv \int_A \delta_x := \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases} .$$



Dieses Maß ist also nicht translationsinvariant

4. Wir wollen z.B. auch die Länge der Spur einer *Kurve* oder allgemeiner den Flächeninhalt einer  $d$ -dimensionalen Fläche im  $\mathbb{R}^n$  messen. Auch das dafür benutzte Maß  $\mu_d$  ist translations- und rotationsinvariant, es ordnet aber der  $d$ -dimensionalen Einheitsfläche  $[0, 1]^d \times \{0\} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} = \mathbb{R}^n$  Maß 1 zu. Entsprechend hat aber für  $d < n$  hat der Einheitswürfel Maß  $\mu_d([0, 1]^n) = \infty$ .



5. Man kann sogar sog. *Hausdorff-Maße*  $\mu_d$  konstruieren, die Mengen beliebiger fraktaler Dimension  $d \in [0, n]$  messen. Genau genommen *definiert* man die Dimension der Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  durch  $d(A) := \inf\{d' > 0 \mid \mu_{d'}(A) = 0\}$ .

6. Im Zusammenhang mit dem sog. Feynmanschen *Pfadintegral* der Quantenmechanik wird auf dem unendlich-dimensionalen Raum  $M$  der Wege zwischen zwei Punkten des Konfigurationsraumes  $\mathbb{R}^d$  ein *Wahrscheinlichkeitsmaß* (also ein Maß  $\mu$  auf  $M$  mit  $\mu(M) = 1$ ) definiert.

Dabei erhalten Wege, die in der Nähe von Lösungskurven der DGL der klassischen Mechanik sind, ein großes Gewicht.  $\diamond$



## 4.1 Treppenfunktionen

Nach diesem kleinen Überblick wollen wir aber an die Arbeit gehen. Die Darstellung lehnt sich an das Buch *Analysis II* [Ko] von KÖNIGSBERGER an, das sich durch eine originelle Einführung des Lebesgue-Integrals auszeichnet.

*Intervallen*  $I$  der Form  $I = [a, b), (a, b), (a, b]$  und  $[a, b]$  (mit Intervallgrenzen  $-\infty < a \leq b < \infty$ ) weisen wir das Maß  $|I| := b - a$  zu.

Entsprechend setzen wir das Lebesgue-Maß des *Quaders*

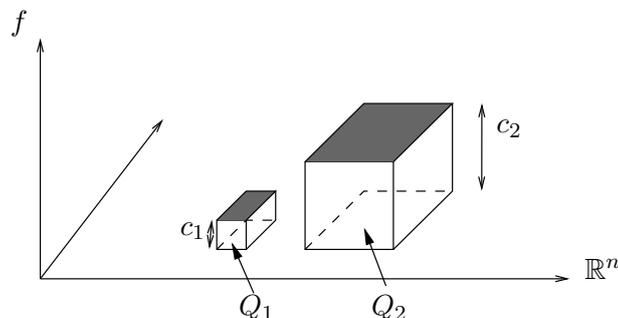
$$Q := I^{(1)} \times \dots \times I^{(n)} \subset \mathbb{R}^n \tag{4.1}$$

gleich  $v_n(Q) \equiv v(Q) := |I^{(1)}| \cdot \dots \cdot |I^{(n)}|$ .

Die Quader sind jetzt unsere Bausteine, mit denen wir allgemeinere Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  ausschöpfen und überdecken.

## 4.2 Definition

- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **Treppenfunktion**, wenn es disjunkte Quader  $Q_1, \dots, Q_s \subset \mathbb{R}^n$  mit  $f|_{Q_i}$  konstant und  $f|_{\mathbb{R}^n \setminus (Q_1 \cup \dots \cup Q_s)} = 0$  gibt.
- Es sei  $\mathcal{T}_n$  die Menge der Treppenfunktionen des  $\mathbb{R}^n$ .



Setzen wir  $c_i := f|_{Q_i}$ , dann gilt

$$f = \sum_{i=1}^s c_i \mathbb{1}_{Q_i}. \quad (4.2)$$

Es seien für  $k = 1, \dots, n$

$$\pi^{(k)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_k$$

die Projektionen. Dann ist  $\pi^{(k)}(Q) = I^{(k)}$  für den Quader aus (4.1). Wir verfeinern nun die Darstellung (4.2) der Treppenfunktion  $f$ , indem wir zunächst für die  $k$ -te Koordinate die nicht leere endliche Menge

$$M^{(k)} := \bigcup_{i=1}^s \partial \pi^{(k)}(Q_i)$$

der Intervallgrenzen projizierter Quader einführen.

Sind umgekehrt

$$M^{(k)} = \{a_1^{(k)}, \dots, a_{s_k}^{(k)}\} \subset \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad a_i^{(k)} < a_{i+1}^{(k)}$$

solche Mengen, dann ist das Intervall  $[a_1^{(k)}, a_{s_k}^{(k)}]$  disjunkte Vereinigung der Intervalle  $I_1^{(k)}, \dots, I_{t_k}^{(k)}$  mit  $t_k := 2s_k - 1$  und

$$I_{2l}^{(k)} := (a_l^{(k)}, a_{l+1}^{(k)}) \quad , \quad I_{2l-1}^{(k)} := \{a_l^{(k)}\}.$$

Benutzt man nun die aus der Darstellung (4.2) der Treppenfunktion  $f$  gewonnenen Mengen  $M^{(k)}$ , dann ist  $f$  auf den Quadern

$$I_{j_1}^{(1)} \times \dots \times I_{j_n}^{(n)} \subset \mathbb{R}^n \quad (j_k \in \{1, \dots, t_k\}) \quad (4.3)$$

konstant, und diese Quader sind disjunkt, siehe Abbildung 4.1.

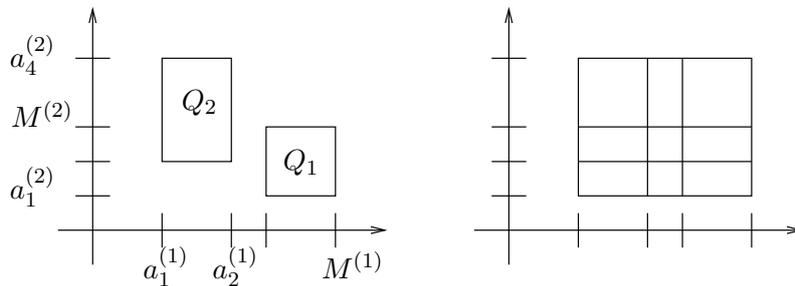


Abbildung 4.1: Quader in der Ebene (links); Partition mittels Intervallgrenzen  $M^{(1)}, M^{(2)}$  (rechts)

**4.3 Lemma**  $\mathcal{T}_n$  ist ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum, und für  $f \in \mathcal{T}_n$  ist auch  $|f| \in \mathcal{T}_n$ .

**Beweis:**

- Es seien  $f^I = \sum_{i=1}^{s^I} c_i^I \mathbb{1}_{Q_i^I}$  und  $f^{II} = \sum_{j=1}^{s^{II}} c_j^{II} \mathbb{1}_{Q_j^{II}}$  Treppenfunktionen in  $\mathcal{T}_n$ , und für  $r = I, II$

$$M^{(k,r)} := \bigcup_{i=1}^{s^r} \partial\pi^{(k)}(Q_i^r) \quad , \quad M^{(k)} := M^{(k,I)} \cup M^{(k,II)} \quad (k = 1, \dots, n).$$

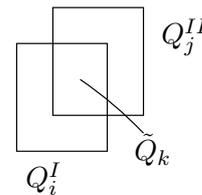
Wir benutzen nun die unter Benutzung der Mengen  $M^{(k)}$  gewonnenen verfeinerten Darstellungen

$$f^r = \sum_{i=1}^{\tilde{s}} \tilde{c}_i^r \mathbb{1}_{\tilde{Q}_i} \quad (r = I, II)$$

mit den disjunkten Quadern  $\tilde{Q}_i$  der Form (4.3). Dann ist auch

$$f^I + f^{II} = \sum_{i=1}^{\tilde{s}} (\tilde{c}_i^I + \tilde{c}_i^{II}) \mathbb{1}_{\tilde{Q}_i}$$

eine Treppenfunktion in  $\mathcal{T}_n$ .



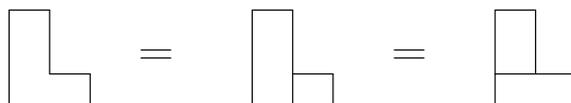
- Ist  $f = \sum_{i=1}^s c_i \mathbb{1}_{Q_i} \in \mathcal{T}_n$ , dann ist mit  $\lambda \in \mathbb{C}$  auch  $\lambda f = \sum_{i=1}^s (\lambda c_i) \mathbb{1}_{Q_i} \in \mathcal{T}_n$  und  $|f| = \sum_{i=1}^s |c_i| \mathbb{1}_{Q_i} \in \mathcal{T}_n$ .  $\square$

Wir setzen jetzt versuchsweise

$$\mathcal{I}_n : \mathcal{T}_n \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \mathcal{I}_n \left( \sum_{i=1}^s c_i \mathbb{1}_{Q_i} \right) := \sum_{i=1}^s c_i v(Q_i) \quad (4.4)$$

als *Integral der Treppenfunktion* an. Für positive Treppenfunktionen  $f$  entspricht  $\mathcal{I}_n(f)$  dem Volumen unterhalb des Graphen.

Wir können zwar eine Treppenfunktion  $f \in \mathcal{T}_n$  auf *verschiedene* Weise als gewichtete Summe  $f = \sum_i c_i \mathbb{1}_{Q_i}$  charakteristischer Funktionen von Quadern  $Q_i$  darstellen, denn die Gebiete  $f^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^n$  lassen sich ja verschieden in endlich viele Quader zerlegen:



$\mathcal{I}_n(f)$  hängt aber nicht von der Wahl der Darstellung ab:

#### 4.4 Satz

1.  $\mathcal{I}_n : \mathcal{T}_n \rightarrow \mathbb{C}$  ist wohldefiniert und ein positives lineares Funktional.
2. Es gilt  $\mathcal{I}_n(|f|) \geq |\mathcal{I}_n(f)|$ .
3. Für  $n = m + p$  und  $f \in \mathcal{T}_n$  sind

$$f_y : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad f_y(x) := f(x, y) \quad (y \in \mathbb{R}^p)$$

und

$$g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad g(y) := \mathcal{I}_m(f_y)$$

Treppenfunktionen in  $\mathcal{T}_m$  bzw.  $\mathcal{T}_p$ , und es gilt

$$\mathcal{I}_n(f) = \mathcal{I}_p(g). \tag{4.5}$$

#### 4.5 Bemerkungen (Treppenfunktionen)

1.  $\mathcal{T}_n$  ist ein *Funktionsraum*, also ein Vektorraum, dessen Elemente Funktionen sind. Abbildungen  $\mathcal{I} : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{K}$  von einem (unendlich-dimensionalen) Funktionenraum  $\mathcal{T}$  über dem Körper  $\mathbb{K}$  in  $\mathbb{K}$  werden oft *Funktionale* genannt. Ein Funktional  $\mathcal{I}$  heißt *positiv*, wenn  $\mathcal{I}(f) \geq 0$  für  $f \geq 0$  folgt und *linear*, wenn es eine lineare Abbildung bezüglich der Vektorraumstruktur von  $\mathcal{T}$  ist.
2. Die Aussage des dritten Teiles ist die Spezialisierung des noch zu behandelnden Satzes von Fubini (Satz 4.14) auf Treppenfunktionen. Schreibt man  $\int_{\mathbb{R}^n} f(z) dz$  statt  $\mathcal{I}_n(f)$ , dann lässt sich (4.5) in der Form

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^p} \left( \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dx \right) dy$$

schreiben. Man kann also insbesondere mehrdimensionale Integrale durch mehrfache eindimensionale Integration ersetzen.  $\diamond$

**Beweis:**

- Um die Wohldefiniertheit des Integrals zu beweisen, ist zu zeigen, dass  $\mathcal{I}_n(f)$  unabhängig von der Wahl der Zerlegung (4.2) ist, also für

$$f = \sum_{i=1}^{s^I} c_i^I \mathbb{1}_{Q_i^I} = \sum_{i=1}^{s^{II}} c_i^{II} \mathbb{1}_{Q_i^{II}} \in \mathcal{T}_n$$

gilt:

$$\sum_{i=1}^{s^I} c_i^I v(Q_i^I) = \sum_{i=1}^{s^{II}} c_i^{II} v(Q_i^{II}). \quad (4.6)$$

- Nun genügt es aber zu zeigen, dass beide Seiten in (4.6) gleich der Summe ist, die man für die gemeinsame Verfeinerung mit den Quadern (4.3) erhält.
- Dafür wiederum genügt der Nachweis, dass das Lebesgue-Maß  $v_n(Q)$  eines Quaders  $Q$  der Form (4.1) gleich der Summe der Maße der Quader seiner Verfeinerung ist. Dies folgt aber aus

$$v_n(Q) = v_n(I^{(1)} \times \dots \times I^{(n)}) = v_1(I^{(1)}) \cdot \dots \cdot v_1(I^{(n)})$$

und

$$v_1(I^{(k)}) = v_1(I_1^{(k)}) + \dots + v_1(I_{t_k}^{(k)}) \quad (k = 1, \dots, n),$$

wenn  $I^{(k)}$  disjunkte Vereinigung der Intervalle  $I_l^{(k)}$  ist.

- Die Linearität und Positivität von  $\mathcal{I}_n$  folgt jetzt unmittelbar aus der Definition (4.4) von  $\mathcal{I}_n$ .

- Für  $f = \sum_{i=1}^s c_i \mathbb{1}_{Q_i}$  ist

$$\mathcal{I}_n(|f|) = \sum_{i=1}^s |c_i| v(Q_i) \geq \left| \sum_{i=1}^s c_i v(Q_i) \right| = |\mathcal{I}_n(f)|.$$

- Wir benutzen die mittels Verfeinerung gewonnene Darstellung

$$f = \sum_{i=1}^{s_m} \sum_{j=1}^{s_p} c_{ij} \mathbb{1}_{Q_{ij}}$$

mit Quadern  $Q_{ij} = Q_i^{(m)} \times Q_j^{(p)}$ , wobei die Quader  $Q_1^{(m)}, \dots, Q_{s_m}^{(m)} \subset \mathbb{R}^m$  und die Quader  $Q_1^{(p)}, \dots, Q_{s_p}^{(p)} \subset \mathbb{R}^p$  disjunkt sind.

Damit gilt wegen  $\mathbb{1}_{Q_{ij}}(x, y) = \mathbb{1}_{Q_i^{(m)}}(x) \cdot \mathbb{1}_{Q_j^{(p)}}(y)$

$$g(y) = \mathcal{I}_m(f_y) = \sum_{j=1}^{s_p} \left( \sum_{i=1}^{s_m} c_{ij} v_m(Q_i^{(m)}) \right) \mathbb{1}_{Q_j^{(p)}}(y) \quad (y \in \mathbb{R}^p),$$

also

$$\mathcal{I}_p(g) = \sum_{j=1}^{s_p} \sum_{i=1}^{s_m} c_{ij} v_m(Q_i^{(m)}) \cdot v_p(Q_j^{(p)}).$$

Dies ist aber wegen  $v_n(Q_{ij}) = v_m(Q_i^{(m)}) \cdot v_p(Q_j^{(p)})$  gleich  $\mathcal{I}_n(f)$ . □

## 4.2 Das Lebesgue-Integral

Ist  $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbb{1}_{Q_k}$  mit  $c_k \in \mathbb{C}$  und Quadern  $Q_k \subset \mathbb{R}^n$ , dann ist es naheliegend, das Integral von  $\varphi$  analog zu (4.4) durch

$$\mathcal{I}_n(\varphi) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_n(Q_k)$$

zu erklären. Im Allgemeinen konvergiert diese Reihe zwar nicht. Ist allerdings  $c_k \geq 0$ , dann ist immerhin  $\mathcal{I}_n(\varphi) \in [0, \infty]$  wohldefiniert.

### 4.6 Definition

- Eine **Hüllreihe**  $\varphi$  von  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  ist eine Reihe  $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbb{1}_{Q_k}$  mit  $c_k \geq 0$  und offenen Quadern  $Q_k$ , für die  $\varphi \geq |f|$  gilt.
- $f$  besitzt die  $\mathcal{L}^1$ -Halbnorm<sup>6</sup>

$$\|f\|_1 := \inf \{ \mathcal{I}_n(\varphi) \mid \varphi \text{ ist Hüllreihe von } f \}.$$

- $f$  heißt **Lebesgue-integrierbar**, wenn es eine Folge von Treppenfunktionen  $\varphi_k \in \mathcal{T}_n$  mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k - f\|_1 = 0$$

gibt. In diesem Fall heißt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx := \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{I}_n(\varphi_k)$$

das **Lebesgue-Integral** von  $f$ .

- Die Menge der Lebesgue-integrierbaren Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  wird mit  $\tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$  bezeichnet.

Wir müssen uns zunächst überlegen, dass diese Definition des Lebesgue-Integrals sinnvoll ist.

- Zunächst besitzt jede Funktion  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  eine Hüllreihe, nämlich z.B.  $\varphi := \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{Q_k}$  mit  $Q_k := [-k, k]^n$ , und es ist  $\varphi(x) \equiv \infty$ . Daher ist

$$\|g\|_1 \in [0, \infty].$$

<sup>6</sup>Bei einer **Halbnorm** wird im Gegensatz zu einer Norm nicht  $\|f\| > 0$  für  $f \neq 0$  verlangt. Zusätzlich wird hier der Wert  $\|f\|_1 = \infty$  zugelassen.

- Sicher ist *nicht jede Funktion Lebesgue-integrierbar*, denn z.B. die Funktion  $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}$  hat die Eigenschaft, dass  $\mathbb{1}_{\mathbb{R}} - \varphi_k$  für  $\varphi_k \in \mathcal{T}_1$  außerhalb eines beschränkten Gebiets gleich 1 ist und damit ist  $\|\mathbb{1}_{\mathbb{R}} - \varphi_k\|_1 = \infty$ .
- Ist aber  $f$  Lebesgue-integrierbar, dann existiert auch der Limes auf der rechten Seite der Definition des Lebesgue-Integrals, denn

$$|\mathcal{I}_n(\varphi_k) - \mathcal{I}_n(\varphi_l)| \leq \mathcal{I}_n(|\varphi_k - \varphi_l|) = \|\varphi_k - \varphi_l\|_1 \leq \|f - \varphi_k\|_1 + \|f - \varphi_l\|_1,$$

und der letzte Ausdruck geht für  $k, l \rightarrow \infty$  gegen Null<sup>7</sup>. Die  $\mathcal{I}_n(\varphi_n)$  bilden also eine Cauchy-Folge.

Aus dem gleichen Grund ist der Limes von der Wahl der Folge  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  unabhängig. Damit ist das Lebesgue-Integral von  $f$  wohldefiniert und endlich.

Dass  $\|\cdot\|_1$  die Eigenschaften

$$\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \|f\|_1 \quad \text{und} \quad \|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 \quad (f, g \in \tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n), \lambda \in \mathbb{C})$$

einer Halbnorm erfüllt, wird klar, wenn man die Koeffizienten der Hüllreihe von  $f$  mit dem Betrag von  $\lambda \in \mathbb{C}$  multipliziert bzw. die Hüllreihen von  $f$  und  $g$  addiert. Zwar ist  $\tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$  selbst kein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum, denn der Wert  $\infty$  ist zugelassen, aber  $\tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$  enthält den  $\mathbb{C}$ -Vektorraum

$$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \mid f \in \tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)\}.$$

#### 4.7 Lemma Die Halbnorm erfüllt die verallgemeinerte Dreiecksungleichung

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_1. \quad (4.7)$$

Dabei nehmen wir  $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$  an, weil sonst die Summe auf der linken Seite von (4.7) evtl. nicht definiert ist. Es muß aber nicht  $f_k \in \tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$  gelten.

**Beweis:** Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es geeignete Hüllreihen  $\varphi_k$  von  $f_k$ , für die

$$\mathcal{I}_n(\varphi_k) \leq \|f_k\|_1 + 2^{-k} \varepsilon \quad \text{gilt, also} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{I}_n(\varphi_k) - \|f_k\|_1) \leq \varepsilon.$$

$\varphi := \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$  ist dann Hüllreihe von  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ , mit  $\mathcal{I}_n(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{I}_n(\varphi_k)$ . □

<sup>7</sup>Die mittlere Identität folgt aus folgendem Lemma (Beweis siehe [Ko, p. 238f]):

**Lemma.**  $\|\varphi\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi| dx \quad (\varphi \in \mathcal{T}_n)$ .

Das Lebesgue-Integral ist eine Abbildung

$$\int_{\mathbb{R}^n} : \tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Wir wollen nun die Rechenregeln für das Integral ergründen. Zunächst ist

$$\mathcal{T}_n \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n),$$

die Treppenfunktionen sind also Lebesgue-integrierbar, und für  $\varphi \in \mathcal{T}_n$  gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = \mathcal{I}_n(\varphi),$$

denn  $\varphi$  wird ja durch sich selbst approximiert. Damit *erweitert* das Lebesgue-Integral unseren Integralbegriff für Treppenfunktionen, und auch Satz 4.4 besitzt eine Erweiterung:

**4.8 Satz** *Das Lebesgue-Integral ist ein positives lineares Funktional auf dem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ , und es gilt*

1.  $\left| \int_{\mathbb{R}^n} f dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f| dx = \|f\|_1 \quad (f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n))$
2. Sind  $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  und ist  $g$  beschränkt, dann ist auch  $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ .

**Beweis:**

- Fangen wir mit der Ungleichung in 1. an: Wegen der Dreiecksungleichung gilt

$$||f| - |\varphi_k|| \leq |f - \varphi_k|,$$

also

$$\| |f| - |\varphi_k| \|_1 \leq \|f - \varphi_k\|_1,$$

sodass mit  $f$  auch  $|f| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  ist, und

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f dx \right| = \left| \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k dx \right| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_k| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f| dx.$$

Weiter müssen wir noch die zweite Identität in 1. zeigen, indem wir die Dreiecksungleichung der  $\mathcal{L}^1$ -Halbnorm in der Form

$$| \|\varphi_k\|_1 - \|f\|_1 | \leq \|\varphi_k - f\|_1$$

anwenden. Die rechte Seite geht für  $k \rightarrow \infty$  gegen Null, also ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f| dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{I}_n(|\varphi_k|) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k\|_1 = \|f\|_1.$$

Dabei wurde  $\mathcal{I}(|\varphi_k|) = \| |\varphi_k| \|_1 = \|\varphi_k\|_1$  benutzt, siehe Fußnote 7.

- Dass  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  überhaupt ein linearer Raum ist, sehen wir dadurch, dass wir für  $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  die approximierenden Treppenfunktionen addieren können, um  $f + g$  zu approximieren; analog multipliziert man die  $\varphi_k$  mit  $\lambda \in \mathbb{C}$ , um  $\lambda f$  zu approximieren.  
Linearität des Lebesgue-Integrals ergibt sich ebenso wie seine Positivität aus den in Satz 4.4 gezeigten Eigenschaften von  $\mathcal{I}_n$ .
- Beweis von 2. Sei  $M_g > 0$  eine obere Schranke für  $|g|$ , und für  $\varepsilon > 0$  die  $f$  approximierende Treppenfunktion  $\varphi \in \mathcal{T}_n$  so gewählt, dass  $\|f - \varphi\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2M_g}$ . Ist nun  $M_\varphi > 0$  eine obere Schranke für  $|\varphi|$ , dann wird  $\gamma \in \mathcal{T}_n$  so gewählt, dass  $\|g - \gamma\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2M_\varphi}$ . Es folgt für alle  $x \in \mathbb{R}^n$

$$|f(x)g(x) - \varphi(x)\gamma(x)| \leq |f(x) - \varphi(x)| |g(x)| + |\varphi(x)| |g(x) - \gamma(x)|,$$

also

$$\begin{aligned} \|fg - \varphi\gamma\|_1 &\leq M_g \|f - \varphi\|_1 + M_\varphi \|g - \gamma\|_1 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit approximiert  $\varphi\gamma \in \mathcal{T}_n$  das Produkt von  $f$  und  $g$ . □

Da erstere auch auf Teilintervallen definiert sein können, müssen wir zunächst das Lebesgue-Integral solcher Funktionen definieren.

#### 4.9 Definition

1. Für  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f : A \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  heißt

$$f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \quad , \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus A \end{cases}$$

die **triviale Fortsetzung** von  $f$ .

2.  $f$  heißt **über  $A$  integrierbar**, wenn  $f_A \in \tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$ .  
Dann heißt  $\int_A f dx := \int_{\mathbb{R}^n} f_A dx$  das **Lebesgue-Integral** von  $f$  über  $A$   
und  $\|f\|_{1,A} := \|f_A\|_1$  seine **1-Norm**.
3. Der Raum der über  $A$  Lebesgue-integrierbaren Funktionen wird mit  $\tilde{\mathcal{L}}^1(A)$  bezeichnet.

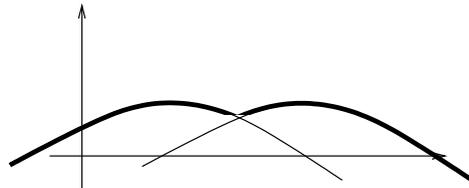
#### 4.10 Bemerkungen (Lebesgue-Integral)

1. Die Existenz von  $\int_A f dx$  hängt nicht nur von der Regularität von  $f$ , sondern auch von  $A$  ab. Insbesondere sind nicht alle  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  messbar. Noch nicht einmal für alle beschränkten  $A$  existiert das Maß  $\lambda(A) = \int \mathbb{1}_A dx$ .
2. Satz 4.8 sagt uns unter anderem, dass wir, wenn wir **komplexwertige** Funktionen  $f$  integrieren wollen, uns auf die getrennte Integration von Real- und Imaginärteil von  $f$  zurückziehen können (dies folgt aus der Linearität des Lebesgue-Integrals).

3. Für reellwertige  $f, g \in \tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$  sind Maximum bzw. Minimum der beiden Funktionen wegen Satz 4.8

$$\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \quad , \quad \min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

in  $\tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$ . Daher können wir uns auf die Integration *nichtnegativer* Funktionen beschränken:



Mit  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  sind Positivteil  $f^+ = \max(f, 0)$  und Negativteil  $f^- = \max(-f, 0)$  von  $f$  in  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ , und  $f^\pm \geq 0$ . Aus  $f = f^+ - f^-$  folgt also

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} f^- \, dx. \quad \diamond$$

Nach Einführung des Lebesgue-Integrals haben wir in Satz 4.8 erste Rechenregeln für seine Auswertung kennen gelernt. Wir sind aber noch nicht in der Lage, das Lebesgue-Integral in relevanten Anwendungen auszurechnen. Im Folgenden werden die dazu notwendigen Sätze bereitgestellt.

Die triviale Fortsetzung  $f|_{[a,b]} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  einer Riemann-integrierbaren Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist Lebesgue-integrierbar. Aus der Art der Approximation von  $f|_{[a,b]}$  durch Treppenfunktionen folgt dann sofort, dass das Lebesgue-Integral von  $f|_{[a,b]}$  gleich dem Riemann-Integral von  $f$  ist.

Allgemeiner gilt:

**4.11 Satz** *Ist die auf einem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  definierte Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  absolut<sup>8</sup> Riemann-integrierbar, dann ist  $f$  auch Lebesgue-integrierbar und die Werte beider Integrale sind gleich.*

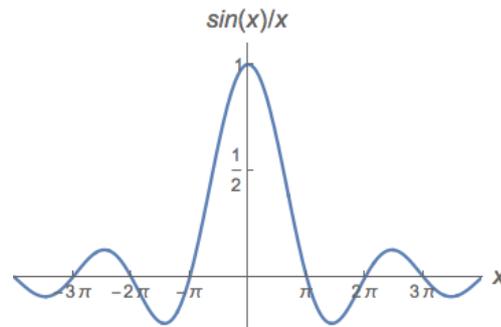
#### 4.12 Bemerkungen

1. Die Voraussetzung des Satzes ist z.B. für stetige oder monotone Funktionen auf kompakten Intervallen erfüllt.

<sup>8</sup>d.h. die Restriktionen  $f|_J$  auf kompakte Teilintervalle  $J \subseteq I$  sind Riemann-integrierbar und das uneigentliche Riemann-Integral von  $|f|$  existiert, siehe z.B. Def. 1.1 der *Analysis II*

2. Der Integralsinus, die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$  ist nach de l'Hospital stetig, und ihr uneigentliches Riemann-Integral existiert<sup>9</sup> (mit  $\int_{-\infty}^{\infty} f dx = \pi$ ).

Aber  $f$  ist nicht absolut Riemann-integrierbar, und es gilt auch  $f \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , die Funktion ist nicht Lebesgue-integrierbar. Allerdings existiert der Limes der Lebesgue-Integrale der Funktionen  $f \cdot \mathbb{1}_{[-c,c]}$  und gleicht dem uneigentlichen Riemann-Integral von  $f$ .  $\diamond$



**4.13 Satz** Es sei  $f \in C(A, \mathbb{R})$  beschränkt und  $A \subset \mathbb{R}^n$  kompakt bzw.  $A$  offen und beschränkt. Dann ist  $f \in \mathcal{L}^1(A)$ .

**Beweis:** Gemäß den Bemerkungen 4.10 können wir  $f \geq 0$  annehmen.

- Wir betrachten zunächst den Fall einer offenen beschränkten Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Für jedes  $k \in \mathbb{Z}$  können wir den  $\mathbb{R}^n$  als disjunkte Vereinigung der "halboffenen Würfel" mit Kantenlänge  $2^{-k}$

$$W_k(a) := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in [2^{-k}a_i, 2^{-k}(a_i + 1))\} \quad (a \in \mathbb{Z}^n)$$

darstellen, und sie sind in der Form

$$W_k(a) = \bigcup_{b \in \mathbb{Z}^n : b_i \in \{2a_i, 2a_i + 1\}} W_{k+1}(b) \quad (k \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{Z}^n) \quad (4.8)$$

ineinander geschachtelt. Wir setzen nun

$$\varphi_k := \sum_{a \in \mathbb{Z}^n} c_{k,a} \mathbb{1}_{W_k(a)} \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (4.9)$$

mit  $c_{k,a} := \inf f_A \upharpoonright_{W_k(a)}$ , wobei  $f_A$  die triviale Fortsetzung von  $f$  bezeichnet.

Wegen der Beschränktheit von  $f$  sind die  $c_{k,a} \in [0, \infty)$ . Wegen der Beschränktheit von  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  sind für jedes  $k$  nur endlich viele Koeffizienten  $c_{k,a}$  ungleich Null. Also sind die  $\varphi_k$  Treppenfunktionen, mit  $\varphi_k \leq f_A$  und  $\varphi_k \upharpoonright_{\mathbb{R}^n - A} = 0$ .

Andererseits gilt wegen (4.8)  $\varphi_{k+1} \geq \varphi_k$ . Da  $A$  offen ist, gibt es für jeden Punkt  $x \in A$  ein  $k \in \mathbb{N}$  und  $a \in \mathbb{Z}^n$  mit  $x \in W_k(a) \subseteq A$ . Wegen (4.8) und der Stetigkeit von  $f$  ist damit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = f_A(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

<sup>9</sup>Einen Beweis findet man in Beispiel 1.5 der *Analysis II*.

Also folgt aus der verallgemeinerten Dreiecksungleichung (4.7) für alle  $k$

$$\begin{aligned} \|f_A - \varphi_k\|_1 &= \left\| \sum_{m=k}^{\infty} (\varphi_{m+1} - \varphi_m) \right\|_1 \leq \sum_{m=k}^{\infty} \|\varphi_{m+1} - \varphi_m\|_1 \\ &= \sum_{m=k}^{\infty} \mathcal{I}_n(|\varphi_{m+1} - \varphi_m|) \\ &= \sum_{m=k}^{\infty} \mathcal{I}_n(\varphi_{m+1} - \varphi_m) = \sum_{m=k}^{\infty} (\mathcal{I}_n(\varphi_{m+1}) - \mathcal{I}_n(\varphi_m)), \end{aligned}$$

was für  $k \rightarrow \infty$  gegen Null konvergiert<sup>10</sup>. Also ist  $f \in \mathcal{L}^1(A)$ .

2. Ist dagegen  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt, dann existiert nach dem Erweiterungslemma von Tietze<sup>11</sup> eine stetige Fortsetzung  $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  von  $f$ . Ist nun  $k > 0$  so gewählt, dass der Würfel  $W := (-k, k)^n$  das Kompaktum  $A$  beinhaltet, dann ist  $\tilde{f}|_W$  und auch  $\tilde{f}|_{W-A}$  nach Teil 1 des Beweises integrierbar, also auch die triviale Fortsetzung  $f_A = \tilde{f} \cdot \mathbb{1}_W - \tilde{f} \cdot \mathbb{1}_{W-A}$ .  $\square$

### 4.3 Der Satz von Fubini

Zur praktischen Durchführung der Integration führen wir sie auf die eindimensionale Integration zurück, wie wir das in Satz 4.4 schon für Treppenfunktionen getan haben. Allgemeiner zerlegen wir den  $\mathbb{R}^n$  in das Produkt  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ .

#### 4.14 Satz (Fubini)

Es sei  $f \in C(A, \mathbb{C})$  beschränkt und  $A \subset \mathbb{R}^n$  kompakt bzw.  $A$  offen und beschränkt. Für alle  $p \in \{1, \dots, n-1\}$ ,  $m := n-p$  ist dann für den  $y$ -Schnitt von  $A$

$$A_y := \{x \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in A\} \text{ und } f_y : A_y \rightarrow \mathbb{C}, f_y(x) := f(x, y) \quad (y \in \mathbb{R}^p)$$

$f_y \in \mathcal{L}^1(A_y)$ , und es gilt

$$\int_A f(z) dz = \int_{\mathbb{R}^{n-p}} \left( \int_{A_y} f(x, y) dx \right) dy. \quad (4.10)$$

**Beweis:** Die Bedingungen an  $f$  und  $A$  sind die gleichen wie die im Satz 4.13. Wir können auch wieder o.B.d.A.  $f \geq 0$  voraussetzen.

<sup>10</sup>Diese Argumentation wird später im **Satz von Beppo Levi** (Satz 5.10) auf monoton wachsende Folgen von Funktionen  $f_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $\int_{\mathbb{R}^n} f_k dx \leq C$  und ihren punktweisen Limes  $f$  verallgemeinert, der dann ebenfalls integrierbar ist.

<sup>11</sup>**Erweiterungslemma von Tietze:** Ist  $A$  eine abgeschlossene Teilmenge eines metrischen Raumes  $X$  und  $f \in C(A, \mathbb{R})$ , dann existiert ein  $\tilde{f} \in C(X, \mathbb{R})$  mit  $\tilde{f}|_A = f$ . Beweis in [Ja], unter noch schwächeren Voraussetzungen an den topologischen Raum  $X$ .

1. Sei zunächst  $A \subset \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$  beschränkt und *offen*.  
 • Also ist  $A_y \subset \mathbb{R}^m$  ebenfalls offen. Von den Treppenfunktionen  $\varphi_k$  aus (4.9) erben die  $\varphi_{k,y} := \varphi_k \upharpoonright_{\mathbb{R}^m \times \{y\}}$  die Eigenschaften

$$\varphi_{k,y} \in \mathcal{T}_m \quad , \quad \varphi_{k,y} \leq \varphi_{k+1,y} \leq \dots \leq f_y \quad (y \in \mathbb{R}^p) \quad (4.11)$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{k,y}(x) = f_y(x) \quad (y \in \mathbb{R}^p, x \in \mathbb{R}^m). \quad (4.12)$$

Mit der gleichen Argumentation wie im Beweis von Satz 4.13 gilt daher  $\|f_y - \varphi_{k,y}\|_1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ , also mit den Treppenfunktionen

$$\Phi_k \in \mathcal{T}_p \quad , \quad \Phi_k(y) := \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_{k,y} dx$$

$$f_y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m) \quad \text{und} \quad F(y) := \int_{A_y} f_y(x) dx.$$

- Die  $\Phi_k \in \mathcal{T}_p$  haben wegen (4.11) und (4.12) die Eigenschaften

$$\Phi_k \leq \Phi_{k+1} \leq \dots \leq F \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k(y) = F(y)$$

Daher gilt wieder  $\|F - \Phi_k\|_1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ , also

$$F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^p) \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^p} F dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^p} \Phi_k dy.$$

- Der Satz von Fubini für Treppenfunktionen (Satz 4.4, Teil 3) besagt

$$\int_{\mathbb{R}^p} \Phi_k dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k dz.$$

Nach Satz 4.13 gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k dz = \int_{\mathbb{R}^n} f(z) dz$ .

Zusammen zeigt das die Richtigkeit von (4.10):

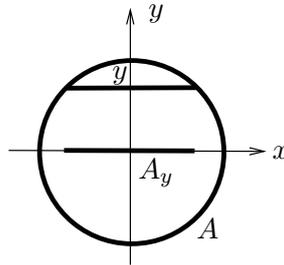
$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f dz &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k dz = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^p} \Phi_k dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} F dy = \int_{\mathbb{R}^p} \left( \int_{A_y} f_y(x) dx \right) dy. \end{aligned}$$

2. Ist dagegen  $A \subset \mathbb{R}^n$  kompakt, dann betrachten wir wieder einen  $A$  enthaltenden offenen Würfel und wenden die obige Aussage auf eine stetige Fortsetzung  $\tilde{f}$  von  $f$  auf  $\mathbb{R}^n$  an, indem wir  $\tilde{f}$  über  $W$  bzw.  $W - A$  integrieren und die Differenz der Integrale bilden.  $\square$

#### 4.15 Beispiel (Fubini) Wir betrachten die Kreisscheibe

$A := \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|z\| \leq R\}$  vom Radius  $R$  und  $f := \mathbb{1}_{\mathbb{R}^2}$ , also  $f_A = \mathbb{1}_A$ .

Für  $p = 1$  ergibt sich  $A_y = \begin{cases} [-\sqrt{R^2 - y^2}, \sqrt{R^2 - y^2}] & , |y| \leq R \\ \emptyset & , |y| > R \end{cases}$ .



$$\int_A f(z) dz = \int_{\mathbb{R}} \int_{A_y} 1 dx dy = \int_{[-R,R]} 2\sqrt{R^2 - y^2} dy = \pi R^2. \quad \diamond$$

Eigentlich haben wir im letzten Beispiel die Fläche der Kreisscheibe  $A$  gemessen. Allgemein definieren wir:

**4.16 Definition**  $A \subset \mathbb{R}^n$  heißt **(Lebesgue-) messbar**, wenn  $\mathbb{1}_A \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ . In diesem Fall heißt

$$\lambda^n(A) := \int_A dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A dx \in [0, \infty)$$

das  $n$ -dimensionale **Lebesgue-Maß** (oder **Volumen**) von  $A$ .

**4.17 Bemerkung** Nach dieser Definition haben alle Lebesgue-messbaren Mengen endliches Maß. Dies ist vielleicht naheliegend, aber von Standpunkt der *Maßtheorie* aus etwas unbefriedigend.

Diese versteht unter einem *Maß*  $\mu$  auf einer Menge  $M$  eine Abbildung

$$\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$$

mit einem geeigneten Mengensystem  $\mathcal{M} \subseteq 2^M$ , einer sogenannten  $\sigma$ -Algebra<sup>12</sup>. Es ist nach Definition  $\mu(\emptyset) = 0$ , und für disjunkte  $A_k \in \mathcal{M}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) ist  $\mu$  dabei  $\sigma$ -additiv. d.h.

$$\mu \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Der Vorteil, den Wert  $\mu(A) = \infty$  zuzulassen, liegt dabei in der einfacheren Struktur des Mengensystems  $\mathcal{M}$ .

Im Fall des Lebesgue-Maßes folgt aus der  $\sigma$ -Additivität  $\lambda^n(\mathbb{R}^n) = \infty$ , denn der  $\mathbb{R}^n$  ist disjunkte Vereinigung abzählbar vieler Würfel.

Von Def. 4.16 kommen wir zu der maßtheoretischen Definition der Meßbarkeit, indem wir diejenigen Mengen hinzunehmen, die durch die in einer  $\sigma$ -Algebra

<sup>12</sup>**Definition:** • Eine nichtleere Familie  $\mathcal{M}$  von Teilmengen von  $M$  heißt **Algebra**, wenn mit  $A, B \in \mathcal{M}$  auch  $M \setminus A$ ,  $A \cap B$  und  $A \cup B \in \mathcal{M}$  sind.

•  $\mathcal{M}$  heißt  $\sigma$ -**Algebra**, wenn zusätzlich gilt:  $(\forall n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{M}) \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ .

erlaubten Operationen von Komplementbildung und abzählbarer Vereinigung aus den Definition 4.16 erfüllenden Mengen gebildet werden können.  $\diamond$

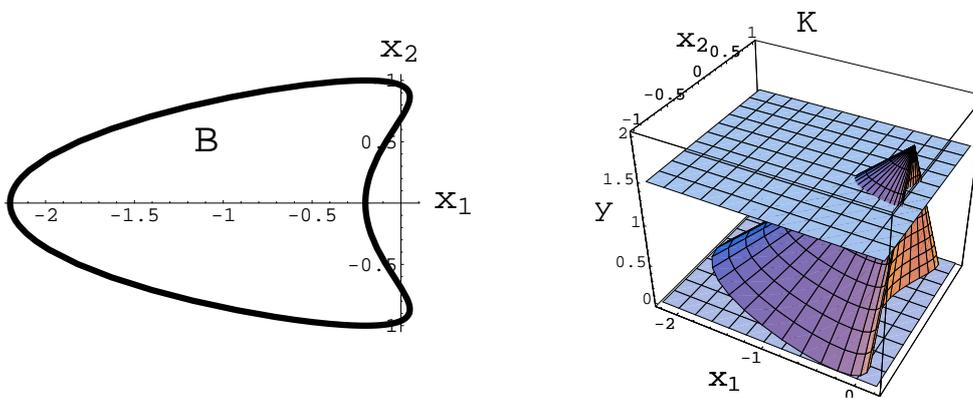
Aus den Sätzen 4.13 und 4.14 folgt unmittelbar das sog. *Prinzip von Cavalieri*:

**4.18 Korollar** *Beschränkte offene sowie kompakte Mengen  $A \subset \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$  sind messbar, und  $\lambda^n(A) = \int_{\mathbb{R}^p} \lambda^m(A_y) dy$  für  $A_y = \{x \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in A\}$ .*

**4.19 Beispiel (Kegelvolumen)** Es sei  $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$  kompakt, und für  $h > 0$

$$K := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times [0, h] \mid x \in \left(1 - \frac{y}{h}\right) B \right\}$$

der Kegel mit Basis  $B$  und Höhe  $h$ .



Es ist also  $A_y = \ell B$  mit  $\ell := 1 - y/h$  die um den Faktor  $\ell \in [0, 1]$  skalierte (und verschobene) Basis. Als Bild des Kompaktums  $B \times [0, h]$  unter der stetigen Abbildung  $(x, y) \mapsto ((1 - y/h)x, y)$  ist  $K$  kompakt, also nach Kor. 4.18 messbar.

Es ist naheliegend (und wird noch besprochen), dass

$$\lambda^{n-1}(\ell B) = \ell^{n-1} \lambda^{n-1}(B)$$

gilt, also

$$\begin{aligned} \lambda^n(K) &= \int_{[0, h]} \lambda^{n-1}(A_y) dy = \int_{[0, h]} (1 - y/h)^{n-1} \lambda^{n-1}(B) dy \\ &= \lambda^{n-1}(B) \cdot \frac{h(1 - y/h)^n}{n} \Big|_0^h = \lambda^{n-1}(B) \cdot \frac{h}{n}. \end{aligned}$$

In Anwendungen der Lebesgue-Integration über dem  $\mathbb{R}^n$  möchte man gerne von Gebieten niedrigerer Dimension absehen können:

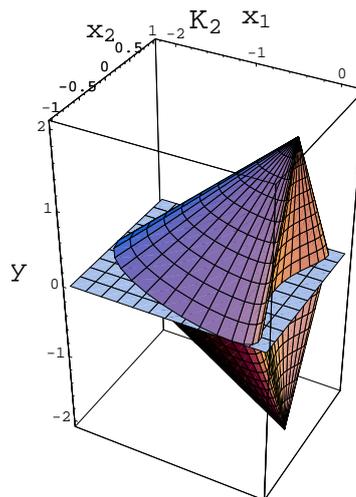
#### 4.20 Beispiel (Volumen des Doppelkegels)

Für  $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$  kompakt und  $h > 0$  sei

$$K_2 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times [-h, h] \mid x \in \left(1 - \frac{|y|}{h}\right) B \right\}.$$

Wir können  $K_2$  als Vereinigung von  $K$  und der Spiegelung von  $K$  an der Hyperebene  $y = 0$  in  $\mathbb{R}^n$  darstellen.  $K$  und sein Spiegelbild haben Maß  $\lambda^n(K) = \lambda^{n-1}(B) \frac{h}{n}$ .

Es liegt also nahe zu vermuten, dass  $K_2$  das doppelte Volumen besitzt. Allerdings treffen sich die beiden einfachen Kegel in ihrer Basis  $B$ , und wir würden gerne argumentieren, dass diese Schnittmenge  $n$ -dimensionales Maß 0 besitzt.



In diesem Beispiel haben wir folgende Rechenregeln angewandt:

**4.21 Satz** Sind  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  messbar, dann sind

1.  $A \cup B$  und  $A \cap B$  messbar, und  $\lambda^n(A \cup B) = \lambda^n(A) + \lambda^n(B) - \lambda^n(A \cap B)$ .
2. Für  $A \subset B$  gilt  $\lambda^n(A) \leq \lambda^n(B)$ .

**Bew:** Wir benutzen Linearität und Positivität des Lebesgue-Integrals:

1.  $\lambda^n(A \cup B) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{A \cup B} dx$ , und  $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$
2.  $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$ . □

#### 4.4 Nullmengen

Wir wollen jetzt Kriterien dafür entwickeln, dass eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  Maß 0 besitzt.

**4.22 Definition**  $N \subset \mathbb{R}^n$  heißt **(Lebesgue-) Nullmenge** im  $\mathbb{R}^n$ , wenn  $N$  messbar ist, und  $\lambda^n(N) = 0$ .

Ist nun eine Hyperebene eine Nullmenge? Zwar ist sie "unendlich dünn", aber sie hat doch auch "unendliche Größe".

### 4.23 Satz

1.  $N \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann eine Nullmenge, wenn  $\|\mathbb{1}_N\|_1 = 0$ .
2. Teilmengen von Nullmengen sind Nullmengen.
3. Die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen ist eine Nullmenge.

**Beweis:**

1. " $\Rightarrow$ ": Wir wissen schon (Satz 4.8), dass  $\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_N dx = \|\mathbb{1}_N\|_1$ , wenn  $\mathbb{1}_N \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ .  
" $\Leftarrow$ ": Da für die konstante Folge von verschwindenden Treppenfunktionen  $\varphi_k = 0$   $\|\mathbb{1}_N - \varphi_k\|_1 = 0$ , ist  $\mathbb{1}_N$  integrierbar,  $N$  also messbar und hat daher Maß 0.
2.  $M \subset N \Rightarrow \mathbb{1}_M \leq \mathbb{1}_N \Rightarrow \lambda^n(M) \leq \lambda^n(N) := 0$
3.  $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k \Rightarrow \mathbb{1}_N \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{N_k}$ . Mit  $\lambda^n(A) = \|\mathbb{1}_A\|_1$  folgt unter Benutzung der verallgemeinerten Dreiecksungleichung (4.7)

$$\lambda^n(N) = \|\mathbb{1}_N\|_1 \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{N_k} \right\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|\mathbb{1}_{N_k}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(N_k) = 0. \quad \square$$

Natürlich braucht eine *überabzählbare* Vereinigung von Nullmengen keine Nullmenge zu sein. Beispielsweise ist für alle  $x \in \mathbb{R}$   $v_1(\{x\}) = 0$ , aber

$$\lambda^1\left(\bigcup_{x \in [0,1]} \{x\}\right) = 1.$$

**4.24 Definition** Eine Eigenschaft, die Punkten des  $\mathbb{R}^n$  zukommen kann, gilt **fast überall**, falls die Teilmenge von Punkten des  $\mathbb{R}^n$ , für die die Eigenschaft nicht gilt, eine Nullmenge ist.

**4.25 Beispiel** Die Eigenschaft " $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ " gilt in  $\mathbb{R}$  fast überall, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} dx = 0.$$

Mit anderen Worten: Die rationalen Zahlen bilden eine Nullmenge.

**Beweis:** Dies folgt aus Satz 4.23.3, denn einelementige Teilmengen von  $\mathbb{R}$  sind Nullmengen, und  $\mathbb{Q}$  ist abzählbar. Trotzdem ist es interessant, einen Beweis unter Verwendung von Hüllreihen zu sehen:

- Es sei zunächst  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := \mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ . Wir weisen konkret nach, dass  $\int_{\mathbb{R}} f dx = 0$ , indem wir  $f$  durch die Nullfunktion  $0 \in \mathcal{T}_n$  approximieren. Als Hüllreihen für  $f$  nehmen wir die

$$\varphi_\varepsilon := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\left(\frac{k}{n} - \frac{\varepsilon}{n^3}, \frac{k}{n} + \frac{\varepsilon}{n^3}\right)} \quad (\varepsilon > 0),$$

die für alle rationalen Zahlen  $\frac{k}{n}$  in  $[0, 1)$  größergleich 1 sind. Es gilt

$$\mathcal{I}_1(\varphi_\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2\varepsilon}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{n^2} = \varepsilon \frac{\pi^2}{3},$$

sodass  $\int_{\mathbb{R}} f dx = \|f\|_1 \leq \lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathcal{I}_1(\varphi_\varepsilon) = 0$ .

Man beachte, dass die zugehörige offene Überdeckung

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{n-1} \left( \frac{k}{n} - \frac{\varepsilon}{n^3}, \frac{k}{n} + \frac{\varepsilon}{n^3} \right) \quad \text{von} \quad \mathbb{Q} \cap [0, 1)$$

die meisten irrationalen Zahlen nicht trifft, wenn  $\varepsilon$  klein ist.

- Nach Satz 4.23 ist damit auch  $\mathbb{Q}$  selbst als abzählbare Vereinigung der Nullmengen  $\mathbb{Q} \cap [n, n+1)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  eine Nullmenge.  $\square$

**4.26 Satz** *Besitzt  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  eine endliche Halbnorm ( $\|f\|_1 < \infty$ ), dann nimmt  $f$  den Wert  $\infty$  nur auf einer Nullmenge an.*

**Beweis:** Setze  $N := f^{-1}(\infty) \subseteq \mathbb{R}^n$ . Für alle  $\varepsilon > 0$  gilt  $\mathbb{1}_N \leq \varepsilon|f|$ , also  $\|\mathbb{1}_N\|_1 \leq \varepsilon\|f\|_1$ .  $\square$

**4.27 Satz** *Es sei  $f \in \tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$  und  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  fast überall gleich  $f$ . Dann ist auch  $g \in \tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$  und  $\int_{\mathbb{R}^n} g dx = \int_{\mathbb{R}^n} f dx$ .*

**Beweis:** • Wir können  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  mit Treppenfunktionen  $\varphi_k \in \mathcal{T}_n$  approximieren, d.h.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - \varphi_k\|_1 = 0$ , und wir wollen zeigen, dass auch gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g - \varphi_k\|_1 = 0.$$

- Nun ist  $|g - \varphi_k| \leq |f - \varphi_k| + U_N$  für

$$N := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq g(x)\} \quad , \quad U_N := \infty \cdot \mathbb{1}_N = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_N.$$

$N$  ist nach Voraussetzung eine Nullmenge. Damit ist nach Satz 4.23

$$\|U_N\|_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbb{1}_N\|_1 = 0.$$

Daher folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g - \varphi_k\|_1 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \| |f - \varphi_k| + U_N \|_1 \leq \|U_N\|_1 + \lim_{k \rightarrow \infty} \|f - \varphi_k\|_1 = 0,$$

also auch  $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  und  $\int g dx = \int f dx$ .  $\square$

Wir haben in der *MP-2* an verschiedenen Stellen (z.B. dem lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die Lösungen von DGLn) den Vorteil des Arbeitens in vollständigen metrischen Räumen gesehen. In diesen konvergieren ja alle Cauchy-Folgen. Wir hätten gerne, dass auch der Raum  $\tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$  der Lebesgue-integrierbaren Funktionen einen solchen Raum bildet. Nun ist  $\|\cdot\|_1$  nur eine Halbnorm. Andererseits gilt der folgende Satz:

**4.28 Satz** Für  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  gilt

$$\|f\|_1 = 0 \iff f(x) = 0 \text{ fast überall.}$$

**Beweis:** " $\Leftarrow$ ": Dies folgt nach Satz 4.27 durch Vergleich mit der Nullabbildung.

" $\Rightarrow$ ": Wir beweisen, daß  $N := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$  eine Nullmenge ist. Dazu schreiben wir  $N$  in der Form

$$N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k \quad \text{für} \quad N_k := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| \geq 1/k\}.$$

Aus  $\lambda^n(N_k) = \|\mathbb{1}_{N_k}\|_1 \leq \|k|f|\|_1 = k\|f\|_1 = 0$  folgt nach Satz 4.23.3 für die abzählbare Vereinigung  $\lambda^n(N) = 0$ . □

Es liegt also nahe, aus  $\tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$  durch Äquivalenzklassenbildung einen neuen Raum zu machen, indem man  $f \sim g$  setzt, falls  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq g(x)\}$  eine Nullmenge ist. Nach Satz 4.26 können wir dabei gleich annehmen, dass der Wert Unendlich nicht angenommen wird, also mit  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  statt mit  $\tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$  arbeiten.

## 4.5 Abbildungen von Nullmengen

Die in (4.1) eingeführten Quader des  $\mathbb{R}^n$  sind die Bausteine unser Maßtheorie. Um das Verhalten von Maßen unter Abbildungen zu untersuchen, sind aber *Würfel*, also Quader gleicher Seitenlänge, praktischer.

**4.29 Satz** Für jede offene Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  existiert eine abzählbare Menge  $(Q_i)_{i \in I}$  von bis auf Nullmengen disjunkten kompakten Würfeln  $Q_i \subset U$  mit

$$U = \bigcup_{i \in I} Q_i.$$

**Beweis:** Für  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{Z}^n$  ist  $Q_{k,a}$  der kompakte Würfel

$$Q_{k,a} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in [2^{-k}a_i, 2^{-k}(a_i + 1)]\}$$

der Kantenlänge  $2^{-k}$ . Es gilt  $\lambda^n(Q_{k,a} \cap Q_{k,a'}) = \delta_{a,a'} 2^{-nk}$ ,

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{a \in \mathbb{Z}^n} Q_{k,a} \quad \text{und} \quad Q_{k,a} = \sum_{\substack{b \in \mathbb{Z}^n \\ b_i \in \{2a_i, 2a_i+1\}}} Q_{k+1,b}. \tag{4.13}$$

Setzen wir  $K_0 := \emptyset$  und induktiv für  $\ell \in \mathbb{N}$

$$I_\ell := \{(\ell, a) \mid Q_{\ell,a} \subset U \setminus \overset{\circ}{K}_{\ell-1}\},$$

$$K_\ell := K_{\ell-1} \cup \bigcup_{i \in I_\ell} Q_i,$$

dann sind die  $I_\ell$  abzählbar. Damit ist auch  $I := \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} I_\ell$  abzählbar.

Jeder Punkt  $x \in U$  liegt in einem Kompaktum  $K_\ell$ , denn wegen der Offenheit von  $U$  und (4.13) gibt es einen Würfel  $Q_{k,a}$  mit  $x \in Q_{k,a} \subset U$ . Ist  $\ell \in \mathbb{N}$  das kleinste solche  $k$ , dann ist auch  $Q_{\ell,a} \cap \overset{\circ}{K}_{\ell-1} = \emptyset$ . □

**4.30 Definition** Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen metrischen Räumen heißt **lokal lipschitz-stetig**, wenn für jedes Kompaktum  $K \subset X$  die Restriktion  $f|_K$  lipschitz-stetig ist.

**4.31 Satz** Alle Abbildungen  $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$  mit offenem Definitionsbereich  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  sind lokal lipschitz-stetig.

**Beweis:** Es reicht aus, dies für die Komponenten  $f_i$  von  $f = (f_1, \dots, f_n)$  zu zeigen. Sei also o.B.d.A.  $n = 1$ . Wäre  $f|_K$  nicht lipschitz-stetig, dann würde es eine Folge  $(x_k, y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $x_k \neq y_k \in K$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|f(x_k) - f(y_k)|}{\|x_k - y_k\|} = \infty$  geben. Da  $K$  kompakt ist, können wir die Existenz der Limiten  $x := \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in K$  und  $y := \lim_{k \rightarrow \infty} y_k \in K$  annehmen.

- Der Fall  $x \neq y$  kann nicht auftreten, denn dann ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|f(x_k) - f(y_k)|}{\|x_k - y_k\|} = \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|} < \infty.$$

- Der Fall  $x = y$  ist ebenfalls unmöglich, denn wegen der Offenheit von  $U$  gibt es eine abgeschlossene Vollkugel  $B_r(x) \subset U$  von positivem Radius  $r$ . Wegen der Stetigkeit von  $Df$  gilt

$$L := \sup\{\|Df(z)\| \mid z \in B_r(x)\} < \infty.$$

Für große  $k \in \mathbb{N}$  sind  $x_k$  und  $y_k$  in  $B_r(x)$ , wie auch ihre Verbindungsstrecke  $S_k$ . Es gibt also nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein  $\xi_k \in S_k$  mit  $f(x_k) - f(y_k) = Df(\xi_k) \cdot (x_k - y_k)$ , also  $\frac{|f(x_k) - f(y_k)|}{\|x_k - y_k\|} \leq \|Df(\xi_k)\| \leq L$ .  $\square$

**4.32 Satz** Ist  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  (mit  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen und  $m \leq n$ ) lokal lipschitzstetig und  $N \subseteq U$  eine Nullmenge, dann ist  $f(N) \subseteq \mathbb{R}^n$  ebenfalls eine Nullmenge.

**Beweis:** • Nach Satz 4.29 können wir  $U$  durch abzählbar viele kompakte Würfel  $K_\ell$  ausschöpfen. Für jedes dieser Kompakta  $K_\ell$  ist  $N_\ell := N \cap K_\ell$  nach Satz 4.23.2 ebenfalls eine Nullmenge. Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es eine Hüllreihe  $\varphi = \sum_{r=1}^{\infty} c_r \mathbb{1}_{Q_r}$  von  $\mathbb{1}_{N_\ell}$  mit  $\|\varphi\|_1 < \varepsilon$ .  $\varphi$  lässt sich (bezüglich  $\|\cdot\|_1$ ) durch ihre Partialsummen  $\sum_{r=1}^{r'} c_r \mathbb{1}_{Q_r}$  approximieren und ist daher in  $\tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$ , mit  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi dx = \|\varphi\|_1$ . Die Menge

$$V := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) > 1\}$$

enthält  $N_\ell$ , denn  $\varphi \geq \mathbb{1}_{N_\ell}$ . Außerdem ist  $V$  offen, denn ist  $\sum_{r=1}^{r'} c_r \mathbb{1}_{Q_r}(x) > 1$ , dann gilt diese Ungleichung auf dem (wegen  $r' < \infty$  offenen) Schnitt der  $x$  enthaltenden offenen Quader  $Q_\ell$ . Wir können also über  $V$  integrieren. Ferner ist

$$\lambda^m(V) \leq \int_V \varphi dx \leq \int_{\mathbb{R}^m} \varphi dx < \varepsilon.$$

- Nach Satz 4.29 können wir  $V$  durch abzählbar viele bis auf Nullmengen disjunkte Würfel  $W_r$  ausschöpfen. Die Vereinigung der Bilder  $f(W_r)$  überdeckt damit  $f(V)$ , also auch  $f(N_\ell)$ . Auch wenn diese Würfel nicht ganz in  $K_n$  enthalten sein müssen, können wir o.B.d.A. annehmen, dass für eine geeignete Lipschitzkonstante  $L$  gilt:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad (x, y \in W_r, r \in \mathbb{N}).$$

Damit ist das Bild  $f(W_r)$  von  $W_r$  in einem Würfel  $W'_r \subset \mathbb{R}^n$  enthalten, dessen Kantenlängen  $L\sqrt{m}$ -mal<sup>13</sup> so groß ist wie die Kantenlänge  $D_r$  von  $W_r$ . Nach Definition der Würfel in Satz 4.29 ist  $D_r \leq 1$ . Daher gilt mit  $c := (L\sqrt{m})^n$

$$\lambda^n(W'_r) \leq cD_r^n \leq cD_r^m = c\lambda^m(W_r),$$

denn nach Annahme ist  $n \geq m$ .

Insgesamt ist für alle  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \|\mathbb{1}_{f(N_\ell)}\|_1 &\leq \|\mathbb{1}_{f(V)}\|_1 \leq \sum_{r=1}^{\infty} \|\mathbb{1}_{f(W_r)}\|_1 \leq \sum_{r=1}^{\infty} \|\mathbb{1}_{W'_r}\|_1 \\ &\leq c \sum_{r=1}^{\infty} \|\mathbb{1}_{W_r}\|_1 = c\|\mathbb{1}_{\cup_{r=1}^{\infty} W_r}\|_1 = c\|\mathbb{1}_V\|_1 \leq c\varepsilon, \end{aligned}$$

also auch  $f(N_\ell)$  eine Nullmenge. □

### 4.33 Bemerkungen

1. Auf die lokale Lipschitz-Stetigkeit von  $f$  kann nicht verzichtet werden. Es gibt nämlich stetige  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die Nullmengen auf Mengen von positivem Maß abbilden.

Ein Beispiel ergibt sich durch Verwendung der Peanokurve  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  (siehe Bsp. 6.2.3 der *MP-2*). Diese ist stetig, und ihr Bild  $c([0, 1]) = [0, 1]^2$  hat Lebesgue-Maß 1 in  $\mathbb{R}^2$ .

$$\hat{c} : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \hat{c}(x, y) := c(x)$$

ist stetig, und das Bild der Nullmenge  $[0, 1] \times \{0\}$  unter  $\hat{c}$  besitzt Maß 1.

Dass hier von einem nicht offenen Intervall  $[0, 1]$  ausgegangen wurde, ist für das Argument nicht wesentlich.

2. Für Bilddimensionen  $n < m$  wird die Aussage des Satzes ebenfalls falsch, wie man schon durch Betrachtung von linearen Abbildungen  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  sieht.  $\diamond$

Auch wenn unter der Projektion  $\pi_2 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  Nullmengen  $N$  i.Allg. nicht auf Nullmengen abgebildet werden, sind die Schnitte von  $N$  mit den Fasern  $\pi_2^{-1}(y)$  im Allgemeinen  $\lambda^m$ -Nullmengen:

**4.34 Satz** Für  $m, p \in \mathbb{N}$ ,  $n := m + p$ , eine Nullmenge  $N^{(n)} \subset \mathbb{R}^n$  und

$$N_y^{(m)} := \{x \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in N^{(n)}\}$$

ist  $N^{(p)} := \{y \in \mathbb{R}^p \mid N_y^{(m)} \text{ ist keine Nullmenge in } \mathbb{R}^m\}$  eine Nullmenge in  $\mathbb{R}^p$ .

<sup>13</sup>Der Faktor  $\sqrt{m}$  ist das Verhältnis der Länge der Raumdiagonale eines  $m$ -dimensionalen Würfels zu seiner Seitenlänge.

**Beweis:** Wie im Beweis des Satzes 4.32 können wir für alle  $\varepsilon > 0$  die Nullmenge  $N^{(n)}$  durch abzählbar viele Quader  $Q_k \subset \mathbb{R}^n$  überdecken mit  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(Q_k) < \varepsilon$ . Ähnlich wie  $\pi_2 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  bezeichnen wir mit  $\pi_1 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$  die Projektion auf den ersten Faktor. Da die Quader achsenparallel sind, sind ihre Projektionen ebenfalls Quader. Wegen  $\mathbb{1}_{N^{(n)}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{Q_k}$  gilt auch

$$\mathbb{1}_{N_y^{(m)}} \leq \varphi_y := \sum_{k=1}^{\infty} c_k(y) \pi_1(Q_k) \quad \text{mit} \quad c_k(y) := \mathbb{1}_{\pi_2(Q_k)}(y).$$

Es ist

$$N^{(p)} = \{y \in \mathbb{R}^p \mid f(y) > 0\} \quad \text{für} \quad f(y) := \|\mathbb{1}_{N_y^{(m)}}\|_1,$$

also  $f(y) \leq \|\varphi_y\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(y) \lambda^m(\pi_1(Q_k))$  und damit

$$\|f\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^p(\pi_2(Q_k)) \cdot \lambda^m(\pi_1(Q_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(Q_k) < \varepsilon.$$

Da dies für alle  $\varepsilon > 0$  gilt, ist  $\|f\|_1 = 0$ , also  $N^{(p)}$  nach Satz 4.28 eine Nullmenge in  $\mathbb{R}^p$ .  $\square$

## 5 Sätze und Rechenregeln der Lebesgue-Integration

### 5.1 Der Banach-Raum $L^1(\mathbb{R}^n)$

Wir rekapitulieren den bisherigen Stand der Integrationstheorie:

Wir haben für eine große Klasse von Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  das sogenannte Lebesgue-Integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$$

eingeführt, und zwar zunächst auf dem Raum  $\mathcal{T}_n$  der Treppenfunktionen, und dann für den Raum  $\tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$  der sogenannten Lebesgue-integrierbaren Funktionen  $f$ . Dies waren solche Funktionen, die sich durch Folgen  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von Treppenfunktionen  $\varphi_k \in \mathcal{T}_n$  approximieren ließen im Sinn von

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \varphi_k\|_1 = 0.$$

Dabei ist  $\|\cdot\|_1$  die sogenannte  $\mathcal{L}^1$ -Halbnorm, definiert über das Infimum der Integrale von Hüllreihen. Ist dies der Fall, dann nimmt  $f$  den Wert  $\infty$  nur auf einer Nullmenge an, und eine Abänderung der Funktion auf einer solchen Menge beeinflusst den Wert des Integrals nicht. Wir betrachten daher im Weiteren den  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \subset \tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$  der Lebesgue-integrierbaren  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ .

Nun unterscheidet sich die Abbildung

$$\|\cdot\|_1 : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty)$$

von einer Norm dadurch, dass es von der Nullfunktion verschiedene Funktionen  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $\|f\|_1 = 0$  gibt. Ein Beispiel bildet die charakteristische Funktion einer Hyperfläche.

Normen sind ausgesprochen nützlich bei allen Konvergenzfragen. Wir hätten also gern eine Norm auf dem Raum der Lebesgue-integrierbaren Funktionen.

Hier hilft der Begriff der Nullmenge. Das ist eine Teilmenge des  $N \subset \mathbb{R}^n$  vom Lebesgue-Maß  $\lambda^n(N)$  Null oder, äquivalent, mit verschwindender Halbnorm

$$\|\mathbb{1}_N\|_1 = 0$$

der charakteristischen Funktion.

**5.1 Lemma**  $\mathcal{N} := \{f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_1 = 0\}$  ist ein Unterraum von  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ .

**Beweis:** •  $0 \in \mathcal{N}$ .

• Sind  $f, g \in \mathcal{N}$ , dann gilt nach der Dreiecksungleichung  $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 = 0$ , also auch  $f + g \in \mathcal{N}$ .

• Ist  $f \in \mathcal{N}$  und  $c \in \mathbb{C}$ , dann ist  $\|cf\|_1 = |c| \|f\|_1 = 0$ , also  $cf \in \mathcal{N}$ . □

Wir nennen nun zwei Funktionen  $g_1, g_2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  *äquivalent*, wenn sie sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden, oder gleichbedeutend, wenn  $g_1 - g_2 \in \mathcal{N}$ .

**5.2 Definition** Es sei  $L^1(\mathbb{R}^n)$  der  $\mathbb{C}$ -Vektorraum

$$L^1(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) / \mathcal{N} \quad \text{mit} \quad \|g + \mathcal{N}\|_1 := \|g\|_1.$$

Wir haben nun eine *Norm* auf diesem *Faktorraum* erklärt, dessen Elemente Äquivalenzklassen von Funktionen der Form  $g + \mathcal{N}$  sind, denn der Wert der  $\mathcal{L}^1$ -Halbnorm hängt nicht vom Repräsentanten der Äquivalenzklasse ab:

$$\|g_1\|_1 = \|g_2\|_1 \quad \text{für} \quad g_1, g_2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad g_1 - g_2 \in \mathcal{N}.$$

Außerdem ist nach Definition von  $\mathcal{N}$  die Halbnorm genau auf der Äquivalenzklasse  $\mathcal{N}$  der Nullfunktion  $0 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  gleich Null.

**5.3 Bemerkung** Der in der Analysis so wesentliche Raum  $L^1(\mathbb{R}^n)$  besteht nun nicht mehr aus Funktionen, sondern aus Äquivalenzklassen. Für solche Äquivalenzklassen  $\tilde{f} := f + \mathcal{N} \in L^1(\mathbb{R}^n)$  ist aber der Ausdruck  $\tilde{f}(x)$  undefiniert (wir können  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  ja an abzählbar vielen Stellen abändern, ohne  $f + \mathcal{N}$  zu verlassen).

Immerhin, in jeder Äquivalenzklasse  $f + \mathcal{N}$  gibt es höchstens eine stetige Funktion, und nichts hindert uns dann daran, gegebenenfalls mit diesem Repräsentanten zu arbeiten.

Die Elemente von  $L^1(\mathbb{R}^n)$  als Funktionen zu bezeichnen ist ein schlampiger aber üblicher Sprachgebrauch, und wir wollen hier mit der Tradition nicht brechen.  $\diamond$

Wir haben also jetzt aus  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  den normierten Raum

$$(L^1(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_1)$$

konstruiert, und das Lebesgue-Integral induziert ein positives lineares Funktional auf  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , das wir ebenfalls mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx \equiv \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx \quad (f \in L^1(\mathbb{R}^n))$$

bezeichnen. Die Frage ist nun, ob in  $L^1(\mathbb{R}^n)$  Cauchy-Folgen von [Äquivalenzklassen von] Funktionen konvergieren, ob dieser Raum also ein Banach-Raum ist. A priori muss dies nicht so sein:

**5.4 Beispiel** Es sei  $V := C([0, 1], \mathbb{C})$  der Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Einheitsintervall, und wir wollen ihn mit der Norm

$$\|f\| := \int_{[0,1]} |f(x)| \, dx \quad (f \in V)$$

versehen (Auf  $V$  ist dies tatsächlich eine Norm, denn es gibt keine von  $0 \in V$  verschiedene stetige Funktion  $f$  mit  $\int_{[0,1]} |f(x)| \, dx = 0$ .) Es sei für  $\varepsilon > 0$

$$f_\varepsilon \in V \quad , \quad f_\varepsilon(x) := \begin{cases} -1 & , \quad x \leq \frac{1}{2} - \varepsilon \\ \frac{x - \frac{1}{2}}{\varepsilon} & , \quad |x - \frac{1}{2}| < \varepsilon \\ 1 & , \quad x \geq \frac{1}{2} + \varepsilon \end{cases} .$$

$f_\varepsilon$  ist stetig und

$$\|f_\varepsilon - f_{\varepsilon'}\| < \varepsilon \quad \text{für alle } \varepsilon' \in (0, \varepsilon),$$

aber der punktweise Limes  $f_0 \in L^1([0, 1])$  (mit  $f_0(x) := \text{sign}(x - \frac{1}{2})$ ) ist zwar auch Norm-Limes in  $L^1([0, 1])$ , liegt aber nicht im Unterraum  $V$ .  $(V, \|\cdot\|)$  ist also kein Banach-Raum.  $\diamond$

Wir können auch nicht einfach so argumentieren, dass wir schon  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  durch Grenzwertbildung (für Treppenfunktionen) gewonnen haben, denn daraus folgt noch nicht automatisch, dass  $L^1(\mathbb{R}^n)$  unter erneuter Grenzwertbildung abgeschlossen ist. Trotzdem gilt:

**5.5 Satz (Riesz–Fischer)** 1.  $L^1(\mathbb{R}^n)$  ist ein Banach–Raum.

2. Ist  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $L^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $L^1$ –Grenzwert  $f$ , dann konvergiert eine geeignete Teilfolge fast überall gegen  $f$ .

**5.6 Bemerkung** Folgt nicht die zweite Behauptung aus der ersten? Cauchy-Folgen konvergieren doch immer gegen ihren Grenzwert, soweit dieser existiert! Ja, aber hier geht es nicht um  $L^1$ –Konvergenz, d.h.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_1 = 0$ , sondern um  $\lim_{k \rightarrow \infty} (f_k(x) - f(x)) = 0$  für fast alle  $x \in \mathbb{R}^n$ !  $\diamond$

**Beweis:** Wir gehen von den Äquivalenzklassen  $f_k \in L^1(\mathbb{R}^n)$  zu Repräsentanten in  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  über, die wir ebenfalls mit  $f_k$  bezeichnen.

Zunächst konstruieren wir eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , gegen die eine geeignete Teilfolge der Cauchy-Folge fast überall konvergiert. Danach zeigen wir, dass  $f$   $L^1$ –Grenzwert der Cauchy-Folge ist.

2) Wir können eine Teilfolge  $(f_{k_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$  mit  $\|f_k - f_{k_\ell}\|_1 \leq 2^{-\ell}$  für  $k \geq k_\ell$  auswählen, sodass insbesondere

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \|f_{k_{\ell+1}} - f_{k_\ell}\|_1 \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} 2^{-\ell} = 1$$

ist. Setzen wir  $g_\ell := f_{k_{\ell+1}} - f_{k_\ell}$  und  $g := \sum_{\ell=1}^{\infty} |g_\ell|$ , dann folgt mit der verallgemeinerten Dreiecksungleichung (4.7)

$$\|g\|_1 \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \|g_\ell\|_1 \leq 1 < \infty.$$

Nach Satz 4.26 (der Integrierbarkeit nicht voraussetzt!) ist  $\mathcal{N} := g^{-1}(\infty) \subset \mathbb{R}^n$  eine Nullmenge,  $\sum_{\ell=1}^{\infty} g_\ell$  konvergiert also fast überall absolut. Daher ist

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{\ell \rightarrow \infty} f_{k_\ell}(x) & , \quad x \notin \mathcal{N} \\ 0 & , \quad x \in \mathcal{N} \end{cases}$$

wegen

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} f_{k_\ell}(x) = f_{k_1}(x) + \sum_{\ell=1}^{\infty} g_\ell(x) \quad \text{für } x \notin \mathcal{N}$$

wohldefiniert, für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  endlich, und die Teilfolge  $(f_{k_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$  konvergiert fast überall gegen  $f$ .

1) Diese punktweise Konvergenz sagt aber noch nichts darüber aus, dass die  $f_k$  (oder auch nur die  $f_{k_\ell}$ ) in  $L^1(\mathbb{R}^n)$  gegen  $f$  konvergieren.

Dazu müssen wir ja zeigen, dass für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $k(\varepsilon)$  mit

$$\|f - f_k\|_1 \leq \varepsilon \quad (k \geq k(\varepsilon)) \tag{5.1}$$

gibt. Dazu sei  $m = m(\varepsilon)$  so gewählt, dass  $2^{2-m} \leq \varepsilon$  und  $k(\varepsilon) := k_m$ . Dann ist

- $\sum_{\ell=m}^{\infty} \|g_\ell\|_1 \leq \sum_{\ell=m}^{\infty} 2^{-\ell} = 2^{1-m} \leq \frac{\varepsilon}{2}$  und
- $\|f_k - f_{k_m}\|_1 \leq 2^{-m} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (k \geq k(\varepsilon)).$

Andererseits lässt sich  $f_{k_m} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  durch Treppenfunktionen  $\varphi \in \mathcal{T}_n$  beliebig genau (im  $L^1$ -Sinn) approximieren, es existiert also ein  $\varphi$  mit

$$\|f_{k_m} - \varphi\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daraus folgt mit der verallgemeinerten Dreiecksungleichung (4.7)

$$\begin{aligned} \|f - \varphi\|_1 &\leq \|f - f_{k_m}\|_1 + \|f_{k_m} - \varphi\|_1 = \left\| \sum_{\ell=m}^{\infty} g_\ell \right\|_1 + \|f_{k_m} - \varphi\|_1 \\ &\leq \sum_{\ell=m}^{\infty} \|g_\ell\|_1 + \|f_{k_m} - \varphi\|_1 \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

also  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ . (5.1) zeigen wir mit

$$\|f - f_k\|_1 \leq \|f - f_{k_m}\|_1 + \|f_{k_m} - f_k\|_1 \leq \varepsilon \quad (k \geq k(\varepsilon)).$$

Also ist  $f = L^1\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ . □

## 5.7 Bemerkungen

1. Das Lebesgue-Integral ist wegen

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} g \, dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f - g| \, dx = \|f - g\|_1 \quad (f, g \in L^1(\mathbb{R}^n))$$

eine Lipschitz-stetige Abbildung  $L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$  (mit Lipschitz-Konstante 1), also ein *stetiges* (lineares) Funktional. Aus  $f = L^1\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} f_k$  folgt also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx,$$

Limesbildung und Integration vertauschen also.

2. Die Folge der  $f_k$  selbst braucht *nicht* punktweise zu konvergieren: ◇

## 5.8 Beispiel einer im $L^1$ -Sinn aber nicht punktweise konvergenten Folge

Zu  $k \in \mathbb{N}$  seien  $\nu, q \in \mathbb{N}_0$  durch  $\nu := \lfloor \log_2 k \rfloor$  und  $q := k - 2^\nu$  definiert, also  $0 \leq q < 2^\nu$ . Wir wählen die Funktionenfolge

$$f_k := \mathbb{1}_{I_k} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad I_k := [q2^{-\nu}, (q+1)2^{-\nu}].$$

Es ist  $L^1\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = 0$ , denn  $\|f_k\|_1 = 2^{-\nu}$ , aber für **kein**  $x \in [0, 1]$  existiert der punktweise Limes

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x),$$

denn  $x$  ist in mindestens einem, höchstens zwei Intervallen  $I_k$  der Länge  $2^{-\nu}$  enthalten. Es ist eine gute Übung, sich zu überlegen, wie bei Auswahl einer geeigneten Teilfolge die punktweise Konvergenz sichergestellt werden kann. ◇

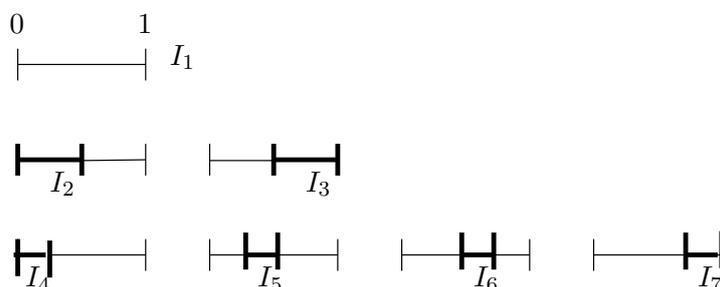


Abbildung 5.1: Folge der Intervalle  $I_k$

Man sollte auch ein Beispiel in umgekehrter Richtung im Kopf behalten:

### 5.9 Beispiel einer punktweise aber nicht im $L^1$ -Sinn konvergenten Folge

Es sei  $f_k := k\mathbb{1}_{[1/k, 2/k]}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). Dann ist  $f_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , und für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = 0$ .

Würde aber die Folge im  $L^1$ -Sinn gegen ein  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  konvergieren, dann müsste  $\int_{\mathbb{R}} f \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_k \, dx = 1$  gelten; gleichzeitig aber nach dem Satz von Riesz–Fischer (Satz 5.5)  $f(x) = 0$  für fast alle  $x \in \mathbb{R}$  gelten, im Widerspruch zu Satz 4.28.  $\diamond$

Oft kann man für eine Folge integrierbarer Funktionen die Existenz ihres punktweisen Limes nachprüfen, will aber wissen, ob sie auch im  $L^1$ -Sinn gegen diesen konvergieren. Wir werden dafür im folgenden Satz, in Lemma 5.12 und im Satz 5.17 unterschiedliche Kriterien kennenlernen.

### 5.10 Satz von der monotonen Konvergenz oder Satz von Beppo Levi

Es sei  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen  $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit beschränkten Integralen  $\int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx$ .

Dann ist der punktweise Limes  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ,  $f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$  in  $\tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^n)$ , und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx. \quad (5.2)$$

**Beweis:** Zunächst existiert  $I := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx \in \mathbb{R}$ , denn die Folge dieser reellen Zahlen ist monoton wachsend und beschränkt. Aus dem gleichen Grund existiert der punktweise Limes  $f$ . Wegen

$$\|f_m - f_k\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} (f_m - f_k) \, dx \leq I - \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx \quad \text{für } m \geq k$$

ist  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine  $L^1$ -Cauchy-Folge und besitzt damit nach dem Satz von Riesz–Fischer (Satz 5.5) einen  $L^1$ -Limes  $f$ . Nach Bemerkung 5.7.1. gilt (5.2).  $\square$

### 5.11 Bemerkungen

1. Die Voraussetzung der Monotonie kann selbst dann nicht weggelassen werden, wenn der punktweise Limes  $f$  existiert:  
Ähnlich wie in Beispiel 5.9 besitzen die Funktionen  $f_k := k^{-1} \mathbb{1}_{(0,k]} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  ein (durch 1) beschränktes Integral, besitzen sogar einen punktweisen Limes  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = 0$ , konvergieren aber nicht im  $L^1$ -Sinn gegen diesen.
2. Eine zu Satz 5.10 analoge Aussage gilt für monoton *fallende* Folgen  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ .  
◇

Oft ist die Monotonievoraussetzung nicht erfüllt, man kann aber auf den punktweisen Limes Inferior trotzdem den Satz von der monotonen Konvergenz anwenden:

**5.12 Lemma (Fatou)** *Es seien  $f_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) nicht negative Funktionen, für die  $I := \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx < \infty$  gilt. Dann ist die durch*

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty] \quad , \quad f(x) := \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$$

definierte Funktion ebenfalls integrierbar, und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx \leq I. \tag{5.3}$$

**5.13 Bemerkung** Beispiel 5.9 zeigt, dass in (5.3) selbst dann im Allgemeinen keine Gleichheit gilt, wenn der Limes  $I = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx$  existiert. ◇

**Beweis:** • Die Folge der durch

$$F_k(x) := \inf\{f_\ell(x) \mid \ell \geq k\} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

definierten Funktionen  $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ist monoton wachsend. Nach Definition des Limes Inferior (Definition 7.13 der *Analysis I*) gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

• Definiert man für  $\ell \geq k \in \mathbb{N}$

$$G_{k,\ell}(x) := \min\{f_m(x) \mid m \in \{k, \dots, \ell\}\} \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

dann ist  $G_{k,\ell} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ , für jedes  $k \in \mathbb{N}$  ist die Folge  $(G_{k,\ell})_{\ell \geq k}$  monoton fallend, und

$$F_k(x) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} G_{k,\ell}(x) \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Nach dem Satz von Beppo Levi folgt damit auch  $F_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ .

• Andererseits ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_k(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \inf_{\ell \geq k} f_\ell(x) dx \leq \inf_{\ell \geq k} \int_{\mathbb{R}^n} f_\ell(x) dx.$$

Also ist wegen  $I = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{\ell \geq k} \int_{\mathbb{R}^n} f_\ell(x) dx < \infty$

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_k(x) dx \leq I$$

und der Satz von Beppo Levi auf die  $F_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  anwendbar. Deren punktweiser Limes  $f$  ist damit integrierbar mit  $\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} F_k dx \leq I$ .  $\square$

Als zweite Anwendung des Satzes von Beppo Levi zeigen wir die folgende wichtige Eigenschaft des Lebesgue-Maßes.

**5.14 Satz** *Das Lebesgue-Maß  $\lambda^n$  ist  $\sigma$ -additiv. Sogar für messbare  $A_k \subset \mathbb{R}^n$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), die bis auf Nullmengen disjunkt sind ( $\lambda^n(A_k \cap A_l) = 0$  für  $l \neq k$ ) gilt*

$$\lambda^n \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(A_k),$$

zumindest falls die Summe endlich ist (siehe Bemerkung 4.17).

**Beweis:** Für  $B_l := \bigcup_{k=1}^l A_k$  ist die Folge der Funktionen  $\mathbb{1}_{B_l}$  monoton wachsend. Wenn zunächst die  $A_k$  disjunkt sind, gilt  $\mathbb{1}_{B_l} = \sum_{k=1}^l \mathbb{1}_{A_k}$ , also

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{B_l} dx = \sum_{k=1}^l \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{A_k} dx = \sum_{k=1}^l \lambda^n(A_k) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

$(\mathbb{1}_{B_l})_{l \in \mathbb{N}}$  konvergiert dann punktweise gegen die charakteristische Funktion von  $B := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ . Sind die Integrale  $\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{B_l} dx$  beschränkt, dann ist nach Satz 5.10

$$\lambda^n(B) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_B dx = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{B_l} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(A_k).$$

Sind die  $A_k$  nur bis auf Nullmengen disjunkt, dann ändert dies nach Satz 4.23 nichts an der Richtigkeit der Aussage.  $\square$

**5.15 Satz** *Lebesgue-Integral und Lebesgue-Maß sind translationsinvariant, d.h.*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x+a) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \quad (f \in L^1(\mathbb{R}^n), a \in \mathbb{R}^n)$$

und

$$\lambda^n(A+a) = \lambda^n(A) \quad (A \subset \mathbb{R}^n \text{ meßbar}, a \in \mathbb{R}^n).$$

**Beweis:** Alle unsere relevanten Definitionen, angefangen mit der Definition des Quader-Volumen über die der Treppenfunktionen und ihres Integrals, bis zu den  $\mathcal{L}^1$ -Funktionen und meßbaren Mengen, waren translationsinvariant.  $\square$

**5.16 Bemerkung** Zusammen mit der Translationsinvarianz und der *Normierung*  $\lambda^n([0, 1]^n) = 1$  des Würfelvolumens legt die  $\sigma$ -Additivität das Lebesgue-Maß  $\lambda^n : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  auf einer geeigneten  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{M}$  des  $\mathbb{R}^n$  eindeutig fest, siehe z.B. BAUER [Ba], §8.  $\diamond$

Ein weiteres Kriterium, für den punktweisen Limes einer Funktionenfolge zu zeigen, dass er auch der  $L^1$ -Limes ist, bietet die folgende wichtige Aussage:

**5.17 Satz von der majorisierten Konvergenz oder Satz von Lebesgue**  
*Es sei  $f_k \in L^1(\mathbb{R}^n)$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), und der punktweise Limes*

$$f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$$

*existiere fast überall. Wenn eine gemeinsame Majorante  $F \geq |f_k|$ ,  $F \in L^1(\mathbb{R}^n)$  existiert, dann ist  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  und*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx. \quad (5.4)$$

**Beweis:**

- Für Real- und Imaginärteile der  $f_k$  gelten die gleichen Voraussetzungen wie für die  $f_k$  selbst. Gleiches gilt für Positiv- und Negativteile reeller  $f_k$ .  
 Daher nehmen wir o.B.d.A.  $f_k \geq 0$  an und zeigen den Satz in diesem Spezialfall. Die Aussage für komplexwertige  $f_k$  folgt dann durch Zerlegung.

- Wir setzen

$$f^+(x) := \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \quad \text{und} \quad f^-(x) := \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x).$$

Damit ist

$$0 \leq f^-(x) \leq f^+(x) \leq F(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

und nach Annahme der fast überall-Existenz von  $f(x)$  gilt außerhalb einer Nullmenge

$$f^+(x) = f(x) = f^-(x).$$

- Nach dem Lemma von Fatou (Lemma 5.12) ist  $f^-$  integrierbar mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^- \, dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx.$$

Andererseits können wir dieses Lemma auch auf die Funktionen  $g_k := F - f_k$  anwenden, denn es ist  $g_k \geq 0$ ,  $g_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  und  $\int_{\mathbb{R}^n} g_k \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} F \, dx$ . Wir erhalten die Abschätzung für

$$g(x) := \liminf_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = F(x) - f^+(x),$$

$\int_{\mathbb{R}^n} g \, dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} F \, dx - \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx$ , also

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^+ \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (F - g) \, dx \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, dx.$$

- Damit ist

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} f^- dx = \int_{\mathbb{R}^n} f dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ dx \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx.$$

Hier muss offensichtlich Gleichheit gelten.  $\square$

**5.18 Bemerkung** Wir wissen schon, dass (5.4) für den  $L^1$ -Limes einer Cauchy-Folge  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  integrierbarer Funktionen gilt (Satz 5.5 von Riesz–Fischer und Bemerkung 5.7.1.) und ebenso für eine monoton wachsende Folge mit beschränktem Integral (Satz von Beppo Levi). Aber oft ist eben nur der Satz 5.17 anwendbar, denn die  $L^1$ -Konvergenz ist oft nur schwer zu überprüfen und die Monotonie oft nicht gegeben.  $\diamond$

**5.19 Beispiel (Die Gammafunktion)** Die Gammafunktion wird auf der Halbebene  $D := \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 0\}$  durch  $\Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$  definiert.

Es ist  $\Gamma(1) = 1$ , und durch partielle Integration schließen wir auf ihre *Funktionalgleichung*

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad (s \in D).$$

$D$  ist für die  $\Gamma$  definierende Integralformel die größtmögliche Halbebene, denn schon für  $s = 0$  ist der Integrand nicht mehr in  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$ .

Andererseits ist für viele mathematische Fragen, etwa in der analytischen Zahlentheorie, eine Ausweitung des Definitionsbereiches wünschenswert.

Um dies durchzuführen, erinnern wir uns daran (Satz 8.34 der *Analysis I*), dass

$$e^{-t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \quad (t \in \mathbb{C}) \quad (5.5)$$

gilt. Wir würden gern die Polynome  $t \mapsto \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$  statt  $e^{-t}$  in die Integraldefinition eintragen, explizit integrieren und dann den Limes bilden. Dies ist nicht direkt möglich, denn dann wäre der Integrand nicht mehr in  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$ . Allerdings ist dies für  $s \in D$  der Fall, wenn wir  $f_s(t) := t^{s-1} e^{-t}$  durch

$$f_{s,n}(t) := \begin{cases} t^{s-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & , \quad 0 < t \leq n \\ 0 & , \quad t > n \end{cases}$$

ersetzen, denn die  $f_{s,n}$  sind stetig (beachte  $f_{s,n}(n) = 0$ ) und integrierbar.

Wegen (5.5) gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{s,n}(t) = f_s(t) \quad (t > 0).$$

Außerdem ist für reelle  $s > 0$

$$0 \leq f_{s,n}(t) < f_s(t),$$

denn für  $t < n$  ist wegen  $\log(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} x^k/k$

$$\log\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = n \log\left(1 - \frac{t}{n}\right) = -t - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{kn^{k-1}} \leq -t,$$

also  $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$ . Damit ist für beliebige  $s \in D$  und  $\Gamma_n(s) := \int_0^{\infty} f_{s,n}(t) dt$

$$\begin{aligned} |\Gamma_n(s)| &\leq \int_0^{\infty} |f_{s,n}(t)| dt = \int_0^n t^{\operatorname{Re}(s)-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt \\ &\leq \int_0^{\infty} t^{\operatorname{Re}(s)-1} e^{-t} dt = \Gamma(\operatorname{Re}(s)). \end{aligned}$$

Der Satz von Lebesgue ergibt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(s) = \Gamma(s) \quad (s \in D).$$

Andererseits folgt durch partielle Integration

$$\begin{aligned} \Gamma_n(s) &= \int_0^n t^{s-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \frac{n}{ns} \int_0^n t^s \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt \\ &= \dots = \frac{n! n^{s+n}}{n^n s(s+1) \cdot \dots \cdot (s+n)} = \frac{n! n^s}{s(s+1) \cdot \dots \cdot (s+n)}. \end{aligned}$$

Damit sind alle  $\Gamma_n(s)$  auf dem gemeinsamen Definitionsbereich

$$\tilde{D} := \{s \in \mathbb{C} \mid s \notin \mathbb{Z} - \mathbb{N}_0\}$$

definiert, es gilt

$$\Gamma_{n+1}(s) = \Gamma_1(s) \prod_{k=1}^n \frac{\Gamma_{k+1}(s)}{\Gamma_k(s)} \quad (s \in \tilde{D}),$$

und wegen

$$\frac{\Gamma_{k+1}(s)}{\Gamma_k(s)} = \frac{(k+1) \left(\frac{k+1}{k}\right)^s}{s+k+1} = \frac{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^s}{1 + \frac{s}{k+1}} = \frac{1 + \frac{s}{k} + \mathcal{O}(k^{-2})}{1 + \frac{s}{k} + \mathcal{O}(k^{-2})} = 1 + \mathcal{O}(k^{-2})$$

existiert der Limes

$$\Gamma(s) := \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(s) = \Gamma_1(s) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{\Gamma_{k+1}(s)}{\Gamma_k(s)} \quad (s \in \tilde{D}).$$

Dass  $\tilde{D}$  der größtmögliche Definitionsbereich ist, sieht man an der Divergenz von  $\Gamma$  bei den nicht positiven ganzen Zahlen. Mithilfe des Satzes von der majorisierten Konvergenz haben wir (im Sinn der im Kapitel 8 behandelten Funktionentheorie) die  $\Gamma$ -Funktion *analytisch fortgesetzt*.  $\diamond$

Wie stellen wir nun fest, ob eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  Lebesgue-integrierbar ist? Hier ist oft das folgende Kriterium nützlich:

**5.20 Satz** *Es sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  fast überall stetig und  $|f| \leq g$  für ein  $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ; dann ist auch  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ .*

Satz 5.20 wird unter Zuhilfenahme des Satzes von Lebesgue bewiesen, siehe [Ko, Kap. 5.3]. Um den Satz anwenden zu können, braucht man natürlich einen gewissen Vorrat an Majoranten  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

Beispielsweise kann man sich fragen, wie schnell eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  lokal, d.h. in der Umgebung eines Punktes  $x \in \mathbb{R}^n$ , divergieren kann, bzw. wie langsam sie bei Unendlich gegen Null streben kann, damit noch  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  gilt. Entsprechende Majoranten für  $f$  diskutieren wir in Beispiel 5.35, wenn wir die Transformationsformel zur Verfügung haben.

Eine weitere Anwendung findet der Satz 5.17 bei der Theorie der Fourier-Transformation:

### 5.21 Definition

Die **Fourier-Transformierte**  $\hat{f}$  von  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  ist definiert durch

$$\hat{f}(k) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ik \cdot x} dx \quad (k \in \mathbb{R}^n).$$

**5.22 Bemerkung** Oft wird die Fourier-Transformation auch unter Weglassung der Konstante  $(2\pi)^{-n/2}$  definiert. Wenn wir später quadratintegrale Funktionen Fourier-transformieren (siehe Satz 7.20), ist allerdings diese Wahl nötig, um die Unitarität der linearen Abbildung  $f \mapsto \hat{f}$  sicherzustellen.  $\diamond$

Zunächst wissen wir noch nicht einmal, ob für  $k \neq 0$  das Integral konvergiert. Wir würden gern Satz 4.8 benutzen, nach dem das Produkt von  $f$  und einer beschränkten  $\mathcal{L}^1$ -Funktion  $g$  wieder integrierbar ist, aber  $g(x) := e^{-ik \cdot x}$  ist nicht integrierbar. Tatsächlich ist das auch nicht nötig:

**5.23 Satz** Das Produkt von  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  und einer beschränkten Funktion  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  ist integrierbar, wenn  $g$  **lokal integrierbar** ist, d.h. wenn für alle  $r > 0$  die Funktionen

$$g_r(x) := \begin{cases} g(x) & , \|x\| \leq r \\ 0 & , \|x\| > r \end{cases}$$

integrierbar sind.

**Beweis:** Nach Satz 4.8 ist  $f g_r \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ . Außerdem ist  $|f g_r| \leq F$  mit  $F := M |f|$  und  $M := \sup_x |g(x)| < \infty$ . Damit ist nach dem Satz 5.17 von Lebesgue auch  $f g$  integrierbar.  $\square$

Für  $g(x) := e^{-ik \cdot x}$  ist  $M = 1$ , und  $g$  ist stetig, also nach Satz 5.20  $g_r$  integrierbar. Satz 5.23 garantiert uns also, dass die Fourier-Transformierte  $\hat{f}$  überhaupt wohldefiniert ist. Der Satz von der majorisierten Konvergenz liefert uns aber noch genauere Informationen über  $\hat{f}$ :

**5.24 Satz** Die Fourier-Transformierte  $\hat{f}$  von  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  ist stetig.

**Beweis:** Für eine beliebige Folge  $(k_l)_{l \in \mathbb{N}}$  von  $k_l \in \mathbb{R}^n$  mit  $\lim_{l \rightarrow \infty} k_l = k$  gilt punktweise

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f(x) e^{-ik_l \cdot x} = f(x) e^{-ik \cdot x}.$$

Damit ist für  $f_l(x) := f(x) e^{-ik_l \cdot x}$  die Voraussetzung von Satz 5.17 erfüllt, und es folgt  $\hat{f}(k) = \lim_{l \rightarrow \infty} \hat{f}(k_l)$ .  $\square$

Diese Stetigkeitseigenschaft der Fourier-Transformierten geht allerdings verloren, wenn wir die quadratintegrierbaren Funktionen  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  betrachten, siehe Kapitel 7.2.

**5.25 Beispiel** Für das Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  und  $f := \mathbb{1}_{[a,b]}$  ist  $f \in L^1(\mathbb{R})$  und

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-ik \cdot x} dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ikb} - e^{-ika}}{-ik} & , k \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (b - a) & , k = 0 \end{cases}.$$

Taylor-Entwicklung von  $\exp$  bei 0 oder Anwendung des Satzes von L'Hospital zeigt die Stetigkeit von  $\hat{f}$ .  $\diamond$

## 5.2 Der Satz von Fubini ( $L^1$ -Version)

Praktisch wird man die Lebesgue-Integration im  $\mathbb{R}^n$  mithilfe des Satzes von Fubini auf die eindimensionale Integration zurückführen. Wir benutzen dabei den Satz in der folgenden Form (die im Gegensatz zur Version 4.14 für den gesamten  $\mathbb{R}^n$  als Integrationsgebiet anwendbar ist).

**5.26 Satz von Fubini** Für  $m, p \in \mathbb{N}$ ,  $n = m + p$  und  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  ist

$$N^{(p)} := \{y \in \mathbb{R}^p \mid f(\cdot, y) \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m)\} \quad (5.6)$$

eine Nullmenge, und für

$$F(y) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dx & , y \in \mathbb{R}^p \setminus N^{(p)} \\ 0 & , y \in N^{(p)} \end{cases} \quad (5.7)$$

ist  $F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^p)$ . Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(z) dz = \int_{\mathbb{R}^p} \left( \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dx \right) dy. \quad (5.8)$$

### 5.27 Bemerkungen (Fubini)

1. Da  $N^{(p)}$  eine Nullmenge ist, braucht  $F$  auf dieser Menge nicht definiert zu werden, um als Element von  $L^1(\mathbb{R}^p)$ , also als Äquivalenzklasse von Funktionen in  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^p)$  festgelegt zu sein.
2. Es gibt  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p)$ , für die  $N^{(p)} \neq \emptyset$  gilt, ja sogar eine dichte Teilmenge des  $\mathbb{R}^p$  ist.  
Ein Beispiel ist die charakteristische Funktion der Teilmenge  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{Q}^p$  des Vektorraums  $\mathbb{R}^n$ , mit  $N^{(p)} = \mathbb{Q}^p$ .
3. In Satz 4.14, im wesentlichen einem Spezialfall des obigen Satzes von Fubini, bekommt man wegen der Beschränktheitsannahmen an die Funktion und ihren Definitionsbereich aber noch die Zusatzinformation  $N^{(p)} = \emptyset$ .
4. Der folgende Beweis ist kompliziert. Es ist daher sinnvoll, sich zunächst die Strategie zu überlegen. Wegen  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  gibt es eine  $L^1$ -approximierende Folge von  $\varphi_k \in \mathcal{T}_n$ . Aus dieser wird eine Folge von  $\varphi_{k,y} := \varphi_k(\cdot, y) \in \mathcal{T}_m$  gewonnen, die  $f_y := f(\cdot, y)$   $L^1$ -approximiert. Deren Integrale  $y \mapsto \Phi_k(y)$  sind Treppenfunktionen, die  $y \mapsto F(y)$  im  $L^1$ -Sinn approximieren. Daher ist  $F \in L^1(\mathbb{R}^p)$ . Der Satz von Fubini für Treppenfunktionen impliziert dann die Richtigkeit der Formel 5.8.  $\diamond$

**Beweis:** • **Benutzung des Satzes von Riesz-Fischer auf  $\mathbb{R}^n$ :** Es sei  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  approximierende Folge von  $\varphi_k \in \mathcal{T}_n$ , die der Bedingung

$$\|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_1 \leq 2^{-k} \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (5.9)$$

genügt und für die

$$N^{(n)} := \{z \in \mathbb{R}^n \mid f(z) \text{ ist nicht Grenzwert von } (\varphi_k(z))_{k \in \mathbb{N}}\}$$

eine Nullmenge ist. Der Satz von Riesz–Fischer (Satz 5.5) garantiert die Existenz einer solchen Folge.

Unser Ziel ist zunächst, durch die Treppenfunktionen

$$\varphi_{k,y} \in \mathcal{T}_m \quad , \quad \varphi_{k,y}(x) := \varphi_k(x, y) \quad (y \in \mathbb{R}^p)$$

die Funktion  $f_y : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  zu approximieren.

Punktweise gelingt dies für fast alle  $y \in \mathbb{R}^p$  fast überall in  $\mathbb{R}^m$ , denn die  $\varphi_k$  konvergieren außerhalb der Nullmenge  $N^{(n)} \subset \mathbb{R}^n$  gegen  $f$ , und nach Satz 4.34 ist für  $N_y^{(m)} := \{x \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in N^{(n)}\}$

$$N_I^{(p)} := \{y \in \mathbb{R}^p \mid N_y^{(m)} \text{ ist keine Nullmenge in } \mathbb{R}^m\}$$

eine Nullmenge in  $\mathbb{R}^p$ .

• **Benutzung des Satzes von Fubini für Treppenfunktionen:** Wir wollen diese Konvergenz gegen  $f_y$  aber auch *im  $L^1$ -Sinn* zeigen.

Nach Satz 4.4.3 ist für die Treppenfunktion

$$\begin{aligned} \Psi_k \in \mathcal{T}_p \quad , \quad \Psi_k(y) &:= \int_{\mathbb{R}^m} |\varphi_{k+1}(x, y) - \varphi_k(x, y)| dx \\ \int_{\mathbb{R}^p} \Psi_k(y) dy &= \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_{k+1} - \varphi_k| dz = \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_1 \leq 2^{-k} \quad (k \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Also bilden die  $\Psi_k$  eine  $L^1$ -konvergente Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k$ , und für fast alle  $y \in \mathbb{R}^p$  stimmen nach dem Satz von Beppo Levi der punktweise Grenzwert  $\sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(y)$  mit dem  $L^1$ -Grenzwert überein. Insbesondere existiert nach Satz 4.26 eine Nullmenge  $N_{II}^{(p)}$  mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(y) < \infty \quad (y \in \mathbb{R}^p \setminus N_{II}^{(p)}). \quad (5.10)$$

• **Benutzung des Satzes von Riesz–Fischer auf  $\mathbb{R}^m$ :**

Wir setzen  $\tilde{N}^{(p)} := N_I^{(p)} \cup N_{II}^{(p)}$ . Dies ist ebenfalls eine Nullmenge in  $\mathbb{R}^p$ .

Für  $y \in \mathbb{R}^p \setminus \tilde{N}^{(p)}$  ist wegen (5.10) die Folge der  $\varphi_{k,y} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m)$  eine Cauchy-Folge, die nach dem Satz von Riesz–Fischer gegen eine Funktion in  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m)$  konvergiert. Diese Funktion muß aber  $f_y$  sein, denn die  $\varphi_{k,y}$  konvergieren (da  $y \notin N_I^{(p)}$ ) auch fast überall gegen  $f_y$ . Also ist auch  $f_y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m)$ , und  $N^{(p)}$  aus (5.6) ist wegen  $N^{(p)} \subseteq \tilde{N}^{(p)}$  eine Nullmenge.

Nach dem Satz von Riesz–Fischer konvergieren damit auch die Integrale: Die Treppenfunktionen

$$\Phi_k \in \mathcal{T}_p \quad , \quad \Phi_k(y) := \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_{k,y} dx$$

konvergieren also punktweise bis auf eine Nullmenge gegen das in (5.7) definierte  $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k(y) = \int_{\mathbb{R}^m} f_y dx = F(y) \quad (y \in \mathbb{R}^p \setminus \tilde{N}^{(p)}).$$

• **Benutzung des Satzes von Riesz–Fischer auf  $\mathbb{R}^p$ :** Die  $\Phi_k$  konvergieren aber auch im  $L^1$ -Sinn, denn nach (5.9) ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^p} |\Phi_{k+1} - \Phi_k| dy &= \int_{\mathbb{R}^p} \left| \int_{\mathbb{R}^m} (\varphi_{k+1}(x, y) - \varphi_k(x, y)) dx \right| dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_{k+1} - \varphi_k| dz = \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_1 \leq 2^{-k}, \end{aligned}$$

die  $\Phi_k$  bilden also eine  $L^1$ -Cauchy-Folge.

Nach dem Satz von Riesz-Fischer ist damit ihr punktwiser Limes  $F$  integrierbar, und

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^p} \left( \int_{\mathbb{R}^m} f_y dx \right) dy &= \int_{\mathbb{R}^p} F dy \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^p} \Phi_k dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^p} \left( \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_k(x, y) dx \right) dy \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k dz = \int_{\mathbb{R}^n} f dz. \end{aligned}$$

Hierbei wurde in der vorletzten Identität nochmals der Satz von Fubini für Treppenfunktionen benutzt, in der letzten die  $L^1$ -Stetigkeit des Lebesgue-Integrals.  $\square$

Praktisch einfach zu überprüfen sind oft die Voraussetzungen des folgenden Satzes (eines Korollars des [Satzes von Tonelli](#)):

### 5.28 Satz

Die Funktionen  $f$  und  $F$  seien fast überall stetig auf  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$  und es gelte:

1.  $|f| \leq F$
2. Es existiert wenigstens eines der Integrale

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left( \int_{\mathbb{R}^m} F(x, y) dx \right) dy \quad , \quad \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{\mathbb{R}^p} F(x, y) dy \right) dx.$$

Dann ist  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$  und  $\int_{\mathbb{R}^p} \left( \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) dy \right) dx$ .

**Beweis:** Siehe KÖNIGSBERGER [\[Ko\]](#).  $\square$

## 5.3 Der Transformationssatz

Oft nimmt eine Funktion in einem Koordinatensystem eine viel einfachere Form an als in einem anderen, und dies will man bei der Integration nutzen. Nun bezieht sich aber das Lebesgue-Integral zunächst auf die kartesischen Koordinaten des  $\mathbb{R}^n$ .

Koordinatenwechsel bewerkstelligt man (zumindest lokal) durch Diffeomorphismen<sup>14</sup>. Der [Transformationssatz](#) sagt uns, wie sich das Integral unter einem solchen Diffeomorphismus transformiert.

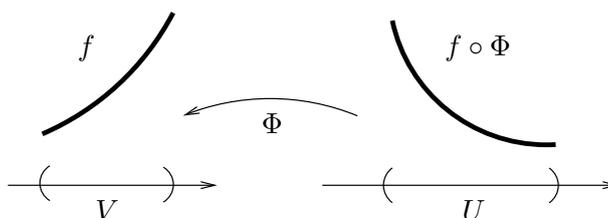
<sup>14</sup>**Definition:** (siehe die [MP-2](#)) Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ .

- $f$  heißt **Diffeomorphismus auf das Bild**  $V := f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ , wenn  $V$  offen,  $f : U \rightarrow V$  bijektiv und  $f^{-1} : V \rightarrow U$  stetig differenzierbar ist.
- $f$  heißt **lokaler Diffeomorphismus**, wenn jeder Punkt  $x \in U$  eine offene Umgebung  $U_x \subseteq U$  besitzt, für die  $f|_{U_x}$  ein Diffeomorphismus auf das Bild  $f(U_x)$  ist.

Schauen wir uns dazu zunächst die vertraute eindimensionale Situation an, d.h. ein offenes Intervall  $V \subset \mathbb{R}$ ,  $f \in L^1(V)$  und einen Diffeomorphismus

$$\Phi : U \rightarrow V.$$

Dann ist  $\Phi$  nach Definition bijektiv und wie auch  $\Phi^{-1}$  stetig differenzierbar, also  $f' \neq 0$  (und damit entweder streng monoton wachsend oder fallend).  $V \subset \mathbb{R}$  ist wieder ein offenes Intervall, und es gilt



$$\int_V f(y) dy = \int_U f \circ \Phi(x) |\Phi'(x)| dx.$$

Für Riemann-integrierte  $f$  entspricht dies der Substitutionsregel. Man beachte, dass sich die Intervallgrenzen durch monoton fallende  $\Phi$  umdrehen; daher die Verwendung des Gewichtsfaktors  $|\Phi'|$  statt  $\Phi'$ .

Der Transformationssatz erweitert nun diese Formel auf beliebige  $L^1$ -Funktionen und Diffeomorphismen in beliebigen Dimensionen. Dazu müssen wir  $|\Phi'|$  geeignet verallgemeinern.

**5.29 Bemerkung** Ist in  $n$  Dimensionen der Diffeomorphismus  $\Phi$  von der Form  $\Phi(x) = (\Phi_1(x_1), \dots, \Phi_n(x_n))^T$ , dann ergibt die Anwendung des Satzes von Fubini als Gewichtsfaktor

$$\left| \prod_{i=1}^n \Phi'_i(x_i) \right| = |\det D\Phi(x)|. \quad \diamond$$

Letzterer Ausdruck stimmt auch allgemein:

**5.30 Satz (Transformationssatz)** Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\Phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$  ein Diffeomorphismus. Dann gilt für  $f : V \rightarrow \mathbb{C}$

$$f \in L^1(V) \iff f \circ \Phi \cdot |\det D\Phi| \in L^1(U)$$

und

$$\int_U f(\Phi(x)) |\det(D\Phi(x))| dx = \int_V f(y) dy.$$

Eine Grundidee des Beweises ist, dass der Betrag der Determinante der Ableitung von  $\Phi$  bei  $x \in U$  der lokale Faktor der Volumenvergrößerung ist. Dazu betrachten

wir zunächst eine *affine Abbildung*  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Für diese existieren eindeutige  $v \in \mathbb{R}^n, L \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$  mit

$$\Phi(x) = Lx + v \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Affine Abbildungen bilden Parallelotope auf Parallelotope ab. Dabei verstehen wir unter einem *Parallelotop* eine durch  $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$  und  $z \in \mathbb{R}^n$  fixierte Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  der Form

$$P(A, z) := \{Ac + z \mid c = (c_1, \dots, c_n)^T, c_i \in [0, 1]\}.$$

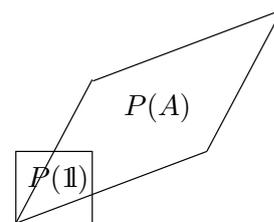
Für die affine Abbildung  $\Phi$  gilt

$$\Phi(P(A, z)) = P(LA, Lz + v). \quad (5.11)$$

Das Parallelotop wird also wieder in ein Parallelotop überführt, welches durch die Bilder  $b_i := La_i$  der Spaltenvektoren  $a_1, \dots, a_n$  von  $A$  aufgespannt wird. Da  $x$ -unabhängig  $D\Phi(x) = L$  ist, ist unter Benutzung von (5.11) und des folgenden Satzes

$$|\det(D\Phi)|$$

der Faktor, um den das Lebesgue-Maß des Parallelotops  $P(A, z)$  durch Anwendung von  $\Phi$  verändert wird.



**5.31 Satz** Für  $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$  und  $z \in \mathbb{R}^n$  ist das Volumen des Parallelotops  $P(A, z)$  gleich

$$\lambda^n(P(A, z)) = |\det A|.$$

**Beweis:** Wir schreiben abkürzend  $P(A) := P(A, 0)$ .

- Als kompakte Mengen sind Parallelotope nach Satz 4.18 messbar.
- Dass  $\lambda^n(P(\mathbb{1})) = 1$  ist (Lebesgue-Maß des Einheitswürfels  $P(\mathbb{1}) = [0, 1]^n$ ), haben wir im letzten Kapitel gezeigt.
- Wegen der Translationsinvarianz von  $\lambda^n$  (Satz 5.15) sind verschobene Parallelotope von unverändertem Volumen.
- Aus dem gleichen Grund ist

$$\lambda^n(P(a_1, \dots, a_{i-1}, -a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)) = \lambda^n(P(a_1, \dots, a_n)).$$

- Für  $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  kann  $P(a_1, \dots, a_{i-1}, ca_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$  aus  $|c|$  verschobenen, bis auf Nullmengen disjunkten Parallelotopen zusammengesetzt werden. Für  $c = 0$  ist das Parallelotop eine  $\lambda^n$ -Nullmenge. Daher hat es für alle  $c \in \mathbb{Z}$  das  $|c|$ -fache Volumen des ursprünglichen Parallelotops.

- Gleiches gilt für  $c \in \mathbb{Q}$ , denn man kann für  $c = p/q$  aus  $q$  solchen Parallelotopen einen vom  $|p|$ -fachen Volumen wie  $P(A)$  zusammensetzen.
- Für beliebige  $c \in \mathbb{R}$  folgt die Formel

$$\lambda^n(P(a_1, \dots, a_{i-1}, ca_i, a_{i+1}, \dots, a_n)) = |c| \lambda^n(P(A))$$

durch rationale Approximation von  $c$  und die Monotonie des Lebesgue-Integrals (Satz 4.21.2) aus dem Fall  $c \in \mathbb{Q}$ .

- Weiter gilt

$$\lambda^n(P(a_1, \dots, a_i + a_j, \dots, a_j, \dots, a_n)) = \lambda^n(P(A)) \quad (i \neq j),$$

wie sich unter Benutzung der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes aus der Zerlegung

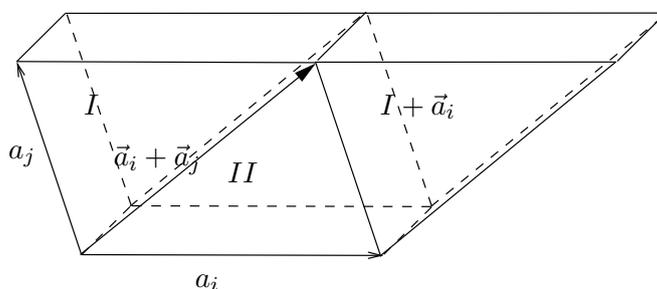


Abbildung 5.2: Volumentreue Scherung eines Parallelotops

des Parallelotops in zwei Polytope und Neuzusammensetzung ergibt, siehe Abb. 5.2.

Da sich jede Matrix  $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$  aus der Einheitsmatrix  $\mathbb{1}$  mit den genannten Spaltenoperationen gewinnen lässt, und wir für das Lebesgue-Maß Transformationsformeln abgeleitet haben, die denen des Betrages der Determinante von  $A$  gleichen, haben wir den Satz bewiesen unter der Voraussetzung verschwindender Translation  $z$ . Das Lebesgue-Maß ist aber translationsinvariant.  $\square$

#### Beweis des Transformationssatzes 5.30:

- Wir nehmen zunächst an, dass  $f \circ \Phi : U \rightarrow \mathbb{C}$  (genauer: die triviale Fortsetzung von  $f$ ) eine Treppenfunktion mit Träger in  $U$  ist. Wegen der Linearität des Integrals genügt es, den Fall  $f \circ \Phi = \mathbb{1}_Q$  für einen Quader  $Q \subset U$  zu betrachten. In diesem Fall reduziert sich die zu beweisende Transformations-Formel

$$\int_U f(\Phi(x)) |\det(D\Phi(x))| dx = \int_V f(y) dy$$

wegen  $\int_U f(\Phi(x)) |\det(D\Phi(x))| dx = \int_U \mathbb{1}_Q(x) |\det(D\Phi(x))| dx$   
 und  $\int_V f(y) dy = \int_V \mathbb{1}_Q \circ \Phi^{-1}(y) dy = \int_V \mathbb{1}_{\Phi(Q)} dy = \lambda^n(\Phi(Q))$  auf

$$\int_Q |\det(D\Phi(x))| dx = \lambda^n(\Phi(Q)) \quad (5.12)$$

- Wegen der Eigenschaft des Diffeomorphismus  $\Phi$ , Nullmengen in Nullmengen abzubilden (Satz 4.31 und 4.32) und wegen  $\lambda^n(\overline{Q}) = \lambda^n(Q)$  nehmen wir auch an, dass  $Q$  kompakt ist, also von der Form  $Q = [z_1, z_1 + \ell_1] \times \dots \times [z_n, z_n + \ell_n]$  oder

$$Q = P(A, z) \quad \text{mit der Matrix } A := \text{diag}(\ell_1, \dots, \ell_n).$$

$D\Phi|_Q$  ist zwar im Allgemeinen nicht konstant, aber wegen der Kompaktheit von  $Q$  und Stetigkeit von  $D\Phi$  gleichmäßig stetig<sup>15</sup>. Betrachten wir daher die Zerlegungen von  $Q$  in die  $2^{nk}$  bis auf Seiten, d.h. Mengen vom Maß 0 disjunkten Teilquader

$$Q_{k,m} := P(2^{-k}A, z + 2^{-k}m) \quad (m = (m_1, \dots, m_n)^T, m_i/\ell_i \in \{0, \dots, 2^k - 1\})$$

mit Ecke  $z_{k,m} := z + 2^{-k}m$ . Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  mit

$$|\partial_i \Phi_j(x) - \partial_i \Phi_j(y)| < \varepsilon \quad (i, j = 1, \dots, n, x, y \in Q_{k,m})$$

für alle Teilwürfel  $Q_{k,m} \subset Q$ , oder

$$\Phi(x) = \Phi(z_{k,m}) + D\Phi(z_{k,m})(x - z_{k,m}) + \mathcal{O}(2^{-k}\varepsilon) \quad (x \in Q_{k,m}). \quad (5.13)$$

Damit weicht das Bild  $\Phi(Q_{k,m})$  nur wenig von einem Parallelotop ab. Wir benutzen zum Vergleich die um  $P(A, z) = P^0(A, z)$  zentrierten Parallelotope

$$P^\delta(A, z) := \{Ac + z \mid c = (c_1, \dots, c_n)^T, c_i \in [-\delta, 1 + \delta]\}$$

mit Volumen  $\lambda^n(P^\delta(A, z)) = (1 + 2\delta)^n \lambda^n(P(A, z))$  ( $\delta > -\frac{1}{2}$ ). Wegen (5.13) und der Regularität von  $D\Phi$  auf dem kompakten Quader  $Q$  finden wir für jedes  $\delta > 0$  ein  $k$  mit

$$P^{-\delta}(D\Phi(z_{k,m})(2^{-k}A), z_{k,m}) \subseteq \Phi(Q_{k,m}) \subseteq P^\delta(D\Phi(z_{k,m})(2^{-k}A), z_{k,m})$$

Damit ist nach Satz 5.31

$$\lambda^n(\Phi(Q)) = \sum_m \lambda^n(\Phi(Q_{k,m})) \leq (1 + 2\delta)^n \sum_m \lambda^n(Q_{k,m}) |\det(D\Phi(z_{k,m}))|$$

(man bedenke, dass nach Satz 4.32 gilt  $\lambda^n(\Phi(Q_{k,m}) \cap \Phi(Q_{k,m'})) = 0$  für  $m \neq m'$ , denn  $\Phi$  ist ein Diffeomorphismus). Analog ist

$$\lambda^n(\Phi(Q)) \geq (1 - 2\delta)^n \sum_m \lambda^n(Q_{k,m}) |\det(D\Phi(z_{k,m}))|.$$

Die Riemann-Summe auf dem Quader  $Q$  konvergiert gegen das Integral:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_m \lambda^n(Q_{k,m}) |\det(D\Phi(z_{k,m}))| = \int_Q |\det(D\Phi(z))| dz.$$

Insgesamt erhalten wir  $\lambda^n(\Phi(Q)) = \int_Q |\det(D\Phi(z))| dz$ , also (5.12).

- Die Aussage für beliebige integrierbare  $f$  erhält man durch Approximation von  $f \circ \Phi$  durch Treppenfunktionen.  $\square$

<sup>15</sup>**Definition:** (Siehe *Analysis I*, Kapitel 9.3) Eine Abbildung  $f : M \rightarrow N$  zwischen den metrischen Räumen  $(M, d_M)$  und  $(N, d_N)$  heißt **gleichmäßig stetig**, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt mit  $d_N(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$  für alle  $x, y \in M$  mit  $d_M(x, y) \leq \delta$ .

### 5.32 Beispiel (Transformationsatz)

Bei Verwendung von Polarkoordinaten  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$  und der Substitution  $u := r^2$  ist  $D\Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$ , also  $\det(D\Phi(r, \varphi)) = r$  und

$$\begin{aligned} \left[ \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) dx \right]^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2) \exp(-y^2) dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-(x^2 + y^2)) dx dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \exp(-r^2) r d\phi dr = \pi \int_0^\infty \exp(-r^2) 2r dr = \pi \int_0^\infty \exp(-u) du = \pi. \end{aligned}$$

Also ist  $\Gamma(1/2) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt = 2 \int_0^\infty \exp(-x^2) dx = \int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$ , siehe Beispiel 5.19.  $\diamond$

## 5.4 Anwendung: Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^n$

Wir benutzen nun den Transformationsatz 5.30, um mithilfe der Polarkoordinaten das Volumen einer  $n$ -dimensionalen Kugel zu berechnen. Unter *Polarkoordinaten* auf dem  $\mathbb{R}^n$  verstehen wir für  $n \geq 2$  den Diffeomorphismus

$$\Phi_n = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} : U \rightarrow V$$

mit den offenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} U &:= (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)^{n-2}, \\ V &:= \mathbb{R}^n \setminus N \quad , \quad N := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0, x_2 \geq 0\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \varphi_1(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) &= r \cdot \prod_{l=1}^{n-1} \sin \theta_l \\ \varphi_2(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) &= r \cos \theta_1 \prod_{l=2}^{n-1} \sin \theta_l \\ \varphi_3(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) &= r \cos \theta_2 \prod_{l=3}^{n-1} \sin \theta_l \\ &\vdots \\ \varphi_n(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) &= r \cos \theta_{n-1} \end{aligned}$$

(wobei das Produkt über die leere Menge 1 ist).

Für  $n = 2$  ergibt sich ähnlich wie in Beispiel 5.32

$$\varphi_1(r, \theta) = r \sin \theta \quad , \quad \varphi_2(r, \theta) = r \cos \theta,$$

also  $D\Phi_2(r, \theta) = \begin{pmatrix} \sin \theta & r \cos \theta \\ \cos \theta & -r \sin \theta \end{pmatrix}$ , woraus sich  $|\det D\Phi_2(r, \theta)| = r$  ergibt.

Es sei nun  $A := D\Phi_{n-1}(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}) \in \text{Mat}(n-1, \mathbb{R})$ . Diese Matrix verwenden wir zur Berechnung von  $D\Phi_n$ .

Es ist nämlich wegen

$$(\Phi_n)_k = \begin{cases} \sin \theta_{n-1} (\Phi_{n-1})_k & , k \in \{1, \dots, n-1\} \\ r \cos \theta_{n-1} & , k = n \end{cases}$$

$$D\Phi_n = \left( \begin{array}{c|c} \sin \theta_{n-1} \cdot A & \begin{matrix} r A_{1,1} \cos \theta_{n-1} \\ \vdots \\ r A_{n-1,1} \cos \theta_{n-1} \end{matrix} \\ \hline \cos \theta_{n-1} \ 0 \ \dots \ 0 & -r \sin \theta_{n-1} \end{array} \right),$$

sodass aus einer Entwicklung nach der letzten Zeile

$$\begin{aligned} |\det D\Phi_n| &= |\det D\Phi_{n-1}| \cdot (\sin \theta_{n-1})^{n-1} \cdot \left| r \sin \theta_{n-1} + r \frac{\cos^2 \theta_{n-1}}{\sin \theta_{n-1}} \right| \\ &= |\det D\Phi_{n-1}| r (\sin \theta_{n-1})^{n-2} \end{aligned}$$

folgt. Es ergibt sich also durch Induktion die Formel

$$|\det D\Phi_n| = r^{n-1} \left| \prod_{l=2}^n (\sin \theta_{l-1})^{l-2} \right|.$$

Man beachte, dass das Komplement  $N$  des Bildes von  $\Phi_n$  eine Nullmenge ist, es also für Volumenberechnungen keine Rolle spielt.

Wir benutzen nun die Transformationsformel zur Berechnung des Volumens einer  $n$ -dimensionalen Vollkugel  $B^n \subset \mathbb{R}^n$ . Wegen  $\int_0^1 r^{n-1} dr = \frac{1}{n}$  ist

$$\lambda^n(B_n) = \frac{I_n}{n} \quad \text{mit} \quad I_n := 2 \prod_{l=2}^n \int_0^\pi (\sin \theta)^{l-2} d\theta$$

(und dieser Ausdruck stimmt auch für  $n = 1$ ). Nun besteht unsere erste Aufgabe in der Berechnung der Integrale

$$J_m := \int_0^\pi (\sin \theta)^m d\theta.$$

Die Rekursion beginnt bei  $J_0 = \pi$  bzw.  $J_1 = 2$ . Für  $m \geq 2$  ist mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (\sin \theta)^m d\theta &= (\sin \theta)^{m-1}(-\cos \theta)|_0^\pi + (m-1) \int_0^\pi (\sin \theta)^{m-2} \cos^2 \theta d\theta \\ &= (m-1) \int_0^\pi (\sin \theta)^{m-2} (1 - \sin^2 \theta) d\theta, \end{aligned}$$

also

$$m \int_0^\pi (\sin \theta)^m d\theta = (m-1) \int_0^\pi (\sin \theta)^{m-2} d\theta$$

oder

$$J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2}.$$

Daraus ergibt sich unter Benutzung der *Doppelfakultät*  $n!! := \prod_{l=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (n-2l)$

$$J_{2m} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \pi \quad \text{und} \quad J_{2m+1} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} 2.$$

Damit ist  $I_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ , denn  $J_{n-1}J_n = \frac{\pi}{n/2}$  und  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .

$$\boxed{\lambda^n(B_n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}}$$

Gleichzeitig legt die Rechnung nahe, dass das  $(n-1)$ -dimensionale Volumen der Kugeloberfläche  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  gleich  $I_n$  ist.

## 5.5 $L^p$ -Räume

**5.33 Definition** Für  $p \in [1, \infty)$  ist  $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$  der Raum der Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , die über jede kompakte Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  integrierbar sind, und für die

$$\|f\|_p := \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx \right)^{1/p} < \infty. \quad (5.14)$$

Analog zum Fall  $p = 1$  setzt man  $\mathcal{N} := \{f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_p = 0\}$  und bildet die Äquivalenzklassen bezüglich dieses Unterraums, setzt also

$$L^p(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) / \mathcal{N}.$$

Da  $\|\cdot\|_p$  für alle Repräsentanten einer Äquivalenzklasse den gleichen Wert besitzt, und  $\|\cdot\|_p$  eine Halbnorm ist, wird

$$\|[f]\|_p := \|f\|_p \quad \text{auf} \quad L^p(\mathbb{R}^n)$$

zur Norm, wie im Fall  $p = 1$ .

Dass es sich um einen normierten Vektorraum handelt, muss man nachrechnen. Da die Gültigkeit der Dreiecksungleichung für die  $p$ -Normen nicht offensichtlich (und für  $0 < p < 1$  sogar falsch!) ist, heißt sie hier *Minkowski-Ungleichung*. Der folgende Satz fasst wesentliche Eigenschaften der  $L^p$ -Räume zusammen:

**5.34 Satz 1.**  $\|f_1 + f_2\|_p \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p \quad (f_1, f_2 \in L^p(\mathbb{R}^n))$   
(Minkowski-Ungleichung)

2.  $L^p(\mathbb{R}^n)$  ist ein Banach-Raum (Satz von Riesz-Fischer)

3. für  $p, q, r \geq 1$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$  folgt aus  $f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^q(\mathbb{R}^n)$   
 $f \cdot g \in L^r(\mathbb{R}^n)$  und  $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$  (Hölder-Ungleichung).

**Beweis:** • Der Satz von Riesz-Fischer wird analog zum Fall  $p = 1$  (Satz 5.5) bewiesen.

• Einen Beweis der Hölder-Ungleichung findet man z.B. in [LL].

• Wir zeigen, wie aus ihr die Minkowski-Ungleichung folgt.

Wir können dabei annehmen, dass  $f_1, f_2 \geq 0$  und  $p \in (1, \infty)$  gilt, denn der Fall  $p = 1$  ist schon bekannt. Falls  $\|f_1 + f_2\|_p = 0$  ist, ist nichts mehr zu beweisen. Sonst ist nach der Hölder-Ungleichung mit  $r = 1$ , also  $q = p/(p-1)$

$$\|f_1 + f_2\|_p^p = \sum_{i=1}^2 \int_{\mathbb{R}^n} f_i (f_1 + f_2)^{p-1} dx \leq \sum_{i=1}^2 \left( \int_{\mathbb{R}^n} f_i^p d\mu \right)^{1/p} \cdot \left( \int_{\mathbb{R}^n} (f_1 + f_2)^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}},$$

also nach Division durch den zweiten Faktor der rechten Seite

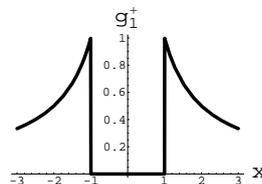
$$\|f_1 + f_2\|_p^{p+(1-p)} \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p. \quad \square$$

Je größer  $p$  ist, umso langsamer darf eine Funktion in  $L^p(\mathbb{R}^n)$  bei  $\infty$  gegen Null gehen, und umso weniger ausgeprägt dürfen andererseits lokale Singularitäten sein.

### 5.35 Beispiele ( $L^p$ -Funktionen)

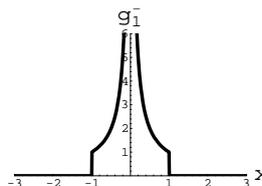
1. Es sei  $g_\lambda^\pm : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$g_\lambda^+(x) := \begin{cases} 0 & , \quad \|x\| < 1 \\ \|x\|^{-\lambda} & , \quad \|x\| \geq 1 \end{cases}$$



und

$$g_\lambda^-(x) := \begin{cases} \|x\|^{-\lambda} & , \quad \|x\| \leq 1 \\ 0 & , \quad \|x\| > 1 \end{cases}$$



definiert (mit euklidischer Norm  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ ). Dann gilt

$$g_\lambda^+ \in L^p(\mathbb{R}^n) \iff \lambda > \frac{n}{p} \quad \text{und} \quad g_\lambda^- \in L^p(\mathbb{R}^n) \iff \lambda < \frac{n}{p},$$

denn (mit der  $p$ -Norm (5.14) der Funktion)

$$\|g_\lambda^+\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} (g_\lambda^+(x))^p dx = I_n \int_1^\infty r^{-p\lambda} r^{n-1} dr$$

mit  $I_n := \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$  wie in Kapitel 5.4 (als Flächeninhalt der  $(n-1)$ -dimensionalen Sphäre interpretiert), also

$$\|g_\lambda^+\|_p^p = I_n \int_1^\infty r^{n-p\lambda-1} dr, \quad \text{und analog} \quad \|g_\lambda^-\|_p^p = I_n \int_0^1 r^{n-p\lambda-1} dr.$$

2. Ein Beispiel für die Nützlichkeit von  $L^p$ -Räumen in der Physik ist die Frage nach der Selbstadjungiertheit von Schrödinger-Operatoren  $H$  auf dem im nächsten Kapitel ausführlicher behandelten Hilbert-Raum  $L^2(\mathbb{R}^n)$  der quantenmechanischen Zustände (siehe auch MP-2, Beispiel 2.62, und Kapitel 9).

Ein einzelnes Teilchen bewegt sich im Konfigurationsraum  $\mathbb{R}^3$ , also ist  $n = 3$ . Es steht unter dem Einfluß des elektrostatischen Potentials  $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . In Einheiten, in denen seine Masse Eins ist und auch das Plancksche Wirkungsquantum  $\hbar = 1$  ist, ist der Schrödinger-Operator auf  $L^2(\mathbb{R}^3)$  von der Form

$$H = -\frac{1}{2}\Delta + V.$$

Dabei wird  $V$  als Multiplikationsoperator aufgefasst.

Bei einem Elektron im Potential eines  $m$ -atomigen Moleküls könnte

$$V(q) = -\sum_{k=1}^m \frac{1}{\|q - s_k\|} + W(q) \tag{5.15}$$

sein, wobei  $s_k \in \mathbb{R}^3$  die Kernorte sind, und  $W$  der stetige beschränkte Potentialbeitrag der gebundenen Elektronen.

$V$  ist dann unbeschränkt, und eine in der Frühgeschichte der Quantenmechanik auftauchende Frage war, ob nicht (unter Abstrahlung von Photonen) das Elektron in einen Kern fallen kann. Das würde bedeuten, dass die Wahrscheinlichkeit  $\|\psi_t\|_2$ , dass sich das zur Zeit  $t$  durch die Wellenfunktion  $\psi_t \in L^2(\mathbb{R}^2)$  beschriebene Teilchen im Raum  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  befindet, unter Eins fällt.

Allgemein wird die Schrödinger-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\psi_t = -iH\psi_t \quad (\text{mit } \psi_t \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ für } t \in \mathbb{R})$$

formal durch  $\psi_t = U(t)\psi_0$  für die Operatoren

$$U(t) := \exp(-iHt) \quad \text{auf } L^2(\mathbb{R}^n)$$

gelöst. Ist  $U(t)$  unitär, dann bedeutet das

$$\|\psi_t\|_2^2 = \langle \psi_t, \psi_t \rangle = \langle U(t)\psi_0, U(t)\psi_0 \rangle = \langle \psi_0, \psi_0 \rangle = 1,$$

falls  $U(t)$  unitär ist. Das stimmt wiederum genau dann, wenn  $H$  selbstadjungiert ist. Nun lässt sich aber zeigen, dass obiges  $H$  tatsächlich selbstadjungiert ist, wenn man das Potential in der Form  $V = V_1 + V_2$  mit beschränktem  $V_2$  und  $V_1 \in L^2(\mathbb{R}^3)$  zerlegen kann (REED und SIMON [RS, Satz X.15]). Dies ist für (5.15) der Fall, das Elektron fällt also nicht in einen Atomkern.  $\diamond$

## 5.6 Der Hilbert-Raum $L^2(\mathbb{R}^n)$

Von den Banach-Räumen  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $p \geq 1$  ist der Raum  $L^2(\mathbb{R}^n)$  der wichtigste. Dieser Raum der quadratintegriblen Funktionen besitzt nämlich ein inneres Produkt:

**5.36 Definition**  $\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\bar{g}(x) dx \quad (f, g \in L^2(\mathbb{R}^n))$

**5.37 Bemerkung** Dies ist die Mathematiker-Konvention. Physiker benutzen

$$\int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}(x)g(x) dx. \quad \diamond$$

Das innere Produkt lässt sich durch die 2-Norm ausdrücken. In Physiker-Konvention liest sich das so:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4} [(\|f + g\|_2^2 - \|f - g\|_2^2) - i(\|f + ig\|_2^2 - \|f - ig\|_2^2)]$$

(*Polarisationsidentität*). Damit existiert insbesondere das innere Produkt.

Dass diese Identität gilt, sieht man, wenn man den Zusammenhang

$$\|h\|_2^2 = \langle h, h \rangle \quad (h \in L^2(\mathbb{R}^n))$$

benutzt, um die rechte Seite umzuformen.

Mit diesem inneren Produkt wird nach dem Satz von Riesz-Fischer der Raum  $L^2(\mathbb{R}^n)$  zum  $\mathbb{C}$ -Hilbert-Raum, also einem unitären Vektorraum, der mit der vom inneren Produkt abgeleiteten Norm ein Banach-Raum ist.

Wir erinnern uns an dieser Stelle an die Lineare Algebra. Für  $p = q = 2$  wird die Hölder-Ungleichung (Satz 5.34.3) zur *Cauchy-Schwarz-Ungleichung*

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \quad (f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)). \quad (5.16)$$

Da  $|\langle f, g \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f \bar{g} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f \bar{g}| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f g| dx = \|f \cdot g\|_1$  ist, folgt

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \quad (f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)).$$

Insbesondere ist das innere Produkt stetig. Außerdem können wir den Minimalwinkel  $\varphi \in [0, \pi/2]$  zwischen den von zwei Vektoren  $f, g$  positiver Länge aufgespannten Unterräumen durch

$$\cos \varphi = \frac{|\langle f, g \rangle|}{\|f\|_2 \|g\|_2}$$

definieren. Ist  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , dann heißen die Vektoren  $f$  und  $g$  zueinander *senkrecht* oder *orthogonal*.

Oft ist es für konkrete Rechnungen nützlich, eine sogenannte Orthonormalbasis zu benutzen. Dabei wird der Basisbegriff gegenüber der Linearen Algebra geändert.

**Zur Erinnerung:** Eine Teilmenge  $B$  eines  $\mathbb{K}$ -Vektorraumes  $V \neq \{0\}$  heißt (Hamel-) *Basis* von  $V$ , wenn für alle Vektoren  $v \in V$  eindeutige, nur für endlich viele  $b \in B$  von Null verschiedene Koeffizienten  $c_b \in \mathbb{K}$  existieren mit

$$v = \sum_{b \in B} c_b b. \quad (5.17)$$

In der Linearen Algebra zeigt man (Mithilfe des **Zornschen Lemmas**) für jeden solchen Vektorraum  $V$  die *Existenz* einer Hamel-Basis  $B \subset V$ .

Außer im Fall endlich-dimensionaler Vektorräume ist dieser Basisbegriff für analytische Zwecke ungeeignet, da er nur endliche Linearkombinationen zulässt. In Hilbert-Räumen arbeitet man stattdessen mit Orthonormalbasen.

In Verallgemeinerung der Definition 2.32 der **MP-2** definieren wir auch in unendliche-dimensionalen Räumen:

**5.38 Definition •** Eine Teilmenge  $E$  eines Hilbert-Raumes heißt **Orthonormalsystem**, wenn für  $e, e' \in E$  gilt

$$\langle e, e' \rangle = \begin{cases} 1 & , \quad e = e' \\ 0 & , \quad e \neq e'. \end{cases}$$

- Sie heißt **Orthonormalbasis (ONB)**, wenn sie in keinem echt größeren Orthonormalsystem enthalten ist.

### 5.39 Bemerkungen

1. Jeder Hilbert-Raum besitzt eine Orthonormalbasis (das folgt aus einer Anwendung des Zornschen Lemmas der Mengentheorie).

2. In endlich-dimensionalen unitären Vektorräumen sind die Eigenvektoren normaler Endomorphismen<sup>16</sup> zueinander orthogonal, soweit sie zu verschiedenen Eigenwerten gehören. Außerdem stimmen algebraische und geometrische Multiplizität von Eigenwerten überein. Man kann damit eine Basis, und durch Normierung eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren bilden.

Ähnliches gilt auch für viele selbstadjungierte Operatoren auf dem  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

3. Die (Hilbert-)Dimension  $\dim(\mathcal{H})$  ist die (invariante!) Kardinalität einer Orthonormalbasis  $E$ . Wir werden nur diesen Dimensionsbegriff verwenden<sup>17</sup>.  $\diamond$

**5.40 Satz** *Es sei  $E$  eine Orthonormalbasis des Hilbert-Raumes  $\mathcal{H}$ . Dann gilt*

1. Für jede endliche Teilmenge  $E' \subseteq E$  ist

$$\sum_{e \in E'} |\langle x, e \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad (x \in \mathcal{H})$$

(Bessel-Ungleichung), und es gilt der Satz von Pythagoras:

$$\|x\|^2 = \sum_{e \in E'} |\langle x, e \rangle|^2 + \left\| x - \sum_{e \in E'} \langle x, e \rangle e \right\|^2.$$

2. Für alle  $x \in \mathcal{H}$  gilt<sup>18</sup>

$$x = \sum_{e \in E} \langle x, e \rangle e \quad \text{und} \quad \|x\|^2 = \sum_{e \in E} |\langle x, e \rangle|^2.$$

**Beweis:**

1. Der Satz von Pythagoras folgt aus der Zerlegung  $x = x' + x''$  mit  $x' := \sum_{e \in E'} \langle x, e \rangle e$ .  $x'$  und  $x''$  sind orthogonal:

$$\begin{aligned} \langle x', x'' \rangle &= \sum_{e \in E'} \langle x, e \rangle \left\langle e, x - \sum_{f \in E'} \langle x, f \rangle f \right\rangle = \sum_{e \in E'} \langle x, e \rangle \langle e, x - \langle x, e \rangle e \rangle \\ &= \sum_{e \in E'} \langle x, e \rangle (\langle e, x \rangle - \overline{\langle x, e \rangle} \langle e, e \rangle) = \sum_{e \in E'} \langle x, e \rangle (\langle e, x \rangle - \langle e, x \rangle) = 0. \end{aligned}$$

Es folgt  $\|x\|^2 = \|x' + x''\|^2 = \langle x', x' \rangle + \langle x', x'' \rangle + \langle x'', x' \rangle + \langle x'', x'' \rangle = \langle x', x' \rangle + \langle x'', x'' \rangle = \|x'\|^2 + \|x''\|^2$ , also auch die Bessel-Ungleichung  $\|x'\|^2 \leq \|x\|^2$ .

<sup>16</sup>**Definition:**

Ein Endomorphismus  $\varphi : V \rightarrow V$  eines Hilbert-Raumes  $V$  heißt *normal*, wenn  $\varphi^* \varphi = \varphi \varphi^*$  gilt.

**Beispiel:** Selbstadjungierte, antiselbstadjungierte und unitäre Operatoren sind normal.

<sup>17</sup>Die Mächtigkeit der Hamel-Basen ist i.A. verschieden von  $\dim(\mathcal{H})$  und im Fall eines Hilbert-Raumes  $\mathcal{H}$  mit  $\dim(\mathcal{H}) = \infty$  immer überabzählbar.

<sup>18</sup>selbst wenn  $E$  überabzählbar ist; in diesem Fall sind nur abzählbar viele Terme ungleich Null, und es kommt nicht auf deren Nummerierung an.

2. Für endlich-dimensionale unitäre Vektorräume ist die Behauptung aus der *Linearen Algebra* bekannt. Es sei also  $E = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

Die Folge  $n \mapsto \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2$  ist monoton wachsend und wegen der Bessel-Ungleichung durch  $\|x\|^2$  beschränkt, besitzt also einen endlichen Limes. Setzen wir  $x_n := \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$ , dann ist für  $n > m$  wegen der Orthonormalität der Basisvektoren

$$\|x_n - x_m\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2.$$

Die  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sind also eine Cauchy-Folge. Diese konvergiert im Hilbert-Raum gegen ein  $x' \in \mathcal{H}$ . Der Differenzvektor  $y := x - x'$  steht senkrecht auf allen Basisvektoren  $e_k \in E$ :

$$\begin{aligned} \langle y, e_k \rangle &= \langle x, e_k \rangle - \left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, e_k \right\rangle = \langle x, e_k \rangle - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, e_k \rangle \\ &= \langle x, e_k \rangle - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^n \langle x, e_\ell \rangle \langle e_\ell, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_k \rangle = 0. \end{aligned}$$

Wäre  $\|y\| > 0$ , dann würde auch der normierte Vektor  $y/\|y\|$  senkrecht auf allen  $e_k$  stehen,  $E$  wäre also keine Basis.  $\square$

Aus der *Linearen Algebra* ist bekannt, dass jeder  $n$ -dimensionale unitäre Vektorraum  $\mathcal{H}$  isomorph zum unitären Vektorraum  $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  mit kanonischem inneren Produkt  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$  ist. Ähnliches gilt für abzählbare Orthonormalbasen.

**5.41 Satz** *Es sei  $\mathcal{H}$  ein  $\mathbb{C}$ -Hilbert-Raum mit abzählbar unendlicher Orthonormalbasis  $E = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Dann ist*

$$\Pi : \mathcal{H} \rightarrow \ell^2 \quad , \quad (\Pi(x))_k := \langle x, e_k \rangle$$

*eine unitäre Abbildung auf<sup>19</sup> den (aus der MP-2 bekannten) Hilbertschen Folgenraum*

$$\ell^2 = \left\{ f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{n \in \mathbb{N}} |f(n)|^2 < \infty \right\} \text{ mit Skalarprodukt } \langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \overline{g(n)}.$$

**Beweis:** Es ist nach Satz 5.40

$$\|\Pi(x)\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|_2^2,$$

$\Pi$  ist also eine Isometrie. Umgekehrt gilt

$$\Pi^{-1}(f) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k) e_k \quad (f \in \ell^2),$$

<sup>19</sup>**Definition:**

Eine lineare Abbildung  $U : V \rightarrow W$  der unitären Vektorräume  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$  und  $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$  heißt *unitär*, wenn gilt  $\langle U(v_1), U(v_2) \rangle_W = \langle v_1, v_2 \rangle_V$  ( $v_i \in V$ ), und  $U$  surjektiv ist.

denn für  $x_n := \sum_{k=1}^n f(k)e_k$  und  $n > m$  ist

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|_2^2 &= \left\| \sum_{k=m+1}^n f(k)e_k \right\|_2^2 = \left\langle \sum_{k=m+1}^n f(k)e_k, \sum_{\ell=m+1}^n f(\ell)e_\ell \right\rangle \\ &= \sum_{k=m+1}^n \langle f(k)e_k, f(k)e_k \rangle = \sum_{k=m+1}^n |f(k)|^2 \leq \|f\|_2^2, \end{aligned}$$

die  $x_n$  bilden also eine gegen  $x := \sum_{k=1}^\infty f(k)e_k \in \mathcal{H}$  konvergierende Cauchy-Folge.  $\square$

**5.42 Satz** *Es sei  $E := \{e_{n,k} \mid n, k \in \mathbb{Z}\}$  mit*

$$e_{n,k}(x) := 2^{-n/2} e(2^{-n}x - k) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

und

$$e(x) := \begin{cases} 1 & , \quad x \in [0, 1/2) \\ -1 & , \quad x \in [1/2, 1) \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1) \end{cases} . \quad (5.18)$$

Dann ist  $E$  eine Orthonormalbasis von  $L^2(\mathbb{R})$ , genannt die **Haar-Basis**.

**Beweis:** •  *$E$  ist ein Orthonormalsystem:*

Es ist  $\|e\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |e(x)|^2 dx = \int_0^1 1 dx = 1$ , und  $\|e_{n,k}\|_2^2 = 2^{-n} \int_{\mathbb{R}} |e(2^{-n}x - k)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |e(y)|^2 dy = 1$ . Für  $k \neq k'$  sind die Träger von  $e_{n,k}$  und  $e_{n,k'}$  (bis auf Randpunkte) disjunkt, die beiden Vektoren also senkrecht:

$$\text{supp}(e_{n,k}) = [2^n k, 2^n(k+1)].$$

Für  $\ell < n$  ist  $e_{\ell,k'}$  (bis auf Randpunkte) auf  $\text{supp}(e_{n,k})$  konstant, also ebenfalls

$$\langle e_{\ell,k'}, e_{n,k} \rangle = 0.$$

•  *$E$  ist eine Orthonormalbasis:*

Es genügt zu zeigen, dass jede  $L^2$ -Funktion  $f$  durch Linearkombination der  $e_{n,k}$  beliebig genau approximiert werden kann. Dabei kann man sich auf Treppenfunktionen  $f \in \mathcal{T}_1$  beschränken. Siehe BLATTER [B12, Kapitel 1.6].  $\square$

Insbesondere ist also  $L^2(\mathbb{R})$  (und analog  $L^2(\mathbb{R}^n)$ ) isomorph zum Hilbertschen Folgenraum  $\ell^2$ . Wavelets wie das in (5.18) definierte sog. *Haar-Wavelet* werden in der Signalverarbeitung eingesetzt, siehe [B12].

**5.43 Bemerkung** In der Quantenmechanik macht man sich Satz 5.41 und Satz 5.42 zunutze, indem man statt mit sog. *Wellenfunktionen*  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  mit deren Koeffizienten  $\langle e_n, \psi \rangle \in \mathbb{C}$  für eine ONB  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von  $L^2(\mathbb{R}^n)$  rechnet.

Dies schafft den Übergang zwischen Schrödingers *Wellenmechanik* und Heisenbergs, Borns und Jordans *Matrizenmechanik*.  $\diamond$

## 6 Vektoranalysis II

### 6.1 Integration von Differentialformen

**Vorbetrachtung:** In der *Analysis I* wurden für geeignete Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Integralbegriffe eingeführt:

- das *Riemannsche Integral*  $\int_a^b f(x) dx$ , interpretiert als (signierte) Fläche unter dem Graphen von  $f$  auf dem Intervall  $[a, b]$
- das *unbestimmte Integral*  $\int f(x) dx$ , d.h. die Menge aller Stammfunktionen  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F' = f$ . Die Stammfunktionen von  $f$  unterscheiden sich nur durch eine reelle Konstante voneinander.

Der *Hauptsatz der Infinitesimalrechnung* verknüpfte die beiden Integralbegriffe folgendermaßen: Für eine beliebige Stammfunktion  $F$  von  $f$  gilt

$$\int_a^b f dx = F(b) - F(a).$$

Wir beachten, dass

1. auf der rechten Seite der *Rand*  $\{a, b\} = \partial I$  des Intervalls  $I := [a, b]$  auftaucht, über das auf der linken Seite integriert wird und
2. dass der Integrand  $f dx$ , als 1-Form aufgefasst, gleich der *äußeren Ableitung*  $dF$  der Stammfunktion  $F$  ist.

Bei der Integration von geeigneten Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  haben wir den Riemannschen Integralbegriff erweitert, indem wir für geeignete Gebiete  $M \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\int_M f dx = \int_{\mathbb{R}^n} f \mathbb{1}_M dx$$

als (signiertes) Volumen unter dem Graphen von  $f$ , restringiert auf  $M$ , interpretiert haben.

Unbeachtet blieb dabei die Frage, ob auch für  $n > 1$  Dimensionen ein Zusammenhang zwischen Integration und Differentiation existiert.

Nun ist die Ableitung einer Funktion  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  die 1-Form  $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ . Nur für  $n = 1$  konnten wir dieser Ableitung wieder eine Funktion (nämlich  $f' = \frac{\partial f}{\partial x}$ ) zuordnen.

Tatsächlich liefert uns, wie wir sehen werden, die Integration von *Differentialformen*  $k$ -ter Stufe über  $k$ -dimensionale Flächen die adäquate Verallgemeinerung des Hauptsatzes, den Satz von Stokes. Wir integrieren zunächst  $n$ -Formen auf dem  $\mathbb{R}^n$ , und danach  $k$ -Formen auf  $k$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$ .

**6.1 Definition** Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, und  $\omega \in \Omega^n(U)$  habe kompakten Träger (d.h. für  $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  ist  $f(x) = 0$  außerhalb eines Kompaktums  $K \subset U$ ). Das **Integral** von  $\omega$  ist dann

$$\int_U \omega := \int_U f(x) dx_1 \dots dx_n.$$

**6.2 Satz** Es seien  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\varphi : V \rightarrow U$  ein Diffeomorphismus mit konstantem Vorzeichen  $\varepsilon$  von  $\det(D\varphi(x))$ . Dann gilt

$$\int_V \varphi^* \omega = \varepsilon \int_U \omega.$$

**Beweis:** Nach Definition des pull-back ist unter Benutzung der symmetrischen Gruppe  $S_n$

$$\begin{aligned} \varphi^* \omega &= f \circ \varphi d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n = f \circ \varphi \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{i_n}} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} \\ &= f \circ \varphi \sum_{\pi \in S_n} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\pi(1)}} \dots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{\pi(n)}} dx_{\pi(1)} \wedge \dots \wedge dx_{\pi(n)} \\ &= f \circ \varphi \left( \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\pi(1)}} \dots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{\pi(n)}} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= f \circ \varphi \det(D\varphi) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Nach dem Transformationssatz (Satz 5.30) ergibt die Integration dieser  $n$ -Form auf  $V$   $\int_V f \circ \varphi \det(D\varphi) dx_1 \dots dx_n = \varepsilon \int_V f \circ \varphi |\det D\varphi| dx = \varepsilon \int_U f dx = \varepsilon \int_U \omega$ .  $\square$

Wir sehen insbesondere, dass das Integral über die  $n$ -Form  $\omega$  nicht von der Wahl des (orientierten) Koordinatensystems abhängt.

Betrachten wir  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  als die *Standardvolumenform* auf dem  $\mathbb{R}^n$ , dann können wir  $\int_U \omega$  auch als Integral der Funktion  $f$  über  $U$  auffassen.

Wenn wir als nächstes Funktionen über  $k$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  (also  $k \leq n$ ) integrieren wollen, müssen wir uns zunächst über die Standardvolumenform von  $V$  klar werden.

Wir benutzen dabei eine Parametrisierung von  $V$ : Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  offen

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

eine injektive glatte Abbildung mit Bild  $\varphi(U) = V \subseteq \mathbb{R}^n$ . Es gelte

$$\text{rang}(D\varphi(x)) = k \quad (x \in U),$$

der Rang sei also maximal.  $\varphi$  parametrisiert damit die  $k$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $V$ . Gesucht ist nun eine Form  $\omega^{(\varphi)} \in \Omega^k(U)$ , für die für jedes in  $V$  offene  $V' \subseteq V$

$$\int_{\varphi^{-1}(V')} \omega^{(\varphi)}$$

das Volumen von  $V'$  ist.

Drei vernünftige Forderungen an die  $\varphi$ -abhängige Definition von  $\omega^{(\varphi)}$  sind, dass

- das Quadrat  $V' := (0, 1)^k \times \{0\}^{n-k} \subset \mathbb{R}^n$  den Flächeninhalt 1 besitzt.
- sich unter einer Drehung  $O \in SO(n)$  der Flächeninhalt von  $V'$  nicht ändert, und ebenso wenig unter Translationen.
- der Flächeninhalt von  $V$  sich nicht ändert, wenn die Parametrisierung (orientierungserhaltend) geändert wird.

Diese Forderungen werden von der **Volumenform**

$$\omega^{(\varphi)} := \sqrt{|g|} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k \quad (6.1)$$

der parametrisierten Fläche  $V$  erfüllt, wobei die symmetrische  $k \times k$ -Matrix  $g$  durch

$$g := (D\varphi)^t D\varphi$$

definiert ist, und für reguläre Parametrisierung ( $\text{rang}(D\varphi(x)) = k \quad (x \in U)$ ) wegen

$$\langle v, g(x)v \rangle = \langle D\varphi(x)v, D\varphi(x)v \rangle = \|D\varphi(x)v\|_2^2 > 0 \quad (v \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\})$$

$g(x) > 0$  gilt, die Matrix also positiv definit ist.

$g$  heißt *metrischer Tensor*.  $|g|$  bezeichnet in der Literatur oft  $\det(g)$ .

Ist beispielsweise  $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch  $\psi = O \circ \varphi$  mit  $O \in SO(n)$  gegeben, dann ist  $g$  invariant unter der Drehung:

$$(D\psi)^t D\psi = (OD\varphi)^t (OD\varphi) = (D\varphi)^t O^t O D\varphi = (D\varphi)^t D\varphi = g.$$

Wir können eine Funktion  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  integrieren, indem wir das Integral

$$\int_U f \circ \varphi \cdot \omega^{(\varphi)}$$

bilden. Dieser Ausdruck ist invariant unter einer Veränderung der Parametrisierung. Der Spezialfall  $f = \mathbb{1}_V$  liefert wieder das  $k$ -dimensionale Volumen von  $V$ .

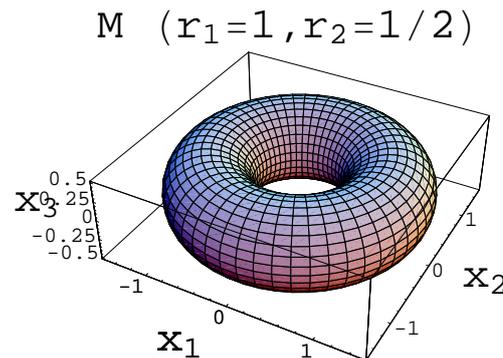
**6.3 Beispiel** Wir wollen den Flächeninhalt eines zweidimensionalen Torus  $M \subset \mathbb{R}^3$  berechnen. Dieser sei für Parameter  $r_1 > r_2 > 0$  durch  $M := \varphi(U)$  mit

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad U := [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$$

und

$$\varphi(\psi_1, \psi_2) := \begin{pmatrix} (r_1 + r_2 \cos \psi_2) \cos \psi_1 \\ (r_1 + r_2 \cos \psi_2) \sin \psi_1 \\ r_2 \sin \psi_2 \end{pmatrix}$$

parametrisiert. Wir scheren uns nicht weiter um die Tatsache, dass  $U \subset \mathbb{R}^2$  nicht offen ist, denn der Rand von  $U$  ist eine Lebesgue-Nullmenge.



Die Koeffizienten der Riemannschen Metrik  $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$  mit  $g_{21} = g_{12}$  sind

$$\begin{aligned} g_{11}(\psi_1, \psi_2) &= \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial \psi_1} \right)^2 = (r_1 + r_2 \cos \psi_2)^2 (\sin^2 \psi_1 + \cos^2 \psi_1) \\ &= (r_1 + r_2 \cos \psi_2)^2 \\ g_{12}(\psi_1, \psi_2) &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \psi_1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \psi_2} = r_2 \sin \psi_2 (r_1 + r_2 \cos \psi_2) \sin \psi_1 \cos \psi_1 \\ &\quad - r_2 \sin \psi_2 (r_1 + r_2 \cos \psi_2) \cos \psi_1 \sin \psi_1 \\ &= 0 \\ g_{22}(\psi_1, \psi_2) &= \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial \psi_2} \right)^2 = r_2^2 [\sin^2 \psi_2 (\cos^2 \psi_1 + \sin^2 \psi_1) + \cos^2 \psi_1] \\ &= r_2^2, \end{aligned}$$

also  $\sqrt{|g|} = \sqrt{\det g} = r_2(r_1 + r_2 \cos \psi_2) > 0$  und damit die Torus-Fläche

$$\int_U \omega^{(\varphi)} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{|g|} d\psi_1 d\psi_2 = (2\pi)^2 r_1 r_2. \quad \diamond$$

Betrachten wir den im Beispiel vorliegenden Spezialfall einer *Hyperfläche*  $V$  des  $\mathbb{R}^n$  genauer.  $V = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$  besitzt eine Parametrisierung

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{für } U \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \text{ offen.}$$

Auf  $V$  existiert ein bis auf Vorzeichen eindeutiges stetiges *Normalenvektorfeld*

$$N : V \rightarrow \mathbb{R}^n \quad , \quad \|N(y)\| = 1 \quad (y \in V),$$

das senkrecht auf  $V$  steht, also

$$\langle N \circ \varphi(x), D\varphi(x)w \rangle = 0 \quad (x \in U, w \in \mathbb{R}^{n-1}).$$

Es gilt dann für die  $n \times n$ -Matrix  $M(x) := (N \circ \varphi(x), D\varphi(x))$

$$M^t(x)M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & g(x) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad (x \in U)$$

also  $\det g(x) = \det(M^t(x)M(x)) = (\det(M(x)))^2$ , oder, bei geeigneter Wahl der Orientierung des Normalenvektorfeldes

$$\sqrt{|g|} = \det M. \quad (6.2)$$

Damit ergibt sich für die in (1.3) definierte zum Normalenvektorfeld  $N$  duale  $(n-1)$ -Form  $\omega_N$  auf  $V$  (also  $\omega_N(w_1, \dots, w_{n-1}) = \det(N, w_1, \dots, w_{n-1})$ ) die Gleichheit zur Volumenform der Hyperfläche  $V$ :

**6.4 Satz**  $\varphi^*\omega_N = \omega^{(\varphi)}$  für  $\omega^{(\varphi)}$  aus (6.1).

**Beweis:** Bezeichnen wir mit  $\widehat{d\varphi}_k$  wieder die Entfernung von  $d\varphi_k$ , dann ist

$$\varphi^*\omega_N = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} N_k \circ \varphi d\varphi_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\varphi}_k \wedge \dots \wedge d\varphi_n = \det M dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}.$$

Die Behauptung folgt also aus (6.2). Eigentlich müsste  $\omega_N$  auf einer im  $\mathbb{R}^n$  offenen Umgebung von  $V$  definiert sein. Dies kann aber durch glatte Fortsetzung des Normalenvektorfeldes  $N$  erreicht werden, und  $\varphi^*\omega_N$  hängt dann nicht von der Wahl der Fortsetzung ab.  $\square$

Eine weitere wichtige Situation ist die, dass im die  $k$ -dimensionale *Untermannigfaltigkeit*  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  umgebenden Raum eine  $k$ -Form  $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$  existiert, deren Integral über die (mit einer offenen Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^k$  und  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  parametrisierten) Untermannigfaltigkeit  $V = \varphi(U)$  wir durch

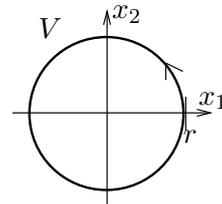
$$\int_V \omega := \int_U \varphi^*\omega$$

definieren. Nach Satz 6.2 ist dieses Integral bis auf das Vorzeichen unabhängig von der Wahl der Parametrisierung.

**6.5 Beispiel** 1-Form  $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ ,  $\omega := x_1 dx_2$

$$U := [0, 2\pi) \quad , \quad \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$\varphi(\psi) := \begin{pmatrix} r \cos \psi \\ r \sin \psi \end{pmatrix}$ , also  $V = \varphi(U)$  der Kreis vom Radius  $r > 0$  um den Ursprung.



$$\int_V \omega = \int_U \varphi^* \omega = \int_U r \cos \psi d(r \sin \psi) = r^2 \int_U \cos^2 \psi d\psi = \pi r^2. \quad \diamond$$

## 6.2 Der Satz von Stokes

In diesem Beispiel fällt auf, dass das Integral von  $d\omega = dx_1 \wedge dx_2$ , also dem kanonischen orientierten Flächenelement des  $\mathbb{R}^2$ , über die von  $V$  eingeschlossene Kreisscheibe vom Radius  $r$  gleich dem Integral von  $\omega$  über die Kreislinie ist.

Dies ist kein Zufall, sondern die Manifestation eines allgemeinen Satzes, des sogenannten Satzes von Stokes. Dieser stellt eine Beziehung zwischen Integralen über Mannigfaltigkeiten und Integralen über ihren Rand her. Ohne wegen der Kürze der Zeit den allgemeinen Mannigfaltigkeitsbegriff einführen zu können, möchte ich doch kurz das Wichtigste skizzieren.<sup>20</sup>

In der *MP-2* wurden in den  $\mathbb{R}^n$  eingebettete  $k$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten  $M \subset \mathbb{R}^n$  eingeführt:

**6.6 Definition** Für  $p \in \{0, \dots, m\}$  heißt eine Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{R}^m$   $p$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^m$ , wenn jeder Punkt  $x \in M$  eine Umgebung  $W_x \subseteq \mathbb{R}^m$  besitzt, so dass für eine geeignete Abbildung  $f \in C^1(W_x, \mathbb{R}^{m-p})$  mit regulärem Wert 0 gilt:

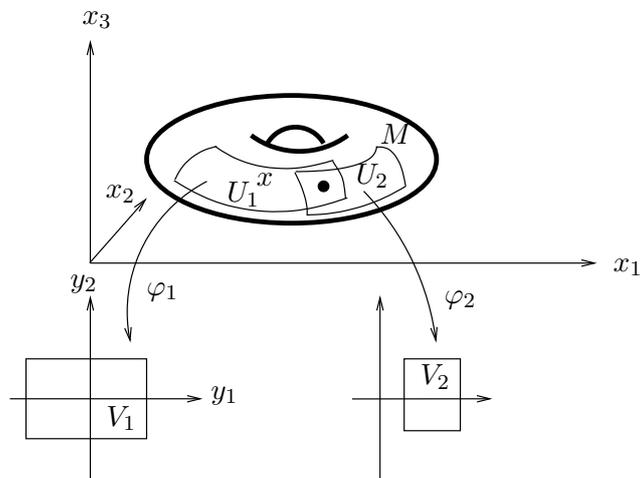
$$M \cap V_x = f^{-1}(0).$$

**6.7 Bemerkungen** 1. Wie das Beispiel des nicht orientierbaren Möbius-Bandes  $M \subset \mathbb{R}^3$  zeigte, muss es kein  $f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{m-p})$  geben, für das ganz  $M$  Urbild eines regulären Wertes von  $f$  ist.

2. Nach dem Satz über implizite Funktionen sehen Untermannigfaltigkeiten zunächst *lokal*, d.h. in einer geeigneten Umgebung  $U \subseteq M$  jedes ihrer Punkte  $x \in M$  wie das Bild einer offenen Umgebung  $V \subset \mathbb{R}^k$  unter einem Diffeomorphismus  $V \rightarrow U$  aus.

Das heißt aber nicht, dass die gesamte Mannigfaltigkeit notwendig homöomorph zu irgendeiner Umgebung  $V \subseteq \mathbb{R}^k$  ist. Beispielsweise ist dies für kompakte randlose Mannigfaltigkeiten wie den in Beispiel 6.3 besprochenen  $k = 2$ -dimensionalen Torus  $M \subset \mathbb{R}^3$  oder die Sphären  $S^n$  nicht der Fall.  $\diamond$

<sup>20</sup>Siehe z.B. [AF] für eine genauere und weitergehende Einführung.



- Wohl aber kann man den topologischen Raum  $M$  durch *Kartengebiete*, d.h. offene Teilmengen  $U_i \subset M$  überdecken, die zu offenen Teilmengen  $V_i \subseteq \mathbb{R}^k$  homöomorph sind. Für kompakte Mannigfaltigkeiten genügen endlich viele  $U_i$ .
- Die inversen Abbildungen  $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i \subseteq \mathbb{R}^k$  (*Kartenabbildungen*) sollen *verträglich* sein, d.h. der *Kartenwechsel*  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  auf seinem Definitionsbereich  $\varphi_j(U_i \cap U_j) \subseteq V_j$  glatt.
- Besitzt die Mannigfaltigkeit  $M$  einen *Rand*, dann verlangen wir, dass die Kartenbilder  $V_i$  als Teilmengen des Halbraumes

$$\mathbb{R}_+^k := \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_k \geq 0\}$$

offen sind.

- Der *Rand*  $\partial M$  von  $M$  ist dann Vereinigung der  $M_i$ .  $\partial M$  ist eine  $(k - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit

### 6.8 Beispiel Berandeter halb-unendlicher Zylinder

$$M := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = R^2, x_3 \geq 0\}$$

mit Radius  $R > 0$ .

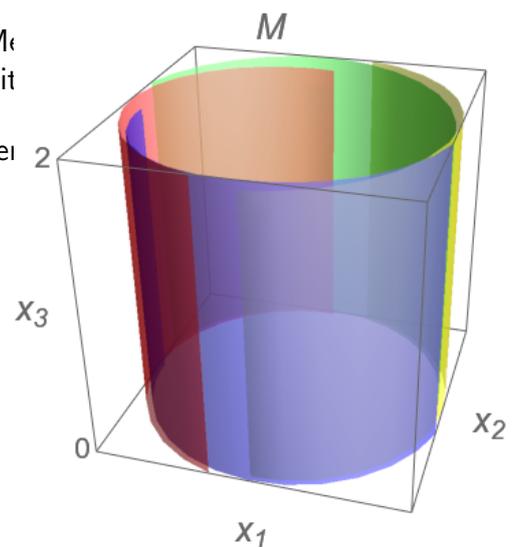
Wir können z.B. die folgenden vier Karten  $(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)$ ,  $i = 1, 2$  benutzen:

$$U_i^\pm := \{x \in M \mid \pm x_i > 0\}$$

$$\varphi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}_+^2$$

$$\varphi_1^\pm(x_1, x_2, x_3) := (\pm x_2, x_3)$$

$$\varphi_2^\pm(x_1, x_2, x_3) := (\pm x_1, x_3).$$



Der Rand des Zylinders ist  $\partial M = \{x \in M \mid x_3 = 0\}$ , also ein Kreis mit Radius  $R$  in der  $(x_1, x_2)$ -Ebene des  $\mathbb{R}^3$ .  $\diamond$

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besitzt die folgende Verallgemeinerung:

**6.9 Satz (Stokes)** *Es sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine (orientierte)  $k$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $\omega$  eine  $(k-1)$ -Form (mit kompaktem Träger) auf  $M$ . Dann gilt*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

**Beweis:** • Wir beweisen den Satz hier nur für den Fall  $k = n$ . Den Beweis für beliebige, nicht notwendig eingebettete Mannigfaltigkeiten findet man z.B. in [AF], Kap. 3.6

• Nach dem Satz über implizite Funktionen finden wir für jeden Punkt  $x \in \partial M$  eine Umgebung  $U_k \subseteq M$  von  $x$  und eine Kartenabbildung  $\varphi_k : U_k \rightarrow V_k \subseteq \mathbb{R}_+^n$  mit  $\partial M \cap U_k = \varphi_k^{-1}(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$ . Da  $\omega$  nur auf einem Kompaktum von Null verschieden ist, genügen endlich viele Karten.

• Wir können nun mit einem Trick die scheinbar einschränkende Voraussetzung  $\text{supp}(\omega) \subseteq U_k$  benutzen. Es gibt nämlich eine sog. *Partition der Eins*, eine Familie von Funktionen  $\chi_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  mit  $\chi_k \geq 0$ ,  $\text{supp}(\chi_k) \subset U_k$  und  $\sum_{k=1}^{k_{\max}} \chi_k = 1$ , siehe Abbildung.

Setzen wir  $\omega_k := \chi_k \omega$ , dann ist  $\sum_{k=1}^{k_{\max}} \omega_k = \omega$  und  $\text{supp}(\omega_k) \subset U_k$ .

• Nach oben stehender Definition reicht es aus, die Integration einer  $(n-1)$ -Form  $\omega$  mit im Halbraum  $\mathbb{R}_+^n$  gelegenen Träger zu betrachten. Dann lässt sich (wenn wir wie in Kapitel 13 die Entfernung einer Einsform durch einen Hut indizieren)  $\omega$  in der Form

$$\omega = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} f_k dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k-1} \wedge \widehat{dx_k} \wedge dx_{k+1} \wedge \dots \wedge dx_n$$

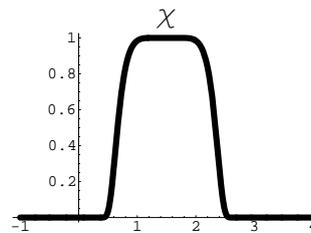
schreiben, wobei die  $f_k$  Funktionen mit kompaktem Träger in  $\mathbb{R}_+^n$  sind.

• Nun ist

$$d\omega = \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_k} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

also

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} d\omega &= \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial f_k}{\partial x_k} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_k}{\partial x_k} dx_k \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k-1} \wedge \widehat{dx_k} \wedge dx_{k+1} \wedge \dots \wedge dx_n \\ &\quad + (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \int_0^\infty \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_n \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}. \end{aligned}$$



Das innere Integral verschwindet nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für  $k = 1, \dots, n-1$ . Für den letzten Summanden ergibt partielle Integration aber

$$\int_0^\infty \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) dx_n = -f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0),$$

also insgesamt

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} d\omega = (-1)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}.$$

• Andererseits ist  $\omega|_{\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}} = (-1)^{n-1} f_n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$ , denn  $x_n$  ist auf diesem Unterraum gleich Null, also auch  $dx_n|_{\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}} = 0$ . Mit der richtigen Wahl der Orientierungen ergibt sich also

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} d\omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}} \omega,$$

und damit der Satz. □

## 6.10 Beispiele (Satz von Stokes)

1. **Kurvenintegral:** Es sei  $M \subset \mathbb{R}^3$  das Bild einer (regulären, injektiven) Kurve

$$c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

und  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion.

Dann besteht  $\partial M$  aus den Punkten  $c(0)$  und  $c(1)$ . Diese bekommen als Anfangs- und Endpunkte aber unterschiedliche Orientierung, sodass die Formel

$$\int_0^1 \underbrace{\frac{\partial F \circ c}{\partial t}(t) dt}_{dF \circ c} = F \circ c(1) - F \circ c(0) \quad (6.3)$$

entsteht. Ist  $F = \tilde{F}|_M$  mit einer glatten Funktion  $\tilde{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , dann ist das Integral in (6.3) gleich  $\tilde{F}(c(1)) - \tilde{F}(c(0))$ , unabhängig von der Wahl des Weges  $c$  mit vorgegebenem Anfangs- und Endpunkt.

2. In Verallgemeinerung von Beispiel 6.5 betrachten wir die symplektische 2-Form  $\omega = -d\theta = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$  auf dem Phasenraum  $P := \mathbb{R}_p^n \times \mathbb{R}_q^n$  mit 1-Form  $\theta := \sum_{i=1}^n p_i dq_i$ .

Es sei  $c : S^1 \rightarrow P$  eine Schleife, deren Bild das Bild  $M$  einer Kreisscheibe berandet, d.h.

$$c(S^1) = \partial M.$$

Dann ist das Integral  $\int_{\partial M} \theta = -\int_M \omega$ , unabhängig von der Wahl von  $M$ . Diese Größe spielt bei der Berechnung von Wirkungsvariablen integrierbarer hamiltonscher Systeme eine wichtige Rolle.

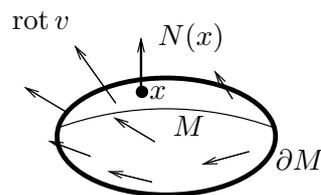
3. Wir bleiben bei dem Bild  $M$  einer Kreisscheibe. Diese soll aber diesmal im  $\mathbb{R}^3$  liegen, also durch  $\iota : \tilde{M} \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$  mit  $\tilde{M} \subseteq \mathbb{R}^2$  offen parametrisiert sein. Weiter sei  $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Vektorfeld. Dann ist  $v^*$  eine 1-Form,  $dv^*$  eine (auf  $M$  integrierbare) 2-Form, und nach (1.7) gilt

$$\omega_{\text{rot } v} = dv^*.$$

Also ist das Integral von  $dv^*$  über  $M$  gleich dem Integral des Skalarproduktes von  $\text{rot } v$  mit der Flächennormale  $N$  (bezüglich des Flächenelementes  $\sqrt{|g|}dx_1 \wedge dx_2$ ) und es folgt nach Satz 6.4 der **Satz von Kelvin-Stokes**

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{M}} \langle \text{rot } v, N \rangle \circ \iota(x) \sqrt{|g(x)|} dx_1 \wedge dx_2 &= \int_M \langle \text{rot } v, N \rangle \omega_N \\ &= \int_M \omega_{\text{rot } v} = \int_M dv^* = \int_{\partial M} v^* = \int_{t_0}^{t_1} \left\langle v(c(t)), \frac{dc}{dt}(t) \right\rangle dt \end{aligned}$$

für eine Parametrisierung  $c : [t_0, t_1] \rightarrow \partial M$  des Randes der Kreisscheibe. Das Linienintegral nennt man auch *Zirkulation*.



Beispielsweise könnte  $v$  das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit sein. Dann sieht man aus der obigen Formel, dass bei Rotationsfreiheit der Strömung die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit bezüglich der Schleife  $\partial M$  im Mittel verschwindet.

4. **Gaußscher Integralsatz:** Die Divergenz  $\text{div}(v)$  eines Vektorfeldes  $v$  auf dem  $\mathbb{R}^n$  ist nach (1.6) mittels  $\omega_v = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} v_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$  und

$$d\omega_v = \text{div}(v) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

mit der äußeren Ableitung verbunden.

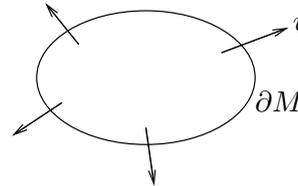
Ist  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $n$ -dimensionale berandete Untermannigfaltigkeit (z.B. eine Vollkugel), dann gilt nach dem Satz von Stokes

$$\int_M d\omega_v = \int_{\partial M} \omega_v.$$

Für die Randpunkte  $x \in \partial M$  bezeichne  $N(x)$  den Normalenvektor.  $v(x)$  lässt sich eindeutig in der Form

$$v(x) = \langle v(x), N(x) \rangle N(x) + w(x) \quad (6.4)$$

schreiben, wobei dann  $w(x)$  tangential an  $\partial M$  bei  $x$  ist, also  $\int_{\partial M} \omega_w = 0$  und mit (6.4)  $\int_{\partial M} \omega_v = \int_{\partial M} \langle v, N \rangle \omega_N$ . Es ergibt sich also der **Satz von Gauss**



$$\int_M \operatorname{div}(v) dx_1 \dots dx_n = \int_M d\omega_v = \int_{\partial M} \omega_v = \int_{\partial M} \langle v, N \rangle \omega_N.$$

Ist das Vektorfeld divergenzfrei (wie beispielsweise das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit), dann fließt also durch die Randfläche  $\partial M$  genauso viel aus  $M$  heraus wie herein.  $\diamond$

### 6.3 Das Poincaré-Lemma

Jede exakte Differentialform ist geschlossen, aber nicht jede geschlossene Differentialform ist exakt:

#### 6.11 Beispiel (Exakte, aber nicht geschlossene Differentialform)

Wir betrachten auf  $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  die Einsform  $\omega := \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{x_1^2 + x_2^2}$ , wobei  $x_1, x_2$  die cartesianischen Koordinaten des  $\mathbb{R}^2$  sind.

- Diese ist geschlossen, denn

$$d\omega = \left( D_1 \left( \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right) + D_2 \left( \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right) dx_1 \wedge dx_2 = 0.$$

- Aber  $\omega$  ist nicht exakt. Denn gäbe es eine 0-Form  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $d\varphi = \omega$ , dann müsste nach dem Satz von Stokes bei Integration über die Kreislinie  $S^1 \subset U$  gelten:

$$\int_{S^1} d\varphi = \int_{\partial S^1} \varphi = 0,$$

denn als Rand der Kreisscheibe ist die Kreislinie selbst randlos. Andererseits würde

gelten:

$$\begin{aligned} \int_{S^1} d\varphi &= \int_{S^1} \omega = \int_{S^1} (x_1 dx_2 - x_2 dx_1) \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos \varphi d(\sin \varphi) - \sin \varphi d(\cos \varphi)) \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) d\varphi = 2\pi. \end{aligned}$$

• Die Einsform  $\omega$  kann man als das Eichpotential einer abgeschirmten (unendlich dünnen) Spule entlang der  $x_3$ -Achse ansehen. Die äußere Ableitung  $B := d\omega$  des Eichfeldes ist das Magnetfeld, und dieses verschwindet im Außengebiet.

Obwohl also keine magnetischen Kräfte auf Teilchen im Außengebiet wirken, kann man wegen der quantenmechanischen Natur von Elektronen experimentell nachweisen, dass das Eichfeld selbst ungleich Null ist (*Aharonov-Bohm Effekt*).  
◇

Ist aber der Definitionsbereich  $U$  ein sog. Sterngebiet (oder allgemeiner: *kontra-hierbar*), dann ist jede geschlossene  $k$ -Form auf  $U$  exakt ( $k \geq 1$ ).

**6.12 Definition** Eine offene Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt **Sterngebiet**, wenn es ein  $x \in U$  gibt, sodass für alle  $y \in U$  die Strecke zwischen  $x$  und  $y$  in  $U$  liegt.

**6.13 Beispiel** Offene konvexe Teilmengen  $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^n$  sind Sterngebiete. ◇

**6.14 Satz (Poincaré-Lemma)** Ist  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Sterngebiet und  $\omega \in \Omega^k(U)$ ,  $k \geq 1$  geschlossen ( $d\omega = 0$ ), dann ist  $\omega$  exakt ( $\omega = d\varphi$ ).

**Beweis:** Der Beweis beinhaltet eine Formel für eine solche  $(k-1)$ -Form  $\varphi$  (Nach <sup>21</sup>, mathematisches Referenzbuch der Klassischen Mechanik).

• Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass  $U$  ein Sterngebiet bez. des Nullpunkts ist.

• Die Skalierungs-Abbildungen

$$F_t : U \rightarrow U, \quad y \mapsto ty \quad (t \in [0, 1])$$

sind für  $t \in (0, 1]$  Diffeomorphismen auf das Bild  $F_t(U)$ . Die Abbildungen  $t \mapsto F_t(u)$  für  $u \in U$  können als Lösungen des Anfangswertproblems

$$\frac{dy}{dt} = X_t(y), \quad y(1) = u$$

mit dem zeitabhängigen Vektorfeld  $X_t(y) := y/t$  aufgefasst werden.

<sup>21</sup> R. Abraham, J.E. Marsden: Foundations of Mechanics. Reading: Benjamin/Cummings 1982

Für die Lie-Ableitung  $L_{X_t}$  gilt daher

$$\frac{d}{dt} F_t^* = F_t^* L_{X_t}.$$

Die Lie-Ableitung einer Differentialform  $\omega$  nach einem Vektorfeld  $X$  ist gleich  $L_X \omega = (d\mathbf{i}_X + \mathbf{i}_X d)\omega$ , mit  $\mathbf{i}_X \varphi := \varphi(X, \dots)$ .

- Wegen der Geschlossenheit von  $\omega$  ist  $L_{X_t} \omega = d\mathbf{i}_{X_t} \omega$ , also insgesamt

$$\frac{d}{dt} F_t^* \omega = F_t^* d\mathbf{i}_{X_t} \omega = dF_t^* \mathbf{i}_{X_t} \omega.$$

Für  $t_0 \in (0, 1]$  folgt durch Integration

$$\omega - F_{t_0}^* \omega = F_1^* \omega - F_{t_0}^* \omega = \int_{t_0}^1 \frac{d}{dt} F_t^* \omega = d \int_{t_0}^1 F_t^* \mathbf{i}_{X_t} \omega dt.$$

Für  $t_0 \rightarrow 0$  ergibt sich  $\omega = d\varphi$  mit  $\varphi := \int_0^1 F_t^* \mathbf{i}_{X_t} \omega dt$ . □

Wir wollen nun Eins-Formen  $\omega \in \Omega^1(U)$  entlang Kurven integrieren, und sehen, ob das Ergebnis nur von Anfangs- und Endpunkt abhängt.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die offene nicht-leere Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  *zusammenhängend* ist, also nicht als disjunkte Vereinigung  $U = U_1 \dot{\cup} U_2$  solcher Teilmengen dargestellt werden kann.

**6.15 Definition** • Zwei Kurven  $c_0, c_1 : I \rightarrow U$  mit  $I := [a, b]$  und gleichen Anfangs- und Endpunkten ( $c_0(a) = c_1(a)$  und  $c_0(b) = c_1(b)$ ) heißen **homotop**, wenn es eine stetige Abbildung

$$h : I \times [0, 1] \rightarrow U$$

gibt mit  $h|_{I \times \{k\}} = c_k$ ,  $k = 0, 1$ ,  $h|_{\{a\} \times [0, 1]} = c_0(a)$  und  $h|_{\{b\} \times [0, 1]} = c_0(b)$ .

- $h$  heißt dann eine **Homotopie** von  $c_0$  nach  $c_1$ .
- $U$  heißt **einfach zusammenhängend**, wenn je zwei Kurven in  $U$  mit gleichen Anfangs- und Endpunkten homotop sind.

### 6.16 Bemerkungen (Homotopie)

1. Anschaulich wird durch  $h$  die Kurve  $c_0$  stetig in  $c_1$  deformiert, wobei Anfangs- und Endpunkte festgehalten werden. Setzt man nämlich für  $s \in [0, 1]$

$$c_s : I \rightarrow U \quad , \quad c_s(t) := h(t, s),$$

dann stimmen die Kurven  $c_s$  für  $s = 0$  oder  $s = 1$  mit den vorher definierten Kurven überein, und  $c_s(a) = c_0(a)$ ,  $c_s(b) = c_0(b)$ .

2. Für  $x, y \in U$  ist Homotopie eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Kurven von  $x$  nach  $y$ .  $\diamond$

**6.17 Beispiel** Konvexe Teilmengen  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  sind einfach zusammenhängend, denn für zwei Kurven  $c_0, c_1 : [a, b] \rightarrow U$  mit gleichen Anfangs- und Endpunkten können wir die Homotopie

$$h : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow U \quad , \quad h(t, s) := (1 - s)c_0(t) + sc_1(t)$$

wählen.  $\diamond$

**6.18 Satz** Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Falls  $\omega \in \Omega^1(U)$  geschlossen ist, gilt für homotope  $C^1$ -Kurven  $c_0, c_1 : [a, b] \rightarrow U$

$$\int_{c_0} \omega = \int_{c_1} \omega.$$

**Beweis:** • Nach Definition existiert eine stetige Homotopie  $h : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow U$  von  $c_0$  nach  $c_1$ . Wegen der Offenheit von  $U$  kann man diese glätten (siehe Satz 7.11), also gleich annehmen, dass  $h$  glatt ist. Wir können mit  $h$  die 1-Form  $\omega$  zurückziehen und erhalten eine 1-Form  $\tilde{\omega} := h^*\omega \in \Omega^1(\tilde{U})$  mit<sup>22</sup>  $\tilde{U} := [a, b] \times [0, 1]$ .

- $\omega$  ist geschlossen ( $d\omega = 0$ ). Nach Satz 1.21 ist damit auch  $\tilde{\omega}$  geschlossen.
- Wir stellen nun den Rand des Rechtecks  $\tilde{U}$  als Vereinigung der vier Kurven

$$\begin{aligned} \tilde{c}_k : [a, b] \rightarrow \tilde{U} \quad , \quad \tilde{c}_k(t) &:= (t, k) \quad (k = 1, 2) \quad , \\ \tilde{a}, \tilde{b} : [0, 1] \rightarrow \tilde{U} \quad , \quad \tilde{a}(s) &:= (a, s) \quad , \quad \tilde{b}(s) := (b, s) \end{aligned}$$

dar. Es gilt

$$\int_{\tilde{c}_k} \tilde{\omega} = \int_{c_k} \omega \quad , \quad \int_{\tilde{a}} \tilde{\omega} = \int_{\tilde{b}} \tilde{\omega} = 0,$$

denn  $h \circ \tilde{c}_k = c_k$ ,  $h \circ \tilde{a} \equiv a$ ,  $h \circ \tilde{b} \equiv b$ .

- $\tilde{U}$  ist konvex, also gilt für die geschlossene 1-Form  $\tilde{\omega}$  das Poincaré-Lemma. Wir wählen die zusammengesetzten Kurven

$$\begin{aligned} d_0 : [a, b+1] \rightarrow \tilde{U} \quad , \quad d_0(\tau) &:= \begin{cases} \tilde{c}_0(\tau) & , \quad \tau \in [a, b] \\ \tilde{b}(\tau - b) & , \quad \tau \in (b, b+1] \end{cases} \\ d_1 : [a, b+1] \rightarrow \tilde{U} \quad , \quad d_1(\tau) &:= \begin{cases} \tilde{a}(\tau) & , \quad \tau \in [0, 1] \\ \tilde{c}_1(\tau - 1) & , \quad \tau \in (1, b+1] \end{cases} \end{aligned}$$

Diese sind stückweise glatt, mit Anfangspunkt  $(a, 0)$  und Endpunkt  $(b, 1)$ , und

$$\int_{d_0} \tilde{\omega} = \int_{\tilde{c}_0} \tilde{\omega} + \int_{\tilde{b}} \tilde{\omega} = \int_{\tilde{c}_0} \tilde{\omega} \quad , \quad \int_{d_1} \tilde{\omega} = \int_{\tilde{a}} \tilde{\omega} + \int_{\tilde{c}_1} \tilde{\omega} = \int_{\tilde{c}_1} \tilde{\omega}.$$

<sup>22</sup>Dass  $\tilde{U}$  selbst nicht offen ist, spielt keine Rolle, da wir  $h$  glatt auf eine offene Obermenge von  $\tilde{U}$  fortsetzen können.

Nach dem Poincaré-Lemma ist aber  $\tilde{\omega} = d\tilde{\varphi}$ , also

$$\int_{d_k} \tilde{\omega} = \int_{d_k} d\varphi = \varphi(b, 1) - \varphi(a, 0) \quad (k = 0, 1),$$

wobei im letzten Schritt der Satz von Stokes verwendet wurde. Es folgt

$$\int_{c_0} \omega = \int_{\tilde{c}_0} \tilde{\omega} = \int_{d_0} \tilde{\omega} = \int_{d_1} \tilde{\omega} = \int_{\tilde{c}_1} \tilde{\omega} = \int_{c_1} \omega. \quad \square$$

**6.19 Beispiel** Ist  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein glattes Vektorfeld mit der Eigenschaft

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \quad (i, k = 1, \dots, n),$$

dann ist die in Kapitel 1.3 eingeführte 1-Form  $v^* \in \Omega^1(U)$  ( $v^*(w) := \langle v, w \rangle$  für Vektorfelder  $w$ ) geschlossen, denn

$$v^* = \sum_{k=1}^n v_k dx_k \quad , \text{ also } \quad dv^* = \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_k = 0.$$

Integrieren wir solche Vektorfelder entlang Kurven  $c : [t_0, t_1] \rightarrow U$ , indem wir

$$\int_c v^* = \int_{t_0}^{t_1} \left\langle v(c(t)), \frac{dc}{dt}(t) \right\rangle dt$$

berechnen, dann ist dieses Integral für homotope Kurven wegunabhängig.  $\diamond$

Für den Fall von Eins-Formen im  $\mathbb{R}^n$  gilt das Poincaré-Lemma 6.14 nicht nur auf Sterngebieten:

**6.20 Satz (Poincaré-Lemma)** *Ist die offene Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  einfach zusammenhängend, dann sind geschlossene Eins-Formen  $\omega \in \Omega^1(U)$  exakt.*

**Beweis:** • Da die offene Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  zusammenhängend ist, ist  $U$  auch *wegweise zusammenhängend*, d.h. von einem willkürlich gewählten Ausgangspunkt  $x_0 \in U$  können wir jedes  $x \in U$  durch einen Weg  $c_x : [0, 1] \rightarrow U$  mit  $c_x(0) = x_0$ ,  $c_x(1) = x$  erreichen. Wir können sogar annehmen, dass  $c_x$  glatt ist.

• Wir definieren eine Funktion  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $\varphi(x) := \int_{c_x} \omega$ . Nach Satz 6.18 hängt  $\varphi(x)$  nicht von der Wahl von  $c$  ab.

•  $\varphi$  ist stetig differenzierbar, mit  $d\varphi = \omega$ .  $\square$

**6.21 Bemerkung** Beispiel 6.11 (Aharonov-Bohm Effekt) zeigt zusammen mit Satz 6.20, dass die gelochte Ebene  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  nicht einfach zusammenhängend ist.  $\diamond$

## 7 Die Fourier-Transformation

Im folgenden Kapitel schneiden wir einige Aspekte der Fourier-Transformation an. Vertiefungen und Anwendungen in der Quantenmechanik finden sich z.B. in REED und SIMON, Band 2 [RS].

### 7.1 Fourier-Transformation integrierbarer Funktionen

Wir haben die Definition der Fourier-Transformation einer Funktion  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  schon kennen gelernt:

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ik \cdot x} dx \quad (k \in \mathbb{R}^n).$$

$\hat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  ist, wie wir aus Satz 5.24 wissen, eine stetige Funktion, und offensichtlich gilt

$$|\hat{f}(k)| \leq (2\pi)^{-n/2} \|f\|_1 \quad (k \in \mathbb{R}^n),$$

die Fourier-Transformierte einer integrierbaren Funktion ist also sogar beschränkt.

**7.1 Beispiel** Die Gaußsche Glockenkurve  $f(x) = e^{-ax^2}$  ist für  $a > 0$  in  $L^1(\mathbb{R})$ . Mit der Substitution  $y := \sqrt{a}x$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2 - i x k} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2 - \frac{iyk}{\sqrt{a}}} dy \\ &= \frac{e^{-\frac{k^2}{4a}}}{\sqrt{2\pi a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(y + \frac{ik}{2\sqrt{a}})^2} dy = \frac{e^{-\frac{k^2}{4a}}}{\sqrt{2a}}. \end{aligned}$$

Der letzte Schritt, nämlich die Substitution mit  $z = y + c$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(y+c)^2} dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} dz,$$

ist für reelle  $c$  vertraut, aber wegen der komplexen Differenzierbarkeit = Holomorphie von  $z \mapsto e^{-z^2}$  auch für unser imaginäres  $c$  legitim (siehe Kapitel 8.3). Auch ohne Kenntnis der *Funktionentheorie* kann man diese Identität durch Differentiation des  $c$ -abhängigen Integrals nach  $c$  mittels Vertauschung von uneigentlichem Integral und Differentiation nach dem Parameter beweisen.

Wir erhalten damit wieder eine Gaußsche Glockenkurve, und speziell für  $a = 1/2$  ist  $\hat{f} = f$ . Wenn  $a$  groß ist, also die Glockenkurve  $f$  ein schmales Profil hat, besitzt  $\hat{f}$  ein weites Profil und umgekehrt.  $\diamond$

Warum ist die Fourier-Transformation wichtig? Unter anderem, weil sie die Lösung von partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ermöglicht. Unter der Fourier-Transformation werden nämlich solche Differentialoperatoren zu Polynomen:

**7.2 Satz** Es sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , und für alle Multiindizes  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  mit  $|\alpha| \leq k$  auch  $x \mapsto x^\alpha f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Dann ist

$$\hat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \partial^\alpha \hat{f} = (-i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha f(x)}. \quad (7.1)$$

### 7.3 Bemerkung

Die in der MP-2 eingeführte **Multiindex-Notation** verwendet die Abkürzungen  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ,  $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ , und für  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  schreibt man die Monome in der Form  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$ .

Mit  $\partial_l = \frac{\partial}{\partial x_l}$ ,  $l = 1, \dots, n$  für die  $l$ -te partielle Ableitung ist  $\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ .

Die Notation in (7.1) ist folgendermaßen zu verstehen:

$$\widehat{x^\alpha f(x)} \equiv \widehat{g} \quad \text{für} \quad g(x) := x^\alpha f(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

In der Physik ist es üblich, eine Funktion  $f$  in der Form  $f(x)$  zu notieren, während man in der Mathematik darunter normalerweise den Funktionswert von  $f$  an der Stelle  $x$  versteht. An dieser Stelle ist die Physiker-Notation einfacher.  $\diamond$

**Beweis:** • Für  $|\alpha| = 1$  ist für  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $x_j f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$  zu zeigen, dass

$$\frac{\partial}{\partial k_j} \hat{f}(k) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ik \cdot x} \cdot (-ix_j) dx \quad (k \in \mathbb{R}^n), \quad (7.2)$$

denn nach Satz 5.24 ist die rechte Seite von (7.2) stetig in  $k$ .

Der Integrand  $h(k, x) := -ix_j f(x) e^{-ik \cdot x}$  in (7.2) ist gleich

$$h(k, x) = \frac{\partial}{\partial k_j} f(x) e^{-ik \cdot x}.$$

Andererseits ist diese Ableitung punktweiser Limes der Differenzenquotienten

$$h_l(k, x) := f(x) e^{-ik \cdot x} \frac{(e^{-ix_j/l} - 1)}{1/l} \quad (l \in \mathbb{N}).$$

Wegen  $l|e^{-ix_j/l} - 1| \leq |x_j|$  ist für alle  $k \in \mathbb{R}^n$  die Funktion  $x \mapsto |h_l(k, x)|$  durch  $x \mapsto |h(k, x)| = |x_j f(x)|$  majorisiert. Nach Annahme ist letztere Funktion in  $L^1(\mathbb{R}^n)$ . Nach dem Satz 5.17 über die majorisierte Konvergenz gilt daher

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} h(k, x) dx &= (2\pi)^{-n/2} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_l(k, x) dx \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\hat{f}(k + \frac{1}{l} e_j) - \hat{f}(k)}{1/l} = \frac{\partial}{\partial k_j} \hat{f}(k). \end{aligned}$$

• Die Aussage für  $|\alpha| = k$  erhält man daraus durch Induktion.  $\square$

Auch umgekehrt gilt Analoges:

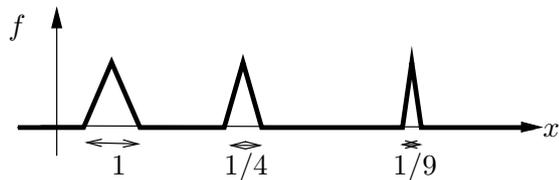
**7.4 Satz** Sei  $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$  und  $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  für alle Multiindices  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  mit  $|\alpha| \leq k$ . Dann gilt für diese  $\alpha$

$$\widehat{\partial^\alpha f} = i^{|\alpha|} k^\alpha \hat{f}.$$

**Beweis:** Wir können uns auf den Fall einer einzelnen Ableitung und Dimension  $n = 1$  zurückziehen. Nun zeigt eine partielle Integration

$$\begin{aligned} \widehat{f'}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( f(x) e^{-ikx} \Big|_{-\infty}^{\infty} + ik \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \right) \\ &= ik \hat{f}(k). \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$  verwendet. Für  $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  muss dieser Limes nicht existieren (siehe Abbildung), hier aber wegen  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = f(0) + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int_0^x f'(y) dy$  schon.  $\square$



Nicht nur Polynommultiplikation und Differenziation werden durch die Fourier-Transformation verknüpft, sondern auch punktweise Multiplikation und Faltung.

**7.5 Definition** Für  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  sei  $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  durch

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy$$

definiert.  $f * g$  heißt die **Faltung von  $f$  und  $g$** .

Im allgemeinen ist dieser Ausdruck nicht für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  definiert.

**7.6 Beispiel** Die reelle Funktion<sup>23</sup>

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} |x|^{-1/2} & , |x| \leq 1 \\ 0 & , |x| > 1 \end{cases}$$

ist in  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , aber ihre Faltung  $f * f$  mit sich selbst divergiert bei 0:

$$(f * f)(0) = \int_{\mathbb{R}} f(-y)f(y) dy = \int_{-1}^1 \frac{1}{|y|} dy = \infty. \quad \diamond$$

Da aber  $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , ist die Faltung insbesondere fast überall definiert:

<sup>23</sup> An der (schlampigen, aber kurzen) Definition von  $f$  sieht man einen praktischen Nutzen der Lebesgue-Integration: Die Funktion  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  ist bei 0 undefiniert. Die Wahl von  $f(0)$  spielt aber für die Äquivalenzklasse  $[f] \in L^1(\mathbb{R})$  keine Rolle.

**7.7 Satz** Für  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  ist auch  $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , und

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$$

**Beweis:** Dazu betrachten wir mit Fubini

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |f * g(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)| dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\tilde{x})g(y)| dy d\tilde{x} = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1. \end{aligned}$$

Der Diffeomorphismus

$$\varphi: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad \varphi(\tilde{x}, y) = (x-y, y)$$

besitzt die Funktionaldeterminante  $\det D\varphi = 1$ , woraus nach dem Transformationssatz die vorletzte Gleichung folgt.  $\square$

**7.8 Beispiel** Für  $r > 0$  und  $g_r := \frac{1}{2r} \mathbb{1}_{[-r, r]}$  gilt  $g_r \in L^1(\mathbb{R})$  und  $\int_{\mathbb{R}} g_r dx = 1$ .

Die Faltung einer (nicht stetigen) charakteristischen Funktion  $f$  eines Intervalls mit  $g_r$  ergibt eine stückweise affine stetige Funktion, siehe Abbildung 7.1 links. Die Faltung einer Dreiecksfunktion  $f$  mit  $g_r$  ergibt sogar eine stetig differenzierbare Funktion, siehe Abbildung 7.1 rechts.  $\diamond$

**7.9 Bemerkung** Es gilt  $f * g = g * f$ , denn für  $z := x - y$  folgt

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z) dz = g * f(x).$$

Außerdem gilt  $(f * g) * h = f * (g * h)$ . Damit wird die Faltung  $*$  zu einer ungewohnten Form der Multiplikation auf  $L^1(\mathbb{R}^n)$ . Die Fourier-Transformation verknüpft diese mit der gewöhnlichen (punktweisen) Multiplikation:  $\diamond$

**7.10 Satz** Für  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  gilt  $\widehat{f * g} = (2\pi)^{n/2} \hat{f} \cdot \hat{g}$ .

**Beweis:** Mit der Transformationsregel und dem Satz 5.23 von Fubini ergibt sich

$$\begin{aligned} (2\pi)^{n/2} \widehat{f * g}(k) &= \int_{\mathbb{R}^n} f * g(x) e^{-ik \cdot x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy \right) e^{-ik \cdot x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) e^{-ik \cdot (x-y)} g(y) e^{-ik \cdot y} dx dy \\ &= (2\pi)^n \hat{f}(k) \hat{g}(k), \end{aligned}$$

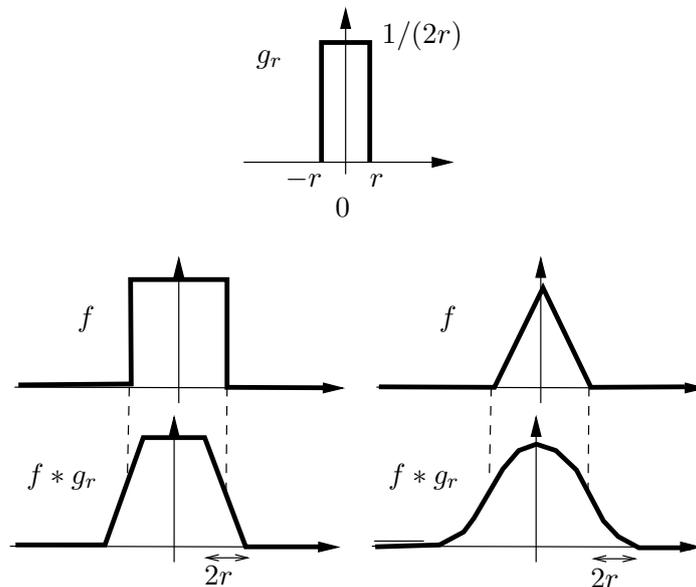


Abbildung 7.1: Faltung der Funktionen  $f$  mit  $g_r$

denn tatsächlich ist der Integrand  $f(z)e^{-ik \cdot z}g(y)e^{-ik \cdot y}$  in  $L^1(\mathbb{R}^{2n})$ . □

Das Beispiel 7.8 suggeriert, dass die Faltung einer beliebigen  $L^1$ -Funktion mit einer glatten Funktion  $\delta \in L^1(\mathbb{R}^n)$  glatt ist.

Oft betrachtet man dabei eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

- $\delta \geq 0$
- $\|\delta\|_1 = 1$
- $\delta \in C^k(\mathbb{R}^n)$ , und die partiellen Ableitungen  $\partial^\alpha \delta$ ,  $|\alpha| \leq k$  seien beschränkt.

Damit ist sichergestellt, dass  $\|f * \delta\|_1 \leq \|f\|_1$  (denn nach Satz 7.7 ist  $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ ), und für  $f \geq 0$  die  $L^1$ -Norm von  $f$  erhalten bleibt, denn in diesem Fall wird die Ungleichung im Beweis des Satzes zur Gleichung. Weiter gilt

**7.11 Satz** Für  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  und Multiindex  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ,  $|\alpha| \leq k$  ist

$$f * \delta \in C^k(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \partial^\alpha (f * \delta) = f * (\partial^\alpha \delta).$$

**Beweis:** Formal ergibt sich die Richtigkeit von Formel und Satz aus der Kommutativität der Faltung:  $f * \delta(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\delta(x - y) dy$ . Dass wir die Differenziation unter das Integral ziehen dürfen, folgt (wie im Beweis von Satz 7.2) aus dem Satz über die majorisierte Konvergenz,

denn falls  $|\partial^\alpha \delta| \leq M$ , ( $|\alpha| \leq k$ ), folgt  $|\partial^\alpha f(y)\delta(x-y)| \leq M|f(y)|$ ,  $M|f|$  ist also eine Majorante des Integranden.  $\square$

Manchmal wollen wir eine integrierbare Funktion  $f$  durch glatte Funktionen approximieren, und zwar im  $L^1$ -Sinn. Diese finden wir durch Faltung von  $f$  mit sogenannten  $\delta$ -Scharen bzw. Dirac-Folgen.

**7.12 Definition** Eine Folge von Funktionen  $\delta_k \in L^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $\delta_k \geq 0$ ,  $\|\delta_k\|_1 = 1$  und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_r} \delta_k dx = 1 \quad (r > 0)$$

(mit der Kugel  $B_r := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$ ) heißt  $\delta$ -Schar oder **Dirac-Folge**.

Die Funktionen  $\delta_k$  konzentrieren sich für  $k \rightarrow \infty$  also bei der Null.

**7.13 Satz** Für eine Dirac-Folge  $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  und  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  gilt

$$L^1\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} f * \delta_k = f \quad , \text{ das heißt } \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f - f * \delta_k| dx = 0 .$$

**Beweis:** Wir approximieren  $f$  durch Treppenfunktionen und zeigen für letztere die Aussage. Dafür genügt es wegen der Linearität der Faltung mit  $\delta_k$ , die charakteristische Funktion  $\mathbb{1}_Q$  eines Quaders  $Q \subset \mathbb{R}^n$  zu betrachten. Für  $\varepsilon > 0$  sei  $r$  so gewählt, dass das Lebesgue-Maß der symmetrischen Differenz durch

$$\lambda^n(Q \Delta (Q + y)) \leq \varepsilon/2 \quad (y \in B_r)$$

beschränkt ist. Dann ist wegen  $\int_{\mathbb{R}^n} \delta_k(y) dy = 1$  und nach Fubini

$$\begin{aligned} \|\mathbb{1}_Q - \mathbb{1}_Q * \delta_k\|_1 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \delta_k(y) |\mathbb{1}_Q(x) - \mathbb{1}_Q(x-y)| dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta_k(y) \lambda^n(Q \Delta (Q + y)) dy \\ &= \int_{B_r} \delta_k(y) \lambda^n(Q \Delta (Q + y)) dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r} \delta_k(y) \lambda^n(Q \Delta (Q + y)) dy \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{B_r} \delta_k(y) dy + 2\lambda^n(Q) \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r} \delta_k(y) dy \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\lambda^n(Q) \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r} \delta_k(y) dy. \end{aligned}$$

Für  $k \rightarrow \infty$  ist  $\delta_k$  bei 0 lokalisiert. Also ist auch der zweite Summand kleiner als  $\varepsilon/2$ .  $\square$

**7.14 Beispiel** Hat man eine Funktion  $\delta \geq 0$  mit  $\|\delta\|_1 > 0$ , dann kann man zunächst durch Division durch die Norm erreichen, dass  $\|\delta\|_1 = 1$ ; danach setzt man z.B.

$$\delta_k(x) := k^n \delta(kx) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Dadurch erreicht man bei Verwendung der Substitution  $y := kx$

$$\|\delta_k\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(kx) k^n dx = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(y) dy = \|\delta\|_1 = 1,$$

und  $\int_{U_r} \delta_k dx = \int_{U_{kr}} \delta dx \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  mit  $U_r := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| > r\}$ .  
Ist zusätzlich  $\delta \in C^m(\mathbb{R}^n)$ , dann auch die  $\delta_k$ . Dies gilt z.B. für alle  $m \in \mathbb{N}$  und

$$\delta(x) := (2\pi)^{-n/2} \exp(-\|x\|^2/2),$$

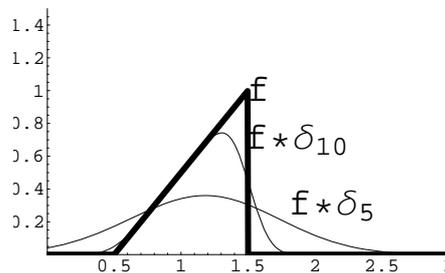
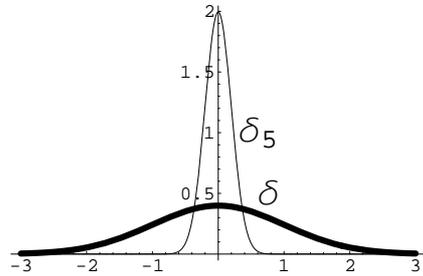
also

$$\delta_k(x) = \left(\frac{k}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp(-k^2\|x\|^2/2).$$

In diesem Fall sind nach Satz 7.11 die  $f$  approximierenden Funktionen  $f * \delta_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , und

$$L^1\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} f * \delta_k = f,$$

obwohl  $f$  vielleicht nicht einmal stetig ist, siehe nebenstehende Abbildung.



Mithilfe von  $\delta$ -Scharen können wir klären, was bei zweimaliger Anwendung der Fourier-Transformation geschieht.

Dies ist zunächst nur dann möglich, wenn auch die erste Fourier-Transformierte integrierbar ist. Am Beispiel (siehe Bsp. 5.25) der charakteristischen Funktion  $f = \mathbb{1}_{[-1,1]} \in L^1(\mathbb{R})$  mit Fourier-Transformierter  $\hat{f}(k) = \sqrt{2/\pi} \frac{\sin(k)}{k}$  sieht man, dass dies nicht immer der Fall ist.

### 7.15 Satz (Umkehrsatz)

- Ist neben  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  auch  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , dann gilt fast überall

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(k) e^{ik \cdot x} dk, \tag{7.3}$$

d.h.  $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$ .

- Gleichung (7.3) gilt in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$ , in dem  $f$  stetig ist.

**Beweis:** • Wir zeigen zunächst, dass die mit den Elementen  $\delta_\ell$  einer Dirac-Folge gefalteten  $f$  die Gleichung erfüllen. Dazu verwenden wir die Gaußsche Dirac-Folge aus Beispiel 7.14. Diese hat nämlich die (aus der Rechnung in Beispiel 7.1 folgende) Eigenschaft

$$\hat{\delta}_\ell = \ell^n \delta_{1/\ell}$$

oder  $\delta_\ell = \ell^n \hat{\delta}_{1/\ell}$  oder  $\delta_\ell(r) = \delta_\ell(-r) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|k\|^2/(2\ell^2)} e^{ik \cdot r} dk$ . Also ist

$$\begin{aligned} f * \delta_\ell(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \delta_\ell(x-y) dy \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik \cdot (x-y)} e^{-\|k\|^2/(2\ell^2)} dk \right) dy \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-ik \cdot y} dy \right) e^{ik \cdot x} e^{-\|k\|^2/(2\ell^2)} dk \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(k) e^{ik \cdot x} e^{-\|k\|^2/(2\ell^2)} dk, \end{aligned} \quad (7.4)$$

wobei die Vertauschung der Integrationsreihenfolge (dritte Identität) durch Fubini gerechtfertigt ist.

- Nach Satz 7.13 gilt auf der linken Seite von (7.4):  $L^1\text{-}\lim_{\ell \rightarrow \infty} f * \delta_\ell = f$ . Die Konvergenz fast überall für eine geeignete Teilfolge  $(\ell_k)_{k \in \mathbb{N}}$  folgt dann nach Riesz–Fischer (Satz 5.5).
- Andererseits konvergiert die Folge der Funktionen  $k \mapsto e^{-\|k\|^2/(2\ell^2)}$  für  $\ell \rightarrow \infty$  punktweise gegen 1, und der Integrand auf der rechten Seite von (7.4) wird durch  $|\hat{f}|$  majorisiert. Nach dem Satz über die majorisierte Konvergenz (Satz 5.17) gilt daher

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(k) e^{ik \cdot x} e^{-\|k\|^2/(2\ell^2)} dk = \hat{f}(-x) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Damit ist die erste Aussage bewiesen.

- Wir wissen schon, dass die Fourier–Transformierte  $\hat{f}$  von  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  stetig ist (Satz 5.24). Daher folgt  $f(x) = \hat{f}(-x)$  dort, wo  $f$  stetig ist, also die zweite Aussage.  $\square$

Der Umkehrsatz zeigt nun, dass die ebene Welle  $x \mapsto e^{ik \cdot x}$  desto stärker zu  $f$  beiträgt, je größer  $\hat{f}(k)$  betragsmäßig ist. Daher wird  $\hat{f}$  auch das *kontinuierliche Spektrum* von  $f$  genannt.

Bevor wir uns nun einer Anwendung der Fourier–Transformation in der Differentialgleichungstheorie zuwenden, ist eine Bemerkung über den Zusammenhang von Glattheit von  $f$  und Abfall von  $\hat{f}$  nötig.

Und zwar fällt  $\hat{f}(k)$  für große  $|k|$  desto stärker ab, je glatter  $f$  ist.

Wir wissen nämlich, dass die Fourier–Transformierte  $\hat{g}$  einer Funktion  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  beschränkt ist. Existiert nun  $g := \partial^\alpha f$  und ist sogar eine  $L^1$ –Funktion, dann folgt nach Satz 7.4, dass

$$k \mapsto k^\alpha \hat{f}(k) \quad \text{als Fourier–Transformierte von} \quad i^{|\alpha|} g$$

beschränkt ist. Daher fällt die Fourier–Transformierte einer Funktion  $f$ , deren partielle Ableitungen  $\partial^\alpha f$   $L^1$ –Funktionen sind, schnell genug ab, um integrierbar zu sein.

## 7.16 Beispiel (Fourier–Transformation und Differentialgleichungen)

Wir betrachten nun die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$x'' - x = f \quad \text{mit} \quad f \in L^1(\mathbb{R}), \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}). \quad (7.5)$$

Eine partikuläre Lösung  $t \mapsto \varphi(t)$  der DGL, die mit ihren ersten beiden Ableitungen in  $L^1(\mathbb{R})$  liegt, lässt sich nach Satz 7.4 mit diesen Ableitungen fouriertransformieren, und wir erhalten

$$-(k^2 + 1)\hat{\varphi}(k) = \hat{f}(k) \quad , \text{ also } \hat{\varphi}(k) = \frac{-\hat{f}(k)}{k^2 + 1}.$$

Nun ist  $(k^2 + 1)^{-1} = \hat{g}(k)$  mit  $g(t) := \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|t|}$ , sodass gilt

$$\varphi(t) = \widehat{\hat{\varphi}(-t)} = -\widehat{\hat{f} \cdot \hat{g}(-t)} = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}f * g(-t)$$

oder

$$\boxed{\varphi(t) = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-|t-s|} f(s) ds.}$$

Die allgemeine Lösung von (7.5) besitzt daher die Form

$$t \mapsto c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \varphi(t) \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{C}. \quad \diamond$$

## 7.2 Fourier–Transformation auf $L^2(\mathbb{R}^n)$

Bisher haben wir  $L^1$ -Funktionen fouriertransformiert. Jetzt wollen wir dasselbe für  $L^2$ -Funktionen tun. Dies wird in der Quantenmechanik beim Übergang von der Orts- zur Impulsraumdarstellung nötig. Es ist aber nicht unmittelbar möglich; das Integral braucht nicht zu existieren. Daher gehen wir zunächst einmal auf eine Klasse "gutartiger" Funktionen zurück:

**7.17 Definition** Der **Schwartz–Raum**  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ist der Funktionenraum

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n : t \mapsto t^\alpha \partial^\beta f(t) \text{ ist beschränkt}\}.$$

Die Schwartz–Funktionen fallen also nicht nur schneller als jede Potenz ab, das gleiche gilt auch für ihre partiellen Ableitungen.  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ist ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

**7.18 Beispiel** Die Funktionen  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit kompaktem Träger sind ebenso Schwartz–Funktionen wie die

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad f(x) = p(x) \exp(-\|x\|^2)$$

mit einem Polynom  $p$ . Letzteres trifft z.B. auf die Eigenfunktionen des quantenmechanischen harmonischen Oszillators zu (siehe Beispiel 9.9).  $\diamond$

Aus der Definition des Schwartz-Raums folgt, dass  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ . Wir können also Schwartz-Funktionen fouriertransformieren. Andererseits liegt  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  in  $L^2(\mathbb{R}^n)$  *dicht*; man kann ja  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  durch  $f \cdot \chi_R$  approximieren, mit der Abschneidefunktion  $\chi_R(x) := \begin{cases} 1 & , \quad \|x\| \leq R \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$ , und  $f \cdot \chi_R \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$  durch Faltung mit einer geeigneten  $\delta$ -Schar durch glatte Funktionen mit kompaktem Träger approximieren.

**7.19 Satz 1.** Für  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ist auch  $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

2. Die Restriktion  $\mathcal{F}_S : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  der Fourier-Transformation auf den Schwartz-Raum ist ein Isomorphismus.

3.  $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \langle f, g \rangle \quad (f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) \quad (\text{Plancherel-Formel})$

**Beweis:**

- Nach Satz 7.2 und Satz 7.4 gilt  $k^\alpha \partial^\beta \hat{f} = (-i)^{|\alpha|+|\beta|} \widehat{\partial^\alpha \chi^\beta f}$ . Also ist für alle Multiindices  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$  die Funktion  $k \mapsto k^\alpha \partial^\beta \hat{f}(k)$  beschränkt.
- Wir kennen schon die inverse Fourier-Transformation (7.3) und wissen, dass sie bis auf Inversion des Arguments gleich der Fourier-Transformation ist.
- Das Skalarprodukt der Fourier-Transformierten ist

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(k) \left( \int_{\mathbb{R}^n} \overline{g(x) e^{-ik \cdot x}} dx \right) dk \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(k) e^{ik \cdot x} dk \right) \overline{g(x)} dx = \langle f, g \rangle \end{aligned}$$

nach Fubini (Satz 5.23) und mit der inversen Fourier-Transformation.  $\square$

Da nicht alle Funktionen  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  integrierbar sind, konvergiert zwar im Allgemeinen

$$\hat{f}(k) := \lim_{R \rightarrow \infty} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_R(x) \cdot f(x) e^{-ik \cdot x} dx$$

nicht für alle  $k \in \mathbb{R}^n$ , aber für  $\lambda^n$ -fast alle:

**7.20 Satz** Die Fourier-Transformation  $\mathcal{F}_S : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  läßt sich eindeutig stetig zur **Fourier-Transformation**  $\mathcal{F}$  auf  $L^2(\mathbb{R}^n) \supset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  fortsetzen, und

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

ist eine **unitäre lineare Abbildung**.

- Beweis:** • Da  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$  ein dichter Untervektorraum ist, gibt es für jedes  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  eine gegen  $f$   $L^2$ -konvergente Cauchy-Folge  $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$  von Schwartz-Funktionen.
- Da nach der Plancherel-Formel  $\mathcal{F}_S : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_2$  eine Isometrie auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ist, ist auch  $(\mathcal{F}_S(f_m))_{m \in \mathbb{N}}$  eine  $L^2$ -Cauchy-Folge.
  - $L^2(\mathbb{R}^n)$  ist aber ein Banach-Raum, der Limes

$$\mathcal{F}(f) := L^2\text{-}\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{F}_S(f_m)$$

existiert also, und er ist unabhängig von der Wahl der gegen  $f$  konvergenten Cauchy-Folge.

- Die Linearität von  $\mathcal{F}$  und die Isometrie-Eigenschaft überträgt sich von  $\mathcal{F}_S$ . Damit ist nach Satz<sup>24</sup> 5.42 der *MP-2* die Abbildung  $\mathcal{F}$  stetig.
- Die Surjektivität von  $\mathcal{F}$  folgt aus der Eigenschaft  $\mathcal{F}_S(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  (Satz 7.19.2), denn damit können wir jedes  $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$  durch eine Cauchy-Folge  $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$  von  $g_m = \mathcal{F}_S(f_m)$  mit  $f_m \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  approximieren, und aus  $f_m(x) = \mathcal{F}_S(g_m)(-x)$  (Umkehrsatz 7.15) schließen wir, dass auch die  $f_m$  eine Cauchy-Folge bilden, also

$$g = \lim_{m \rightarrow \infty} g_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{F}(f_m) = \mathcal{F}\left(\lim_{m \rightarrow \infty} f_m\right)$$

wegen der Stetigkeit von  $\mathcal{F}$ . □

**7.21 Bemerkung** Dass also die Fourier-Transformation eine stetige Abbildung

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

ist, impliziert *nicht* die Stetigkeit der Fourier-Transformierten von  $L^2$ -Funktionen. Im Gegensatz zur Fourier-Transformierten von  $L^1$ -Funktionen (Satz 5.24) ist im Gegenteil die Fourier-Transformierte einer  $L^2$ -Funktion im Allgemeinen unstetig. Denn jede  $L^2$ -Funktion (wie z.B.  $\mathbb{1}_{[0,1]}$ ) ist ja selbst Fourier-Transformierte einer  $L^2$ -Funktion. ◇

### 7.3 Fourier-Transformation für abelsche Gruppen

Abschließend wollen wir uns die Fourier-Transformation etwas allgemeiner anschauen.

- **Fourier-Reihen:** Vielleicht wissen Sie, dass auch periodische Funktionen fourier-transformiert werden können, das Ergebnis dann aber eine Reihe ist (und nicht z.B. wieder eine periodische Funktion).
- **Diskrete Fourier-Transformation:** Auch auf dem Vektorraum  $\mathbb{C}^n$  lässt sich eine Fourier-Transformation einführen. Wir setzen dazu  $c := \exp(-2\pi i/n)$  und die *Fourier-Matrix*

$$U \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}) \quad , \quad U = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & c & c^2 & \dots & c^{n-1} \\ 1 & c^2 & c^4 & \dots & c^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & c^{n-1} & c^{2(n-1)} & \dots & c^{(n-1)^2} \end{pmatrix}. \quad (7.6)$$

<sup>24</sup>**Satz:** Eine lineare Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen normierten Vektorräumen  $(X, \|\cdot\|_X)$  und  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  ist genau dann stetig, wenn sie lipschitz-stetig ist.

Die  $c^k$  sind  $n$ -te Einheitswurzeln, und man kann zeigen, dass  $U$  unitär ist.

Was ist das verbindende Band zwischen diesen drei Fällen?

1. Zunächst sehen wir, dass jeweils Funktionen transformiert werden, deren Definitionsbereich eine *abelsche Gruppe* ist:

- Für  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  die Gruppe  $\mathbb{R}^n$ .
- Für die Fourier-Transformation der periodischen Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit Periode  $a > 0$  (d.h.  $f(x+a) = f(x)$ ) lässt sich  $f$  als Funktion auf  $\mathbb{R} \pmod{(a)}$  auffassen. Letzteres ist eine abelsche Gruppe (die via der Bijektion

$$\varphi : \mathbb{R}/a\mathbb{Z} \rightarrow S^1, \quad \varphi(x) := \exp(2\pi i x/a)$$

isomorph zur multiplikativen Gruppe  $S^1 := \{c \in \mathbb{C} \mid |c| = 1\}$  ist).

- Für die Fourier-Transformation  $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  wird der Vektorraum  $\mathbb{C}^n$  als der Raum der Funktionen  $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  aufgefasst, wobei  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  die Restklassengruppe der Addition ganzer Zahlen modulo  $n$  ist.

2. Ein *Charakter* einer abelschen Gruppe  $G$  ist eine Abbildung

$$\chi : G \rightarrow S^1$$

mit der Eigenschaft

$$\chi(g_1 + g_2) = \chi(g_1) \cdot \chi(g_2).$$

Er ist also ein *Gruppenhomomorphismus*, denn  $S^1$  mit Multiplikation ist selbst eine Gruppe.

- Für  $k \in \mathbb{R}^n$  ist  $\chi_k : \mathbb{R}^n \rightarrow S^1$  mit  $\chi_k(x) := \exp(-2\pi i k \cdot x)$  ein Gruppencharakter.
- Entsprechendes gilt für  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $G := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  und

$$\chi_k : G \rightarrow S^1, \quad \chi_k(x) := e^{-2\pi i k x}.$$

- Für  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  sind  $\chi_k$  von der Form

$$\chi_k(x) := \exp(-2\pi i k x/n) \quad (x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

mit  $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  Gruppencharaktere.

In all diesen Fällen ist jeder stetige Gruppencharakter so darstellbar, mit jeweils eindeutigem  $k$ .

3. Die stetigen Gruppencharaktere bilden selbst eine (multiplikativ geschriebene) abelsche Gruppe  $G^*$ , die zu  $G$  *duale Gruppe*.
- Für  $G = \mathbb{R}^n$  ist auch  $G^* \cong \mathbb{R}^n$ . Die Abbildung  $\chi_k \mapsto k$  ist ein Isomorphismus der abelschen Gruppen, denn  $\chi_k \cdot \chi_l = \chi_{k+l}$ .
  - Für  $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  ist  $G^* \cong \mathbb{Z}$  (mit Isomorphismus  $\chi_k \mapsto k$ ).
  - Für  $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  ist  $G^* \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .
4. Die Gruppen wirken durch Verschiebung auf sich selbst, und es gibt bis auf Normierung nur ein unter dieser Verschiebung invariantes Maß, das *Haar-Maß*.
- Für  $G = \mathbb{R}^n$  das Lebesgue-Maß  $\lambda^n$ .
  - Für  $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  das durch das Lebesgue-Maß  $\lambda|_{[0,1]}$  induzierte Maß.
  - Für  $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  das Zählmaß ( $\mu(A) = |A|$  für  $A \subseteq G$ ).

Die Fourier-Transformation bildet nun integrable Funktionen

$$f : G \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{auf Funktionen} \quad \hat{f} : G^* \rightarrow \mathbb{C}$$

ab. Nennt man das Haarsche Maß  $\mu$ , dann kann man die Fourier-Transformation in der Form

$$\hat{f}(k) := \int_G f(x) \chi_k(x) d\mu(x) \quad (k \in G^*)$$

schreiben. Statt auf  $L^1(G, \mu)$  kann man (analog zum Fall  $G = G^* = \mathbb{R}^n$ ) die Fourier-Transformation als unitäre Abbildung  $\mathcal{F} : L^2(G, \mu) \rightarrow L^2(G^*, \mu^*)$  redefinieren.

Die Rechenregeln übertragen sich daher (mit leichten Modifikationen) vom  $\mathbb{R}^n$  auf beliebige (lokalkompakte<sup>25</sup>) abelsche Gruppen  $G$ .

## 7.22 Beispiel (Fourier-Reihe)

Die reelle Funktion

$$f := \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_{[2\pi(j-1/4), 2\pi(j+1/4)]}$$

ist  $2\pi$ -periodisch, kann also als Funktion auf der abelschen Gruppe  $G := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  aufgefasst werden. Da sie beschränkt und stückweise stetig ist, ist  $f \in L^2(G)$ , und ihre *Fourier-Koeffizienten*, d.h. die Werte der Fourier-Transformierten auf

<sup>25</sup>**Definition:** Ein topologischer Raum heißt **lokalkompakt**, wenn jeder Punkt des Raumes eine kompakte Umgebung besitzt.

der dualen Gruppe  $\hat{G} = \mathbb{Z}$ , sind (bei Wahl derjenigen Normierung, für die  $\hat{f}(0)$  der Mittelwert von  $f$  ist)

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-ikx} dx = \begin{cases} 1/2 & , k = 0 \\ \frac{i^{-k} - i^k}{-2\pi i k} & , k \neq 0 \end{cases} .$$

Sie sind also gleich Null, falls  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  gerade ist.

Wegen der Symmetrie  $\hat{f}(-k) = \hat{f}(k)$  gilt für alle Stetigkeitsstellen  $x$  von  $f$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos((2k+1)x) \quad (7.7)$$

mit den Koeffizienten

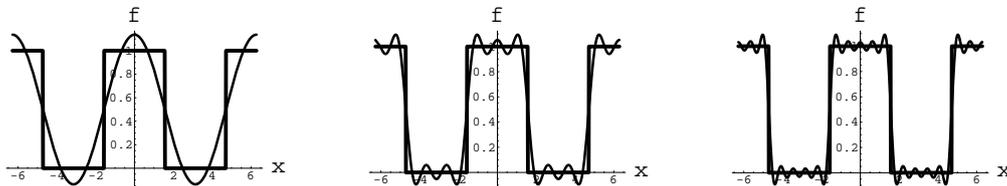
$$a_k = \frac{2(-1)^k}{\pi(2k+1)} .$$

Dies folgt aus einem Satz, der analog zum Umkehrsatz (Satz 7.15) bewiesen wird.

Diese Zusammensetzung von  $f$  aus trigonometrischen Funktionen wird auch *Fourier-Synthese* genannt. Die Partialsummen

$$f_l(x) := \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^l a_k \cos((2k+1)x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

sind für  $l = 0, 2$  und  $4$  zusammen mit  $f$  abgebildet.



Bei den Sprungstellen von  $f$  ist die Reihe (7.7) nicht konvergent, überschießt aber asymptotisch die Pulshöhe um ca. 9 % (sog. *Gibbs-Phänomen*).  $\diamond$

### 7.23 Bemerkung (Numerik der Fourier-Transformation)

In physikalischen Experimenten werden nicht Funktionen gemessen, sondern nur endlich viele Funktionswerte, z.B. in  $n$  äquidistanten Zeitabständen. Will man die gemessene Funktion numerisch fourier-transformieren, dann wendet man auf diesen Vektor von Messwerten die  $n \times n$ -Matrix (7.6) an.

Ist  $n$  die Zahl der Messwerte, dann ist die Zahl der Multiplikationen bei dieser Transformation gleich  $n^2$ . Bei diesen und anderen Anwendungen empfiehlt sich für große  $n$  die Benutzung der sogenannten *Schnellen Fourier-Transformation*, einer Implementierung der Fourier-Transformation auf  $\mathbb{C}^n$  mit nur  $\mathcal{O}(n \log n)$  Multiplikationen.  $\diamond$

## 8 Funktionentheorie

In der Mathematik beschäftigt man sich mit fast nichts anderem als mit Mengen und Abbildungen zwischen ihnen, und oft wird das Wort "Funktion" als Synonym zu "Abbildung" benutzt. *Funktionentheorie* bezeichnet aber eine viel engere Fragestellung, nämlich die nach den Eigenschaften von Funktionen

$$f : D \rightarrow \mathbb{C} \quad , \text{ mit } D \subseteq \mathbb{C} \text{ offen.} \quad (8.1)$$

Treffender wird dieses mathematische Gebiet mit seinem englischen Namen *complex analysis* bezeichnet.

Wir haben den Körper  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen als die Menge  $\mathbb{R}^2$  mit komponentenweiser Addition

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}$$

und Multiplikation<sup>26</sup>

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1b_1 - a_2b_2 \\ a_1b_2 + a_2b_1 \end{pmatrix}$$

kennen gelernt. Das Eins-Element entspricht dem Vektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , während die imaginäre Einheit  $i := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  die Kurzschreibweise  $a = a_1 + ia_2$  ermöglicht. Der Betrag  $|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}| := \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$  einer komplexen Zahl entspricht der Euklidischen Norm des Vektors im  $\mathbb{R}^2$ .

Wir wissen daher, wann eine solche Funktion (8.1) *stetig* ist, nämlich genau dann, wenn ihr Real- und ihr Imaginärteil stetig sind.

Wir wissen auch, wann sie, aufgefasst als Funktion  $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  offen, *differenzierbar* ist, nämlich dann, wenn ihre partiellen Ableitungen  $D_k f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i, k = 1, 2$ ) existieren und stetig sind.

Dann ist die totale Ableitung von der Form

$$Df = \begin{pmatrix} D_1 f_1 & D_2 f_1 \\ D_1 f_2 & D_2 f_2 \end{pmatrix}. \quad (8.2)$$

### 8.1 Holomorphe Funktionen

Hier betrachten wir aber eine speziellere Klasse komplexwertiger Funktionen, nämlich *komplex differenzierbare*:

<sup>26</sup>Identifizieren wir den Punkt  $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$  mit der Matrix  $\begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$ , dann entsprechen die Addition komplexer Zahlen der Addition von Matrizen, die komplexe Konjugation der Transposition und die Multiplikation komplexer Zahlen der Matrixmultiplikation, denn

$$\begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 - a_2b_2 \\ a_1b_2 + a_2b_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & -b_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 - a_2b_2 & -a_1b_2 - a_2b_1 \\ a_1b_2 + a_2b_1 & a_1b_1 - a_2b_2 \end{pmatrix}.$$

**8.1 Definition** • Eine nicht leere offene Teilmenge  $D \subseteq \mathbb{C}$  heißt **Bereich**.

- Einen zusammenhängenden (also nicht als disjunkte Vereinigung  $D = D_1 \dot{\cup} D_2$  von Bereichen darstellbaren) Bereich  $D$  nennt man **Gebiet**.
- Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  auf dem Bereich  $D$  heißt in  $z_0 \in D$  **komplex differenzierbar**, wenn der Limes

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (8.3)$$

existiert.  $f'(z_0)$  heißt dann die **komplexe Ableitung** von  $f$  bei  $z_0$ .

- Ist  $f$  für alle  $z_0 \in D$  komplex differenzierbar, dann heißt  $f$  **holomorph**.
- Die Menge der im Bereich  $D$  holomorphen Funktionen wird mit  $\mathcal{O}(D)$  bezeichnet.

## 8.2 Bemerkungen (Komplexe Ableitung)

1. Der Limes (8.3) muß für beliebige gegen  $z_0$  konvergente Folgen  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $z_n \in D \setminus \{z_0\}$  existieren, darf also insbesondere nicht von der Richtung abhängen, von der aus man sich  $z_0$  nähert.
2. Die aus der reellen Analysis bekannten Rechenregeln (Summen-, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel) gelten ebenso für die komplexe Ableitung.  
Daher bildet  $\mathcal{O}(D)$  einen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum, sogar eine Algebra.
3. Ist der Definitionsbereich ein Gebiet  $D$ , dann können Paare  $x, y \in D$  von Punkten immer durch eine Kurve  $c : [0, 1] \rightarrow D$  verbunden werden, und  $f \in \mathcal{O}(D)$  ist genau dann konstant, wenn die Ableitung verschwindet.  $\diamond$

Komplexe Differenzierbarkeit ist eine stärkere Eigenschaft als reelle Differenzierbarkeit, denn wir können  $z_0$  aus beliebigen Richtungen durch  $z$  annähern. Insbesondere muss für reelle  $\varepsilon$  gelten:

$$D_1 f(z_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \varepsilon) - f(z_0)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + i\varepsilon) - f(z_0)}{i\varepsilon} = -i D_2 f(z_0).$$

Bei getrennter Betrachtung von Real- und Imaginärteil bedeutet dies:

$$\boxed{D_1 f_1(z_0) = D_2 f_2(z_0) \quad , \quad D_1 f_2(z_0) = -D_2 f_1(z_0)} \quad (8.4)$$

oder mit (8.2)

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a := D_1 f_1(z_0) \quad , \quad b := D_1 f_2(z_0). \quad (8.5)$$

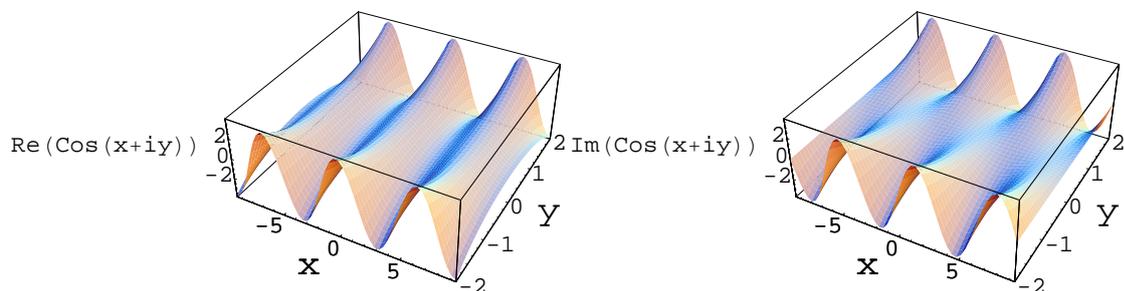


Abbildung 8.1: Real- und Imaginärteil des Cosinus.

Wir können also die komplexe Ableitung einer holomorphen Funktion in der Form

$$f' = D_1 f = -i D_2 f \quad (8.6)$$

schreiben, wobei  $D_1$  die partielle Ableitung nach dem Realteil,  $D_2$  die nach dem Imaginärteil des Argumentes von  $f$  ist.

### 8.3 Beispiele (Holomorphie)

1. Die Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) := \bar{z}$  ist nirgends komplex differenzierbar, denn der Realteil  $f_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  ist von der Form  $f_1(z) = \operatorname{Re}(z)$ , während der Imaginärteil  $f_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  gleich  $f_2(z) = -\operatorname{Im}(z)$  ist. Es ist also

$$D_1 f_1(z_0) = 1 \neq D_2 f_2(z_0) = -1 \quad , \quad D_2 f_1(z_0) = 0 = D_1 f_2(z_0).$$

2. Die durch ihre Potenzreihen  $\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ ,

$$\sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} \mp \dots ,$$

$$\cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} \mp \dots$$

auf ganz  $\mathbb{C}$  definierten Funktionen  $\exp$ ,  $\sin$  und  $\cos$  sind holomorph, denn aus der Identität

$$\exp(z) = \exp(z_1) (\cos(z_2) + i \sin(z_2)) \quad (z = z_1 + iz_2 \in \mathbb{C})$$

folgt  $D_1 \exp = \exp$ ,  $D_2 \exp = i \exp$ , also (8.4), und analog argumentiert man in den anderen Fällen.  $\diamond$

Wir können (8.4) als partielle Differentialgleichungen auffassen, wobei Real- und Imaginärteil von  $z_0 \in D$  die beiden unabhängigen Variablen sind und  $f_1, f_2$  die abhängigen Variablen. Diese Gleichungen heißen die *Cauchy-Riemannsches Differentialgleichungen*.

Wir haben (8.4) gewonnen, indem wir  $z_0$  aus zwei speziellen Richtungen angenähert haben. Es ist also zwar klar, dass die Geltung der Cauchy-Riemannsches Differentialgleichungen notwendig für die Holomorphie von  $f$  sind. In der Tat ist für die Holomorphie von  $f$  aber schon hinreichend, dass (8.4) gilt:

**8.4 Satz** *Eine stetige Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann holomorph, wenn die Cauchy-Riemannsches Differentialgleichungen (8.4) in  $D$  erfüllt sind.*

**Beweis:** • Dass (8.4) notwendig für die Holomorphie ist, haben wir schon gesehen.

• Wir nehmen umgekehrt an, dass (8.4) erfüllt ist. Wir nehmen zusätzlich vereinfachend an, dass nicht nur die partiellen Ableitungen von  $f$  existieren (sonst könnte (8.4) ja nicht gelten), sondern selbst stetig sind. Nach Satz 8.14 der *MP-2* ist damit  $f$  (als reelle Funktion angesehen) total differenzierbar, mit

$$f(z) = f(z_0) + Df(z_0) \cdot (z - z_0) + o(\|z - z_0\|) \quad (z_0 \in D).$$

Fassen wir  $f$  nun wieder als komplexe Funktion auf, dann folgt aus (8.4):

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = D_1 f(z_0) + o(1),$$

also  $f'(z_0) = D_1 f(z_0)$ .

• Tatsächlich muss man nicht die Stetigkeit der partiellen Ableitungen voraussetzen, sondern kann diese aus den Cauchy-Riemannsches Differentialgleichungen folgern. Der Beweis ist aber kompliziert, siehe<sup>27</sup>. □

Die Gestalt (8.5) der komplexen Ableitung von  $f$  lässt sich geometrisch deuten. Ist  $Df(z_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \neq 0$ , dann gilt mit  $d := \sqrt{\det(Df(z_0))} = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $c := a/d$  und  $s := b/d$

$$Df(z_0) = d \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix},$$

die Matrix bewirkt also eine Streckung um den Faktor  $d > 0$  und eine Drehung um den Winkel  $\varphi$  mit  $c = \cos \varphi$ ,  $s = \sin \varphi$ . Unter solchen linearen Abbildungen des  $\mathbb{R}^2$  bleiben Winkel erhalten.

**8.5 Definition** *Eine (reell) differenzierbare Abbildung  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **winkeltreu** oder **konform**, wenn die Bilder  $f \circ c_i$  zweier sich in  $z_0 \in D$  unter einem Winkel  $\alpha$  schneidenden regulären Kurven  $c_k : I_k \rightarrow D$  in  $f(z_0)$  ebenfalls unter dem Winkel  $\alpha$  schneiden.*

<sup>27</sup>D. Menchoff: *Sur la généralisation des conditions de Cauchy-Riemann*. *Fundam. Math.* **25**, 59–97 (1935).

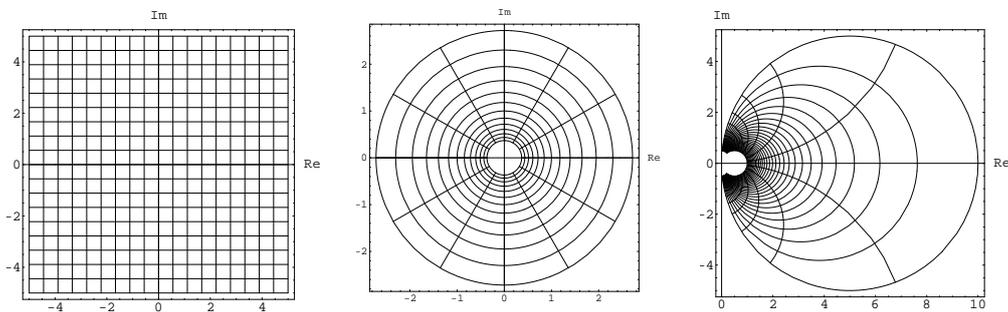


Abbildung 8.2: Bilder des cartesischen Koordinatennetzes (links) unter den konformen Abbildungen  $z \mapsto \exp(z)$  (Mitte) und  $z \mapsto 1/z$  (rechts)

Wir haben damit gesehen:

**8.6 Lemma** Eine holomorphe Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ , deren Ableitung  $f'$  auf  $D$  nicht verschwindet, ist konform.

Also führt sie orthogonale Koordinatensysteme (lokal) wieder in solche über.

### 8.7 Beispiele (Konforme Abbildungen)

1. Für  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  besitzt die holomorphe Abbildung  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto z^n$  bei  $0 \in \mathbb{C}$  die Ableitung 0. Die Winkel zwischen den radialen Kurven

$$c_\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad c_\varphi(t) := t \exp(i\varphi) \quad (\varphi \in [0, 2\pi))$$

werden unter  $f$  mit  $n$  multipliziert.  $f$  ist also nicht konform, und wir sehen, dass wir die Bedingung  $f' \neq 0$  im Lemma nicht weglassen dürfen.

2. Die Exponentialfunktion ist konform und führt die Niveaulinien  $\operatorname{Re}(z) = \text{konst.}$  bzw.  $\operatorname{Im}(z) = \text{konst.}$  des cartesischen Koordinatensystems in konzentrische Kreise bzw. vom Ursprung ausgehende Strahlen, also die Niveaulinien des Polarkoordinatensystems über, siehe Abbildung 8.2 (Mitte).
3. Die Funktion  $z \mapsto 1/z$  auf  $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist konform und bildet die Niveaulinien  $\operatorname{Re}(z) = c$  in die Kreise  $\{x + iy \mid c(x^2 + y^2) = x\}$  über, und die Niveaulinien  $\operatorname{Im}(z) = c$  in die Kreise  $\{x + iy \mid c(x^2 + y^2) = -y\}$ . Diese Kreise treffen sich bei der Null, siehe Abbildung 8.2 (rechts).  $\diamond$

**8.8 Beispiel (inkompressible Flüssigkeit)** Es sei  $f = f_1 + if_2$  eine holomorphe Funktion auf dem Gebiet  $D$ . Wir werden noch sehen, dass damit  $f$  beliebig oft differenzierbar ist. Wegen (8.6) gilt  $f' = D_1 f$ , also  $v := \overline{f'} =$

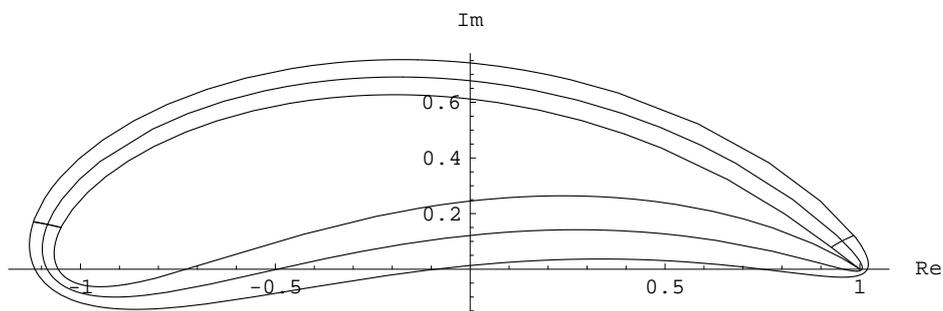


Abbildung 8.3: Laminar umströmtes Joukowski-Tragflächenprofil; dieses ist Bild eines Kreises unter  $z \mapsto z + 1/z$ .

◇

$D_1 \bar{f}$ . Wir fassen  $v = v_1 + iv_2 : D \rightarrow \mathbb{C}$  als *Geschwindigkeitsfeld*  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  auf.  $f$  wird komplexes *Potential* genannt. Wegen der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen (8.4) ist

$$\operatorname{div}(v) = D_1 v_1 + D_2 v_2 = D_1 D_1 f_1 - D_2 D_1 f_2 = D_1 D_2 f_2 - D_1 D_2 f_2 = 0,$$

das Geschwindigkeitsfeld also *divergenzfrei*, und eine sich mit dieser Geschwindigkeit bewegende Flüssigkeit wird nicht komprimiert. Gleichzeitig gilt

$$\operatorname{rot}(v) = D_1 v_2 - D_2 v_1 = -D_1 D_1 f_2 - D_2 D_1 f_1 = D_1 D_2 f_1 - D_2 D_1 f_1 = 0,$$

das Geschwindigkeitsfeld ist also *wirbelfrei*. Die Differentialgleichung  $\dot{x} = v(x)$  lässt sich nun lösen, denn die Richtungsableitung von  $f_2$  verschwindet,  $f_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist also entlang der Lösungskurven konstant. Wegen  $D_2 f_2 = D_1 f_1$  ist ja

$$\partial_v f_2 = \langle v, D f_2 \rangle = v_1 D_1 f_2 + v_2 D_2 f_2 = (D_1 f_1)(D_1 f_2) - (D_1 f_2)(D_2 f_2) = 0.$$

Unter Verwendung der konformen Abbildung  $z \mapsto z + 1/z$  konnten Kutta und Joukowski Anfang des 20. Jahrhunderts damit den Auftrieb eines Tragflügels berechnen (siehe Abbildung 8.3).

## 8.2 Holomorphie von Potenzreihen

Nach der Summen- und der Produktregel ist ein Polynom  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  mit  $a_k \in \mathbb{C}$  holomorph und besitzt die komplexe Ableitung

$$f'(z) = \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1}.$$

Aus der *Analysis I* [An1] wissen wir andererseits, dass Potenzreihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  mit Koeffizienten  $a_k \in \mathbb{C}$  auf einer offenen Kreisscheibe  $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$  absolut konvergieren, wobei  $r$  der Konvergenzradius ist.

Wir nehmen an, dass  $r > 0$  ist und erhalten so eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ .

**8.9 Satz** Die Potenzreihe  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  ist holomorph, und  $f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$ .

**Beweis:**

- Zunächst ist die offene Kreisscheibe  $D$  ein Gebiet, wie bei Holomorphie vorausgesetzt.
- Wir können  $f$  zunächst ohne Konvergenzbetrachtung gliedweise differenzieren, und es gilt im Sinn formaler Potenzreihen  $f' = g$  mit

$$g(z) := \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}.$$

Für  $z_0 \in D$  ist dies aber auch der Limes  $f'(z_0)$  des Differenzenquotienten. Sei nämlich auch  $z$  in  $D$ . Dann ist wegen absoluter Konvergenz

$$f(z) - f(z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z^k - z_0^k) = (z - z_0) \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k(z) \quad (8.7)$$

mit  $b_k(z) := \sum_{\ell=0}^{k-1} z_0^\ell z^{k-1-\ell}$ .

- Wenn wir gezeigt haben, dass der Differenzenquotient

$$h(z) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

in (8.7) bei  $z_0$  stetig ist, folgt die komplexe Differenzierbarkeit von  $f$  im Punkt  $z_0$ , mit  $f'(z_0) = g(z_0)$ , denn wegen  $b_k(z_0) = k z_0^{k-1}$  ist  $h(z_0) = g(z_0)$ .

- Dazu wählen wir einen Radius  $R \in (|z_0|, r)$  und schließen aus

$$|b_k(z)| \leq k R^{k-1} \quad (|z| \leq R)$$

die gleichmäßige Konvergenz auf dieser Kreisscheibe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{|z| \leq R} |a_n b_n(z)| < \infty.$$

Dies impliziert aber die Stetigkeit von  $h$ . □

Da viele praktisch vorkommende reelle Funktionen als konvergente (reelle) Potenzreihen dargestellt werden können, haben wir nun eine große Klasse holomorpher Funktionen zur Verfügung, siehe Bsp. 8.3.2. Dabei müssen wir nicht zwingend den Entwicklungspunkt der Potenzreihenentwicklung gleich Null wählen.

Es wird sich herausstellen, dass diese Ausweitung des Definitionsbereiches vom Reellen ins Komplexe auch dann von Interesse sein kann, wenn man nur an der reellen Funktion selbst interessiert ist. Ein Beispiel ist die Berechnung uneigentlicher Integrale (wie z.B.  $\int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$ ).

### 8.3 Integration holomorpher Funktionen

Für eine stetige Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  auf dem Bereich  $D$  und eine stückweise glatte Kurve  $c : I \rightarrow D$  definieren wir nun das komplexe Kurvenintegral

$$\int_c f(z) dz := \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(c(t)) \dot{c}(t) dt. \quad (8.8)$$

Dies ist eine komplexe Zahl, welche von der Wahl der Zerlegung von  $I = [t_0, t_k]$  in Teilintervalle  $[t_{j-1}, t_j]$  unabhängig ist, wenn  $c|_{[t_{j-1}, t_j]}$  stetig differenzierbar ist.

**8.10 Beispiel** Für  $I := [0, 2\pi]$  und  $c(t) := \exp(it)$  ist die Spur der Kurve  $c : I \rightarrow \mathbb{C}$  eine Kreislinie. Für  $k \in \mathbb{Z}$  und  $f_k : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f_k(z) := z^k$  ist

$$\int_c f_k(z) dz = \int_0^{2\pi} i \exp(i(k+1)t) dt = \begin{cases} 0 & , k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \\ 2\pi i & , k = -1. \end{cases}$$

Im vorliegenden Beispiel ist  $D = \mathbb{C}^*$  zwar ein Gebiet, aber es ist nicht einfach zusammenhängend (siehe Bemerkung 6.21). Wir wollen nun zeigen, dass auf einfach zusammenhängenden Gebieten  $D$  das Wegintegral einer *holomorphen* Funktion  $f \in \mathcal{O}(D)$  nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges abhängt. Dazu zeigen wir die Existenz einer Stammfunktion von  $f$ . Der Integrand  $f(z) dz$  lässt sich nämlich bei Zerlegung  $f = f_1 + if_2$ ,  $z = z_1 + iz_2$  von Funktion und Argument als *geschlossene* komplexwertige Eins-Form auffassen:

$$F := f dz = F_1 + iF_2 \quad \text{mit} \quad F_1 := f_1 dz_1 - f_2 dz_2, \quad F_2 := f_2 dz_1 + f_1 dz_2. \quad (8.9)$$

### 8.11 Bemerkung (Komplexwertige Differentialformen)

Wir führen komplexwertige Differentialformen auf der offenen Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  durch Komplexifizierung  $\Omega^*(U) \otimes \mathbb{C}$  des  $\mathbb{R}$ -Vektorraumes  $\Omega^*(U)$  aus (1.2) ein.

Eine komplexe  $k$ -Form  $\omega \in \Omega^k(U) \otimes \mathbb{C}$  lässt sich also eindeutig in der Form  $\omega = \omega_1 + i\omega_2$  mit  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(U)$  schreiben.

Für  $\omega \in \Omega^k(U) \otimes \mathbb{C}$  und  $\varphi \in \Omega^\ell(U) \otimes \mathbb{C}$  gelten die Rechenregeln

$$\begin{aligned} \omega + \varphi &:= (\omega_1 + \varphi_1) + i(\omega_2 + \varphi_2), \\ \omega \wedge \varphi &:= (\omega_1 \wedge \varphi_1 - \omega_2 \wedge \varphi_2) + i(\omega_1 \wedge \varphi_2 + \omega_2 \wedge \varphi_1), \\ d\omega &:= d\omega_1 + i d\omega_2 \end{aligned}$$

und  $\int_M \omega := \int_M \omega_1 + i \int_M \omega_2$  für eine Mannigfaltigkeit  $M$  mit  $\dim(M) = k$ .  $\diamond$

**8.12 Lemma** Die Eins-Form  $F$  aus (8.9) ist geschlossen:  $dF = 0$ .

**Beweis:** Unter Benutzung der Cauchy-Riemann-Gleichungen (8.4) ist

$$\begin{aligned} dF_1 &= (df_1) \wedge dz_1 - (df_2) \wedge dz_2 = (D_2 f_1 dz_2) \wedge dz_1 - (D_1 f_2 dz_1) \wedge dz_2 \\ &= -(D_2 f_1 + D_1 f_2) dz_1 \wedge dz_2 = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} dF_2 &= (df_2) \wedge dz_1 + (df_1) \wedge dz_2 = (D_2 f_2 dz_2) \wedge dz_1 + (D_1 f_1 dz_1) \wedge dz_2 \\ &= (D_1 f_1 - D_2 f_2) dz_1 \wedge dz_2 = 0. \end{aligned}$$

Damit ist auch  $dF = dF_1 + i dF_2 = 0$ . □

Nach dem Poincaré-Lemma 6.20 existiert also für einfach zusammenhängende Gebiete  $D$  eine Stammfunktion  $G$  mit  $dG = F$ .

**Zur Erinnerung:** Eine Kurve  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *geschlossen*, wenn  $c(b) = c(a)$  gilt, *konstant*, wenn  $c(t) = c(a)$  für alle  $t \in [a, b]$  ist.

Analog zu Definition 6.15 definieren wir nun den Begriff der Homotopie *geschlossener* Kurven. Es sei dazu  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ .

**8.13 Definition** • Zwei geschlossene Kurven  $c_0, c_1 : [a, b] \rightarrow U$  heißen **homotop**, wenn es eine stetige Abbildung  $h : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow U$  gibt mit

$$h|_{[a,b] \times \{k\}} = c_k \quad (k = 0, 1) \quad \text{und} \quad h(a, s) = h(b, s) \quad (s \in [0, 1]).$$

$h$  heißt dann **Homotopie** von  $c_0$  nach  $c_1$ .

- Eine geschlossene Kurve  $c : [a, b] \rightarrow U$  heißt **nullhomotop**, wenn  $c$  homotop zu einer konstanten Kurve ist.

### 8.14 Bemerkungen (Geschlossene Kurven)

1. Anschaulich wird also durch  $h$  die geschlossene Kurve  $c_0$  stetig in  $c_1$  deformiert. Setzt man nämlich für  $s \in [0, 1]$

$$c_s : [a, b] \rightarrow U \quad , \quad c_s(t) := h(t, s),$$

dann sind die  $c_s$  geschlossene Kurven, deren Definition für  $s = 0$  und  $s = 1$  mit den Ausgangskurven übereinstimmt. Es wird aber (im Gegensatz zu Bem. 6.16) nicht die Konstanz von  $c_s(a) = c_s(b)$  gefordert.

2. Homotopie geschlossener Kurven ist wieder eine Äquivalenzrelation.
3. Für Kurvenintegrale bezüglich einer geschlossenen Kurve  $c$  verwendet man oft das Zeichen  $\oint_c f(z) dz$ . ◇

**8.15 Satz** *Es sei  $f$  holomorph auf dem Gebiet  $D \subseteq \mathbb{C}$ , und die glatten geschlossenen Kurven  $c_0, c_1 : [a, b] \rightarrow D$  seien homotop. Dann gilt*

$$\oint_{c_0} f(z) dz = \oint_{c_1} f(z) dz.$$

**Beweis:**

• Wir argumentieren analog zum Beweis von Satz 6.18 und nehmen o.B.d.A. an, dass die Homotopie  $h : \tilde{U} \rightarrow D$  von  $c_0$  nach  $c_1$  (mit  $\tilde{U} := [a, b] \times [0, 1]$ ) stetig differenzierbar ist. Da nach Lemma 8.12 die 1-Form  $F = f dz$  geschlossen ist, gibt es eine Funktion  $\varphi : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$h^*F = d\varphi.$$

• Den Rand  $\partial\tilde{U}$  parametrisieren wir wieder durch

$$\tilde{c}_k : [a, b] \rightarrow \partial\tilde{U} \quad , \quad \tilde{c}_k(t) := (t, k) \quad (k = 0, 1)$$

und  $\tilde{r}_a, \tilde{r}_b : [a, b] \rightarrow \partial\tilde{U}$ ,  $\tilde{r}_a(s) := (a, s)$ ,  $\tilde{r}_b(s) := (b, s)$ .

Wegen  $h(a, s) = h(b, s)$  ist  $\int_{\tilde{r}_a} d\varphi = \int_{\tilde{r}_b} d\varphi$ , also wegen des Satzes von Stokes auch  $\int_{\tilde{c}_0} d\varphi = \int_{\tilde{c}_1} d\varphi$ . Wegen  $\int_{\tilde{c}_k} d\varphi = \int_{\tilde{c}_k} h^*F = \oint_{\tilde{c}_k} F$ , ( $k = 0, 1$ ) folgt daraus die Behauptung.  $\square$

Eigentlich nur ein Korollar dieser Aussage ist der in der Funktionentheorie zentrale *Cauchysche Integralsatz*:

**8.16 Satz (Cauchy)** *Es sei  $f$  holomorph auf dem Gebiet  $D \subseteq \mathbb{C}$  und die glatte geschlossene Kurve  $c : [a, b] \rightarrow D$  nullhomotop. Dann gilt*

$$\oint_c f(z) dz = 0.$$

**Beweis:**

Nach Voraussetzung ist  $c$  homotop zu einer konstanten Kurve  $\hat{c}$ . Für diese verschwindet das Kurvenintegral  $\oint_{\hat{c}} f(z) dz$ . Nach dem vorausgegangenen Satz ist aber  $\oint_c f(z) dz = \oint_{\hat{c}} f(z) dz$ .  $\square$

**8.17 Satz (Integralformel von Cauchy)** *Es sei  $f \in \mathcal{O}(D)$ , und für  $z_0 \in D$ ,  $r > 0$  liege die Kreisscheibe  $B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$  in  $D$ .*

*Dann gilt für jede zum orientierten Rand von  $B_r(z_0)$  in  $D \setminus \{z_0\}$  homotope glatte geschlossene Kurve  $c : [a, b] \rightarrow D \setminus \{z_0\}$*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

**Beweis:** • Wir bezeichnen mit

$$\tilde{c}_s : [a, b] \rightarrow D \setminus \{z_0\} \quad , \quad \tilde{c}_s(t) := z_0 + s \exp\left(\frac{2\pi i}{b-a} t\right) \quad (s \in (0, r))$$

die geschlossenen kreisförmigen Kurven vom Radius  $s$  um  $z_0$ .

Nach Voraussetzung ist  $c$  zu  $\tilde{c}_r$  homotop, also nach Satz 8.15 auch

$$\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{\tilde{c}_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

- Aber auch die geschlossenen Kurven  $\tilde{c}_r$  und  $\tilde{c}_s$  sind zueinander in  $D \setminus \{z_0\}$  homotop, weswegen gilt

$$\oint_{\tilde{c}_s} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{\tilde{c}_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (s \in (0, r]).$$

Wir berechnen jetzt den Limes  $s \searrow 0$  von

$$\oint_{\tilde{c}_s} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (8.10)$$

- Dazu zerlegen wir (8.10) in die Summe  $I_s + II_s$ , mit

$$I_s := f(z_0) \oint_{\tilde{c}_s} \frac{1}{z - z_0} dz \quad \text{und} \quad II_s := \oint_{\tilde{c}_s} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz.$$

Das erste Integral ist mit der Parametrisierung  $\tilde{c}_s(t) = z_0 + s \exp\left(\frac{2\pi i}{b-a}t\right)$  von der Form

$$I_s = f(z_0) \int_a^b \frac{d\left(s \exp\left(\frac{2\pi i}{b-a}t\right)\right)/dt}{s \exp\left(\frac{2\pi i}{b-a}t\right)} dt = f(z_0) \int_a^b \frac{2\pi i}{b-a} dt = 2\pi i f(z_0).$$

Den Integranden von  $II_s$  können wir betragsmäßig in der Form  $|f'(z_0)| + o(s^0)$  abschätzen, dieser Differenzenquotient ist also insbesondere als Funktion von  $z$  in  $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$  beschränkt. Da für  $s \searrow 0$  die Länge der Kurve  $\tilde{c}_s$  gegen Null geht, folgt daraus  $\lim_{s \searrow 0} II_s = 0$ .

- Zusammenfassend ergibt sich

$$\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \lim_{s \searrow 0} I(s) = 2\pi i f(z_0),$$

also die Integralformel von Cauchy. □

Oft wird die Cauchy-Formel in der folgenden Form notiert, bei der das Argument von  $f$  innerhalb der geschlossenen Kurve variiert werden kann.

**8.18 Korollar (Integralformel von Cauchy)** Wird  $r > 0$  für  $f \in \mathcal{O}(D)$  und  $z_0 \in D$  so gewählt, dass  $B_r(z_0) \subset D$ , dann gilt für die Kreiskurve

$$c: [0, 1] \rightarrow B_r(z_0) \quad , \quad c(t) := z_0 + r \exp(2\pi i t)$$

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(w)}{w - z} dw} \quad (z \in U_r(z_0)).$$

**Beweis:** Für alle  $z \in U_r(z_0)$  ist die parametrisierte Kreislinie  $\partial B_r(z_0)$  in  $D \setminus \{z\}$  homotop zu jeder um  $z$  konzentrischen parametrisierten Kreislinie, die ganz in  $B_r(z_0)$  liegt. □

Diese funktionentheoretische Aussage hat nun kein Analogon in der reellen Analysis.

Als Folgerung gilt: Holomorphe, also einmal komplex differenzierbare Funktionen sind unendlich oft komplex differenzierbar!

**8.19 Satz**  $f \in \mathcal{O}(D)$  ist beliebig oft komplex differenzierbar. Wird für  $z_0 \in D$   $r > 0$  so klein gewählt, dass  $B_r(z_0) \subset D$  gilt, dann gilt für die  $n$ -te Ableitung

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_c \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw \quad (z \in U_r(z_0)), \quad (8.11)$$

mit der Kreiskurve  $t \mapsto c(t) := z_0 + r \exp(2\pi i t)$ ,  $t \in [0, 1]$ .

**Beweis:** • Der Fall  $n = 0$  entspricht dem Korollar 8.18.

• Der Integrand in der Cauchyschen Integralformel ist beliebig oft komplex nach  $z$  differenzierbar, mit

$$\frac{d^n}{dz^n} \frac{f(w)}{w-z} = n! \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}.$$

• Es ist also nur zu zeigen, dass wir die Ableitung nach  $z$  unter das Integral ziehen können. Dies lässt sich aber analog zum in Kapitel 8.8 der *MP-2* behandelten Fall reeller parameterabhängiger Integrale zeigen.  $\square$

Wir werden nun sehen, dass wir mittels dieser Formel die holomorphe Funktion  $f$  als Potenzreihe darstellen können.

Wir erinnern an die Formel von Cauchy-Hadamard

$$r = \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}$$

für den Konvergenzradius  $r \in [0, \infty]$  der Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  mit Koeffizienten  $a_k \in \mathbb{C}$  und Entwicklungspunkt  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Innerhalb der offenen Kreisscheibe um  $z_0$  mit dem Radius  $r$  konvergiert die Potenzreihe, außerhalb divergiert sie.

**8.20 Definition** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  auf dem Bereich  $D$  heißt **analytisch**, wenn für alle  $z_0 \in D$  eine Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  und ein  $R > 0$  existieren mit

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (z \in U_R(z_0)). \quad (8.12)$$

Natürlich hängen die Koeffizienten  $a_k \in \mathbb{C}$  in (8.12) von der Wahl von  $z_0$  ab.

**8.21 Satz** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  auf dem Bereich  $D$  ist genau dann analytisch, wenn sie holomorph ist.

**Beweis:** • Ist  $f$  analytisch, dann ist nach Satz 8.9  $f$  holomorph.

• Ist  $f$  dagegen holomorph, dann setzen wir im Entwicklungspunkt  $z_0 \in D$  die Koeffizienten  $a_k := \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$  ( $k \in \mathbb{N}_0$ ). Aus Formel (8.11) erhalten wir die Abschätzung

$$|a_k| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \oint_c \frac{f(z)}{|z - z_0|^{k+1}} dz \right| \leq \frac{1}{r^k} \sup\{|f(z)| \mid z \in B_r(z_0)\},$$

denn für  $z = c(t) = z_0 + re^{it}$  ist  $|z - z_0| = r$ . Nun ist  $f$  auf der abgeschlossenen Kreisscheibe  $B_r(z_0)$  beschränkt, denn diese ist kompakt und  $f$  ist stetig. Es gibt damit ein  $C > 0$  mit  $|a_k| \leq \frac{C}{r^k}$ . Die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  hat damit mindestens den Konvergenzradius  $r > 0$ .

• Tatsächlich konvergiert die Taylor-Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  von  $f$  auch auf  $B_r(z_0)$  gegen  $f$ . Dazu entwickeln wir den Faktor  $(w - z)^{-1}$  in Korollar 8.18 in eine geometrische Reihe:

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \frac{1}{w - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^k \quad (z \in U_r(z_0)).$$

Diese konvergiert wegen  $|z - z_0| < r = |w - z_0|$ , und wir erhalten unter Verwendung von (8.11) für  $z \in U_r(z_0)$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(w)}{(w - z_0)^k} dw \right) (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

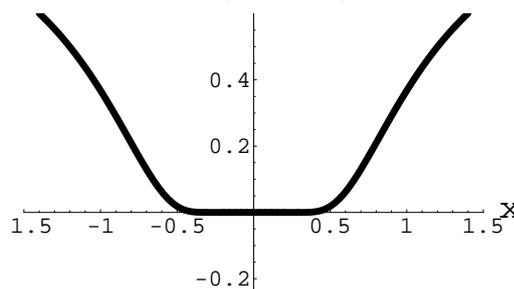
□

Während also holomorphe, d.h. *komplex* differenzbare Funktionen mit ihrer Taylor-Reihe übereinstimmen, ist dies für *reelle* beliebig oft differenzierbare Funktionen nicht der Fall:

**8.22 Bemerkung** Wie in FORSTER [Fo], (22.2) gezeigt, besitzt die Funktion  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\exp(-1/x^2)$

$$f(x) := \begin{cases} \exp(-1/x^2) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

im Entwicklungspunkt  $a = 0$  die Taylor-Reihe  $T_0 f = 0$ . Damit ist für alle  $x \neq 0$  der Wert  $T_0 f(x) = 0$  ungleich  $f(x)$ .



Dieses auf Cauchy zurückgehende Beispiel zeigt also, dass nicht jede glatte Funktion mit ihrer Taylor-Reihe übereinstimmt. ◇

Eine auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorphe Funktion heißt *ganz*.

**8.23 Satz (Liouville)** *Ist eine ganze Funktion beschränkt, dann ist sie konstant.*

**Beweis:** Nach Voraussetzung gibt es für die ganze beschränkte Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ein  $M > 0$  mit  $|f(z)| < M$  ( $z \in \mathbb{C}$ ). Damit ist für alle  $r > 0$

$$|f^{(n)}(0)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right| \leq Mn! r^{-n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

also  $f^{(n)}(0) = 0$ .

Daraus folgt mit Satz 8.21, dass  $f(z)$  gleich ihrer Taylor-Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0)$  ist.  $\square$

**8.24 Beispiel** Die Cosinus-Funktion ist ganz. Zwar ist sie auf  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  beschränkt, aber wegen  $\cos(iz) = \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$  ist sie auf  $\mathbb{C}$  unbeschränkt.  $\diamond$

**8.25 Satz (Fundamentalsatz der Algebra)** Ist das Polynom  $p \in \mathbb{C}[x]$  vom Grad  $\deg(p) \geq 1$ , dann besitzt es eine Nullstelle.

**Beweis:** Sonst wäre  $f := 1/p$  ganz, und es würde für  $n := \deg(p)$  und  $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  gelten

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \frac{1}{\lim_{z \rightarrow \infty} p(z)} = \left( \lim_{z \rightarrow \infty} a_n z^n \left( 1 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{k-n} \right) \right)^{-1} = 0.$$

Damit wäre  $f$  eine beschränkte ganze Funktion, also nach dem Satz von Liouville konstant.  $\square$

## 8.4 Der Residuensatz

Rationale Funktionen  $f \in \mathbb{C}(x)$ ,  $f = p/q$  mit Polynomen  $p, q \in \mathbb{C}[x]$  sind holomorph auf  $D := \{z \in \mathbb{C} \mid q(z) \neq 0\}$ . Für jeden Punkt  $z_0 \in D$  können wir sie also in eine Potenzreihe entwickeln, und (für teilerfremde  $p, q$ ) ist deren Konvergenzradius gleich  $\text{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus D) = \inf\{|z - z_0| \mid z \in \mathbb{C} \setminus D\}$ .

Dagegen divergiert  $f$  in der Nähe einer Nullstelle  $z_0$  des Nenners  $q$ , und statt einer Potenzreihenentwicklung empfiehlt sich die Entwicklung von  $f$  in eine sog. Laurentreihe

$$\sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

### 8.26 Definition

- $z_0 \in \partial D$  heißt **isolierte Singularität** von  $f \in \mathcal{O}(D)$ , wenn für die punktierten Kreisscheiben  $\dot{B}_r(z_0) := B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$  mit kleinen Radien  $r > 0$  gilt:

$$\dot{B}_r(z_0) \subset D.$$

- Gibt es ein  $m \in \mathbb{N}_0$ , sodass auf  $\dot{B}_r(z_0)$  die Funktion  $z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$  beschränkt ist, heißt die isolierte Singularität  $z_0 \in \partial D$  **unwesentlich**, sonst **wesentlich**.
- Ist  $z_0 \in \partial D$  eine unwesentliche Singularität von  $f$ , dann heißt das kleinste solche  $m$  die **Ordnung** der Singularität  $z_0$ , und zwar heißt  $z_0$  für  $m = 0$  **hebbar** und für  $m > 0$  **Pol  $m$ -ter Ordnung** von  $f$ .

**8.27 Beispiele** 1. Die rationale Funktion  $f = p/q \in \mathbb{C}(x)$  besitzt die Nullstellen des Nennerpolynoms  $q$  als isolierte Singularitäten. Für  $q(z_0) = 0$  gibt es ein eindeutiges  $n \in \mathbb{N}$  mit  $q(z) = (z - z_0)^n \tilde{q}(z)$  und  $\tilde{q}(z_0) \in \mathbb{C}^*$ . Ähnlich schreiben wir für  $m \in \mathbb{N}_0$  das Zählerpolynom in der Form  $p(z) = (z - z_0)^m \tilde{p}(z)$  mit  $\tilde{p}(z_0) \in \mathbb{C}^*$ . Dann ist für  $m - n \geq 0$  die Singularität  $z_0$  von  $f_i$  hebbar, und sonst ist  $z_0$  ein Pol  $(n - m)$ -ter Ordnung von  $f$ .

2. Wir fassen die Funktion  $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \exp(-1/x^2)$  aus Bemerkung 8.22 als Restriktion der holomorphen Funktion

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \exp(-z^{-2})$$

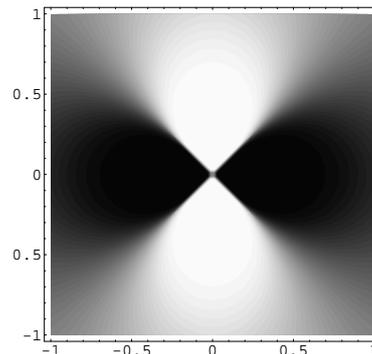
auf.  $z_0 = 0$  ist isolierte Singularität von  $f$ . Diese ist wesentlich, denn wegen

$$\exp(-z^{-2}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-1}{z^2}\right)^k}{k!}$$

gilt für  $z := iy$  und beliebige  $m \in \mathbb{N}_0$

$$z^m \exp(-z^{-2}) = i^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{m-2k}}{k!},$$

was für  $y \in (0, 1)$  im Limes  $y \searrow 0$  divergiert, während für reelle  $x$  gilt:  
 $\lim_{x \searrow 0} f(x) = 0$ .



Contourplot des Betrags der holomorphen Funktion

$$z \mapsto \exp(-z^{-2}).$$

Schwarz: kleine Werte

Während im ersten Beispiel die rationale Funktion für  $z \rightarrow z_0$  einem Grenzwert zustrebt (hebbarer Singularität) bzw. gegen  $\infty$  divergiert (Pol), nimmt die Funktion im zweiten Beispiel in jeder Umgebung der wesentlichen Singularität sowohl beliebig kleine wie auch beliebig große Werte an.

Genauer gilt ganz allgemein:

**8.28 Satz (Casorati-Weierstraß)** <sup>28</sup> Ist  $z_0$  isolierte Singularität von  $f \in \mathcal{O}(D)$ ,

<sup>28</sup>Die erste Aussage des Satzes findet man in der Literatur unter dem Namen "Riemannscher Hebbbarkeitssatz".

dann gilt:

1.  $z_0$  hebbbar  $\iff \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C}$
2.  $z_0$  Pol  $\iff \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$
3.  $z_0$  wesentliche Singularität  $\iff$  Für alle  $c \in \mathbb{C}$  gibt es eine gegen  $z_0$  konvergierende Folge  $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = c$ .

**Beweis:** 0. Wenn  $z_0$  eine isolierte Singularität ist, dann gibt es ein  $R > 0$  mit  $\dot{B}_R(z_0) \subseteq D$ .

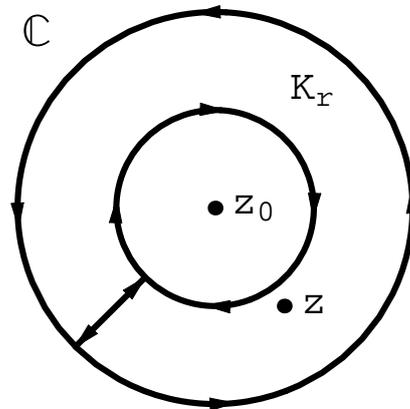
Für alle  $r \in (0, R)$  ist  $K_r := U_R(z_0) \setminus B_r(z_0)$  ein um  $z_0$  zentrierter offener Kreisring.

Wir benutzen die Cauchysche Integralformel, um  $f$  auf  $K_r$  darzustellen. Zwar ist  $K_r$  nicht einfach zusammenhängend, trotzdem gilt

$$f(z) = I_R(z) - I_r(z) \quad (z \in K_r) \quad (8.13)$$

mit Integral  $I_\rho(z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=\rho} \frac{f(w)}{w-z} dw$ .

Denn wir können die gegenläufig orientierten Randkurven von  $K_r$  durch einen sogenannten *Rückkehrrschritt* (einem Paar gegenläufig parametrisierter Kurven gleicher Spur) zu einer in  $D$  nullhomotopen Kurve ergänzen, siehe Abbildung.



Spur der nullhomotopen Kurve

1. In Wirklichkeit ist aber für eine hebbare Singularität in (8.13) das Integral  $I_r(z) = 0$ , denn für  $r \rightarrow 0$  muss es  $r$ -unabhängig sein, und für  $M := \sup\{|f(w)| \mid w \in \dot{B}_R(z_0)\}$  ist

$$\begin{aligned} |I_r(z)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw \right| \leq \\ &\leq \frac{Mr}{\inf\{|w-z| \mid |w-z_0|=r\}} = \frac{Mr}{|z-z_0|-r} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Die Funktion  $I_R$  ist aber auf ganz  $U_R(z_0)$  holomorph.

Umgekehrt folgt aus der Existenz von  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C}$  die Beschränktheit bei  $z_0$ .

2. Ist  $z_0$  ein Pol  $m$ -ter Ordnung von  $f$ , dann ist  $z_0$  eine hebbare Singularität der Funktion  $z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$ , und damit divergiert  $f$  bei  $z_0$  wie  $(z - z_0)^{-m}$ .
3. Falls es ein  $c \in \mathbb{C}$  gibt, das sich nicht in der Form  $c = \lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k)$  für eine gegen  $z_0$  konvergierende Folge  $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$  schreiben lässt, dann können wir ein  $r > 0$  finden mit

$$\inf_{z \in \dot{B}_r(z_0)} |f(z) - c| > 0.$$

Dann ist  $g : \dot{U}_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g(z) := \frac{1}{f(z)-c}$  holomorph und besitzt eine hebbare Singularität bei  $z_0$ . Damit besitzt auch  $f(z) = c - \frac{1}{g(z)}$  bei  $z_0$  entweder eine hebbare Singularität oder einen Pol, kann also keine wesentliche Singularität von  $f$  sein.

4. Falls  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$  gilt, kann  $z_0$  nach 1. bzw. 3. weder hebbare noch wesentliche Singularität sein, muss also ein Pol sein.  $\square$

In der Nähe *wesentlicher* Singularitäten sehen holomorphe Funktionen also ziemlich wild aus, und wir werden diesen komplizierten Fall nicht weiter betrachten.

*Hebbare* Singularitäten brauchen wir nicht mehr zu berücksichtigen, denn wir haben ja im Beweis des letzten Satzes festgestellt, dass wir die Funktion dort holomorph fortsetzen, also die hebbare Singularität beseitigen können.

Wir werden statt dessen holomorphe Funktionen mit *Polen* betrachten und Wegintegrale berechnen.

Ist  $z_0$  ein Pol  $m$ -ter Ordnung von  $f \in \mathcal{O}(D)$ , dann besitzt, wie soeben bewiesen,  $g(z) := (z - z_0)^m f(z)$  bei  $z_0$  eine holomorphe Fortsetzung mit  $g(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \in \mathbb{C}^*$ . Nach Satz 8.21 ist  $g$  auf  $D \cup \{z_0\}$  analytisch, wir können also  $f$  als sog. *Laurent-Reihe*

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (z \in \dot{U}_r(z_0)) \quad (8.14)$$

mit  $a_k \in \mathbb{C}$  und  $a_{-m} \in \mathbb{C}^*$  darstellen.

**8.29 Definition** Das **Residuum** von  $f \in \mathcal{O}(D)$  in der isolierten Singularität  $z_0$  ist

$$\operatorname{Res}(f, z_0) := \lim_{r \searrow 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} f(z) dz.$$

Wir sehen, dass in obiger Definition das Integral  $r$ -unabhängig ist, wenn nur  $r > 0$  so klein ist, dass  $\dot{B}_r(z_0) \subseteq D$ . Also ist das Residuum wohldefiniert.

Setzt man für  $f$  die Laurent-Reihe (8.14) ein, so stellt man unter Verwendung von Beispiel 8.10 fest, dass gilt:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1}.$$

**8.30 Beispiele** 1. Für  $f(z) := \cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$  ist  $f \in \mathcal{O}(D)$  mit  $D := \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$  (denn Sinus und Cosinus sind ganze Funktionen und die Nullstellenmenge des Sinus ist  $\pi\mathbb{Z}$ , siehe [An1, Satz 10.7.4]).

Wegen der  $\pi$ -Periodizität des Cotangens ist  $\operatorname{Res}(\cot, \pi n) = \operatorname{Res}(\cot, 0)$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ), und es gilt  $\lim_{z \rightarrow 0} \cos(z) = 1$ ,  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1$ , also  $\operatorname{Res}(\cot, 0) = 1$ .

2. Ist  $f = p/q \in \mathbb{C}(x)$  und ist  $z_0$  ein Pol erster Ordnung von  $f$ , dann gilt (für teilerfremde Polynome  $p, q$ )

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{\tilde{q}(z_0)} \quad \text{mit} \quad \tilde{q}(z) := \frac{q(z)}{z - z_0}.$$

Das Residuum misst also die "Stärke des Pols erster Ordnung".

Der folgende Satz gestattet es, die Berechnung eventuell komplizierter Integrale auf die von Residuen zurückzuführen.

**8.31 Satz (Cauchys Residuensatz)** *Es sei  $\tilde{D} \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $S \subseteq \tilde{D}$  eine Teilmenge ohne Häufungspunkt, und  $f \in \mathcal{O}(D)$  für  $D := \tilde{D} \setminus S$ . Dann gilt für jede in  $\tilde{D}$  nullhomotope stückweise glatte geschlossene Kurve  $c : [a, b] \rightarrow D$ :*

$$\oint_c f(z) dz = 2\pi i \sum_{s \in S} \text{Ind}(c, s) \text{Res}(f, s), \quad (8.15)$$

für die **Windungszahl**  $\text{Ind}(c, s)$  der Kurve  $c$  um  $s$

$$\text{Ind}(c, s) := \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{dz}{z - s} \in \mathbb{Z}.$$

### 8.32 Bemerkungen (Windungszahl)

- Die Windungszahl  $\text{Ind}(c, s)$  kann als die Anzahl der Umläufe von  $c$  um  $s$  im (mathematisch positiven) Gegenuhrzeigersinn interpretiert werden. In Polarkoordinaten

$$z - s = r (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = r \exp(i\varphi) \quad , \text{ also } \frac{dz}{dt} = (\dot{r} + ir\dot{\varphi}) \exp(i\varphi)$$

ist nämlich wegen  $c(a) = c(b)$

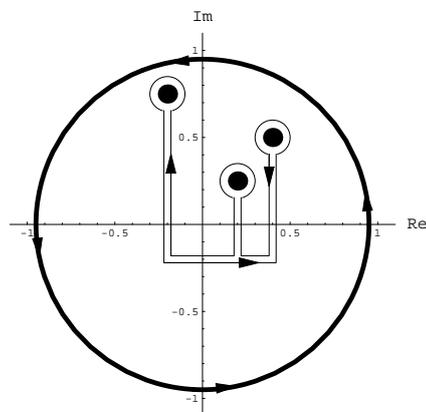
$$\begin{aligned} \oint_c \frac{dz}{z - s} &= \int_a^b \frac{1}{z - s} \frac{dz}{dt} dt = \int_a^b \frac{\exp(-i\varphi)}{r} (\dot{r} + ir\dot{\varphi}) \exp(i\varphi) dt \\ &= \int_a^b \left( \frac{\dot{r}}{r} + i\dot{\varphi} \right) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} \ln(r) dt + i \int_a^b \dot{\varphi} dt = i \int_a^b \dot{\varphi} dt. \end{aligned}$$

- Da  $S$  keine Häufungspunkte hat, ist nur für endlich viele  $s \in S$  die Windungszahl von  $c$  ungleich Null. Also ist die Summe in (8.15) endlich.  $\diamond$

#### Beweis des Residuensatzes:

Die Beweisidee besteht darin, die stückweise glatte geschlossene Kurve  $c : [a, b] \rightarrow D$  in  $\tilde{D}$  in eine ebenfalls stückweise glatte geschlossene Kurve  $\tilde{c} : [a, b] \rightarrow D$  zu deformieren, die aus  $(\text{Ind}(c, s)$ -fach durchlaufenen) Kreisen um die  $s \in S$  mit  $\text{Ind}(c, s) \neq 0$  und Rückkehrsnitten besteht. Letztere tragen zum Integral nicht bei. Der Beitrag des Kreises um  $s$  ist dagegen  $\text{Ind}(c, s) \text{Res}(f, s)$ .

In nebenstehender Skizze ist die Spur der Kurve  $c$  eine Kreislinie, während  $\tilde{c}$  aus Kreisen und polygonalen Rückkehrsnitten besteht. Nur zur Veranschaulichung sind letztere als *nicht* deckungsgleiche Streckenpaare gezeichnet.  $\square$



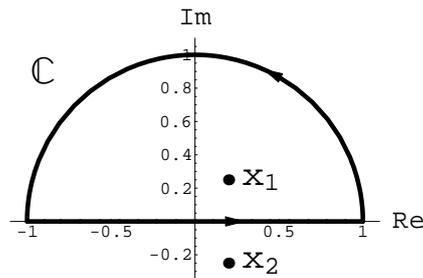
**8.33 Beispiele 1.** Das reelle Polynom  $q(x) := x^2 + ax + b = (x - x_1)(x - x_2)$  sei in  $\mathbb{R}$  nullstellenfrei. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + ax + b} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{4b - a^2}}. \quad (8.16)$$

Denn sei o.B.d.A.  $\text{Im}(x_1) > 0$ , und für  $R > 0$  die geschlossene Kurve  $c_R$  zusammengesetzt aus dem Intervall  $[-R, R]$  und dem Halbkreisbogen

$$\{Re^{it} \mid t \in [0, \pi]\}.$$

Für  $R \rightarrow \infty$  konvergiert das Integral über  $[-R, R]$  gegen (8.16), während das Integral über dem Halbkreisbogen gegen Null geht (denn dessen Länge divergiert wie  $\pi R$ , der Integrand ist aber von der Ordnung  $\mathcal{O}(1/R^2)$ ). Also ist für  $R > 0$ , die groß genug sind, dass die Windungszahl  $\text{Ind}(c_R, x_1) = 1$  ist,



Spur der Kurve  $c_R$  um  $x_1$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + ax + b} dx &= \oint_{c_R} \frac{1}{z^2 + az + b} dz = 2\pi i \text{Res}(1/q, x_1) \\ &= \frac{2\pi i}{x_1 - x_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{4b - a^2}}. \end{aligned}$$

2. Rationale Funktionen von Sinus und Cosinus können wir mithilfe des Residuensatzes von Cauchy über Winkel-Intervalle integrieren, deren Länge ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  ist. Dazu substituieren wir

$$\sin \varphi = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right), \quad \cos \varphi = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \quad \text{mit } z = e^{i\varphi}, \quad \text{also } d\varphi = -i \frac{dz}{z}$$

und erhalten so eine rationale Funktion in  $z$ . Diese integrieren wir über die geschlossene Kurve  $c : [0, 2\pi n] \rightarrow S^1$ ,  $c(\varphi) := e^{i\varphi}$ . Z.B. ist (mit  $n = 1$ )

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\varphi)}{5 - 4\cos(\varphi)} d\varphi = \oint_c \frac{\frac{1}{2}(z^3 + z^{-3})}{5 - 2(z + z^{-1})} \frac{dz}{iz} = \frac{i}{4} \oint_c \frac{z^6 + 1}{z^3(z - \frac{1}{2})(z - 2)} dz.$$

Im Einheitskreis liegen zwei der drei Pole des holomorphen Integranden  $f$ , nämlich bei  $z = 0$  und  $z = \frac{1}{2}$ . Wir berechnen die Residuen, indem wir für  $z = 0$  schreiben (mit  $1/(1+x) = 1 - x + x^2 + \mathcal{O}(x^3)$  und  $x := -\frac{5}{2}z + z^2$ )

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \frac{1 + \mathcal{O}(z^3)}{1 - \frac{5}{2}z + z^2} = \frac{1}{z^3} \left( 1 + \frac{5}{2}z - z^2 + \frac{25}{4}z^2 + \mathcal{O}(z^3) \right),$$

also  $\text{Res}(f, 0) = 21/4$ , und analog bei  $z_0 := \frac{1}{2}$

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{z_0^6 + 1}{z_0^3(z_0 - 2)} = \frac{65/64}{-3/16} = -\frac{65}{12}.$$

Damit ist

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\varphi)}{5 - 4\cos(\varphi)} d\varphi = 2\pi i (\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, 1/2)) = -\frac{2\pi}{4} \left( \frac{21}{4} - \frac{65}{12} \right) = \frac{\pi}{12}. \quad \square$$

## 8.5 Harmonische Funktionen

**8.34 Definition** Eine auf einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^d$  definierte Funktion  $f \in C^2(U, \mathbb{R})$  heißt **harmonisch**, wenn  $\Delta f = 0$ , gilt, also  $f$  eine Lösung der **Laplace-Gleichung** ist.

### 8.35 Beispiele (Harmonische Funktionen)

1. Ist  $f \in \mathbb{R}[x_1, x_2]$  ein Polynom 2. Grades, dann hängt die Frage, ob  $f$  harmonisch ist, nicht von den Monomen vom Grad  $\leq 1$  ab. Wir nehmen also an, dass  $f(x) = \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle$  mit  $A = A^t \in \text{Mat}(2, \mathbb{R})$  gilt. Dann ist  $f$  genau dann harmonisch, wenn  $\text{tr}(A) = 0$  ist. In diesem Fall ist der Graph von  $f$  ein Sattel, dessen Hauptkrümmungen (also die Eigenwerte von  $A$ ) unterschiedliches Vorzeichen aber gleichen Betrag besitzen.
2. Harmonische Funktionen kommen an vielen Stellen der Physik vor: Die **Wärmeleitungsgleichung**  $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x u$  ist eine partielle Differentialgleichung, deren Lösungen  $u : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  die zeitliche Entwicklung der Temperatur am Ort  $x \in \mathbb{R}^d$  beschreibt (wobei ein homogenes Material angenommen wird). Zeitunabhängige Lösungen sind harmonische Funktionen. Ähnlich sind auch elektrostatische Potentiale im ladungsfreien Raum Lösungen der Laplace-Gleichung.  $\diamond$

Wenn der Definitionsbereich der harmonischen Funktionen eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  ist, hängen diese mit holomorphen Funktionen zusammen:

**8.36 Satz 1.** Ist  $f$  holomorph ( $f \in \mathcal{O}(D)$ ) auf dem Bereich  $D \subseteq \mathbb{C}$ , dann sind  $\text{Re}(f)$  und  $\text{Im}(f)$  harmonische Funktionen.

2. Ist der Bereich  $D$  einfach zusammenhängend und  $h \in C^2(D, \mathbb{R})$  harmonisch, dann gibt es ein  $f \in \mathcal{O}(D)$  mit  $h = \text{Re}(f)$ .

**Beweis:**

1. Realteil  $f_1$  und Imaginärteil  $f_2$  von  $f$  erfüllen die Cauchy-Riemann-DGLn (siehe (8.4))

$$D_1 f_1 = D_2 f_2 \quad , \quad D_2 f_1 = -D_1 f_2.$$

Wegen der Holomorphie von  $f$  und Satz 8.19 sind die partiellen Ableitungen vertauschbar:

$$\Delta f_1 = (D_1^2 + D_2^2)f_1 = D_1 D_2 f_2 - D_2 D_1 f_2 = 0 \quad \text{und analog} \quad \Delta f_2 = 0.$$

2. Wir finden zum Realteil  $h$  einen geeigneten Imaginärteil  $g$ .  $\Delta h = 0$  ist gleichbedeutend damit, dass die Eins-Form  $\omega := D_1 h dx_2 - D_2 h dx_1$  geschlossen ist, denn

$$d\omega = (D_1^2 h dx_1) \wedge dx_2 - (D_2^2 h dx_2) \wedge dx_1 = (D_1^2 + D_2^2)h dx_1 \wedge dx_2.$$

Nach der Version 6.20 des Poincaré-Lemmas ist dann  $\omega$  auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet  $D$  exakt, d.h.

$$\omega = dg = D_1 g dx_1 + D_2 g dx_2 \quad \text{mit} \quad g \in C^2(D, \mathbb{R}).$$

Für  $f := h + ig$  ergibt ein Koeffizientenvergleich die Gültigkeit der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen  $D_1 h = D_2 g$ ,  $D_2 h = -D_1 g$  von  $f$ .

Nach Satz 8.4 ist damit  $f \in \mathcal{O}(D)$ . □

**8.37 Definition** Das Gebiet  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  besitze einen glatten Rand  $\partial D$ , und auf diesem sei eine stetige Funktion  $g : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben.

Das **Dirichlet-Problem** besteht darin, stetige  $h : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$  zu finden, mit

1.  $h|_D$  harmonisch,
2.  $h|_{\partial D} = g$ .

Beispielsweise könnte  $g$  eine Temperaturverteilung auf  $\partial D$  sein, und man möchte eine dazu passende Temperaturverteilung  $h$  auf ganz  $\overline{D}$  finden.

Zunächst ist weder klar, ob eine Lösung des Dirichlet-Problems existiert, noch ob sie eindeutig ist. Letzteres ist tatsächlich für nicht beschränkte  $D$  nicht allgemein der Fall.

**8.38 Beispiel** Die Halbebene  $D := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  besitzt die Ordinate  $\partial D = \{0\} \times \mathbb{R}$  als Rand. Ist  $g$  auf  $\partial D$  die Nullfunktion, dann sind für alle  $c \in \mathbb{R}$  die Funktionen

$$h_c : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad h_c(x + iy) := cx$$

Lösungen des Dirichlet-Problems. ◇

Für beschränkte  $D$  ist die Lösung aber wegen des Maximumsprinzips eindeutig.

### 8.39 Satz (Maximumsprinzip)

Ist  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes beschränktes Gebiet mit glattem Rand  $\partial D$ , und  $h : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sowie  $h|_D$  harmonisch. Dann gilt:

1. Es existieren  $z_{\pm} \in \partial D$  mit  $h(z_+) = \max_{z \in \overline{D}} h(z)$  und  $h(z_-) = \min_{z \in \overline{D}} h(z)$ .

2. Besitzt  $h|_D$  eine lokale Maximal- oder Minimalstelle, dann ist  $h$  konstant.

**Beweis:**

1. Maximum und Minimum der stetigen Funktion  $h$  auf der kompakten Menge  $\overline{D}$  werden jedenfalls angenommen. Gäbe es keine Maximalstelle oder Minimalstelle auf dem Rand, dann könnte 2. nicht gelten.

2. • Nach Satz 8.36 ist  $h|_D$  Realteil einer holomorphen Funktion  $f \in \mathcal{O}(D)$ . Diese ist genau dann konstant, wenn  $h$  konstant ist.

• Wegen

$$|\exp(f)| = \exp(\operatorname{Re}(f)) = \exp(h)$$

besitzt  $h$  in  $z_0 \in D$  genau dann ein lokales Maximum, wenn der Betrag der holomorphen Funktion  $F := \exp(f) \in \mathcal{O}(D)$  dort ein lokales Maximum besitzt.

• Nun gilt aber nach Cauchy (Satz 8.17)

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{F(z)}{z-z_0} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi,$$

$F(z_0)$  ist also Integralmittel von  $F$  auf der Kreislinie um  $z_0$ . Damit kann  $|F|$  in  $z_0$  nur dann ein lokales Maximum besitzen, wenn  $F$  konstant ist.

• Analog argumentiert man für das Minimum. □

**8.40 Korollar** *Das Dirichlet-Problem auf einem beschränkten Gebiet besitzt höchstens eine Lösung.*

**Beweis:** Sind  $h_1$  und  $h_2$  Lösungen, dann ist  $h := h_1 - h_2 : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$  eine auf  $D$  harmonische Funktion, die auf  $\partial D$  verschwindet. Also ist  $h = 0$ . □

Tatsächlich hat das Dirichlet-Problem immer eine Lösung, und man kann diese oft durch Integration finden. Als einfaches Beispiel betrachten wir die Kreisscheibe

$$D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \quad , \quad \text{mit} \quad \partial D = S^1.$$

**8.41 Satz** *Für jede stetige Funktion  $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  löst*

$$h(z) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{i\varphi}) \frac{1-|z|^2}{|e^{i\varphi}-z|^2} d\varphi & , \quad z \in D \\ g(z) & , \quad z \in \partial D \end{cases} \quad (8.17)$$

*das Dirichlet-Problem.*

**Beweis:** • Zunächst zeigen wir, dass  $h|_D$  harmonisch ist, betrachten also  $z \in D$ . Dann ist der  $z$ -abhängige Faktor des Integranden (der sog. *Poisson-Kern*)  $\frac{1-|z|^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}$  harmonisch, wie man nachrechnet. Durch Vertauschen von Integration und  $\Delta$  folgt, dass auch  $h|_D$  harmonisch ist.

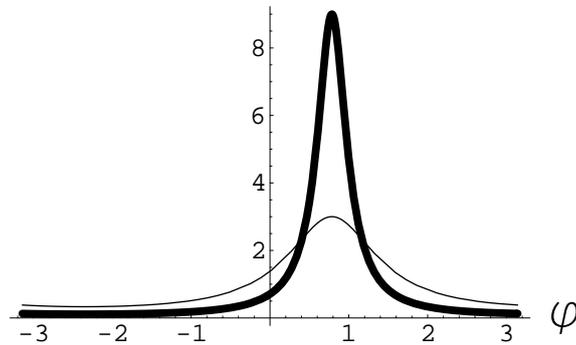


Abbildung 8.4: Poisson-Kern für  $z := re^{i\pi/4}$ , und  $r = 0.5$  bzw.  $r = 0.8$  (fett)

- Dieser positive Faktor besitzt das Integralmittel

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\varphi} - z|^2} d\varphi = 1,$$

was für  $z = 0$  offensichtlich ist und für  $z \in D \setminus \{0\}$  z.B. aus der Formel

$$\frac{1 - |z|^2}{|e^{i\varphi} - z|^2} = \frac{1}{1 - e^{-i\varphi}z} - \frac{1}{1 - e^{-i\varphi}/\bar{z}} \quad (8.18)$$

und Integration der Summanden folgt.

Als Funktion von  $\varphi \in [0, 2\pi]$  ist der Integrand (8.18) für  $z = re^{i\psi}$  eine für  $r \nearrow 1$  sich bei  $\psi$  konzentrierende Schar von Funktionen, siehe Abbildung 8.4.

Genauer kann man das Integral in (8.17) als Faltung mit einer  $\delta$ -Schar auf der Gruppe  $S^1$  auffassen<sup>29</sup>, denn  $\frac{1 - |z|^2}{|e^{i\varphi} - z|^2} = K_r(\psi - \varphi)$  für  $K_r(\rho) := \frac{1 - r^2}{|1 - re^{i\rho}|^2}$ .

Daraus folgt  $\lim_{r \nearrow 1} h(re^{i\psi}) = g(e^{i\psi})$ , also die Stetigkeit von  $h$  am Rand  $\partial D$ .  $\square$

Das Dirichlet-Problem für andere Gebiete  $\tilde{D}$  lässt sich lösen, wenn man die Lösung auf der Kreisscheibe  $D$  mittels einer konformen Abbildung

$$H : \tilde{D} \rightarrow D \quad , \quad H(\partial\tilde{D}) = \partial D$$

af  $\tilde{D}$  verpflanzt. Anwendungsbeispiele dafür finden sich in MEYBERG und VACHENAUER [MV, Band 2, Kap. 10.8].

<sup>29</sup>Vergleiche mit Definition 7.12 von  $\delta$ -Scharen für die Gruppe  $\mathbb{R}^n$ .

## 9 \* Die Mathematik der Quantenmechanik

### 9.1 Quantenmechanische Systeme

Mathematisch gesehen ist ein *quantenmechanisches System* ein geordnetes Paar  $(\mathcal{H}, H)$ , bestehend aus einem Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  und einem selbstadjungierten Operator  $H$  auf  $\mathcal{H}$ .

Bei Vorgabe des quantenmechanischen Systems besteht die mathematische Aufgabe wesentlich darin,

- das Spektrum  $\text{spek}(H) \subseteq \mathbb{R}$  des sog. *Hamiltonoperators*  $H$  und
- die unitäre *Zeitentwicklung*  $U(t) := \exp(-iHt)$  zu berechnen.

Die *beschränkten* Operatoren auf dem Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$ , also die linearen Abbildungen  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  mit *Operatornorm*

$$\|A\| := \sup_{\varphi \in \mathcal{H}: \|\varphi\|=1} \|A\varphi\| < \infty,$$

bilden selbst einen Banach-Raum, genannt  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

**9.1 Definition** Für  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  ist

- *Das Spektrum von A*

$$\text{spek}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \nexists B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) : B(A - \lambda \text{Id}) = (A - \lambda \text{Id})B = \text{Id}\}.$$

- $\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ .

**9.2 Bemerkungen** 1. Die Spektrumsbedingung für  $\lambda \in \mathbb{C}$ , dass also keine beschränkte Inverse  $B$  von  $(A - \lambda \text{Id})$  existiert, ist gleichbedeutend<sup>30</sup> damit, dass für alle  $\varepsilon > 0$  eine sog.  $\varepsilon$ -*Quasimode* (also ein näherungsweise Eigenvektor)  $\varphi \in \mathcal{H}$ ,  $\|\varphi\| = 1$  existiert mit

$$\|(A - \lambda \text{Id})\varphi\| < \varepsilon.$$

2. Die operatorwertige Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$  konvergiert für beschränkte  $A$  wegen der *Submultiplikativität*  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$  der Operatornorm, aus der  $\|A^k\| \leq \|A\|^k$  folgt.  $\diamond$

<sup>30</sup>Den (einfachen) Beweis findet man z.B. in Kap. VII, Ex. 3.4 des empfehlenswerten Buches J. Conway: A Course in Functional Analysis; Springer

**9.3 Beispiel (Spin 1/2-Teilchen).** Die interne Dynamik von Fermionen mit Spin 1/2 (wie Elektronen, Protonen oder Neutronen) werden durch Hamilton-Operatoren  $H$  auf dem Hilbert-Raum  $\mathcal{H} := \mathbb{C}^2$  beschrieben. Durch

$$\langle A, B \rangle := \frac{1}{2} \operatorname{tr}(AB^*) \quad (A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}))$$

wird ein Skalarprodukt auf dem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  definiert. Mit den darstellenden Matrizen  $(a_{ik})$  bzw.  $(b_{ik})$  von  $A$  bzw.  $B$  gilt  $\langle A, B \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^d a_{ik} \bar{b}_{ik}$ . Für  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$  bilden die sogenannten *Pauli-Matrizen*

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

zusammen mit der Einheitsmatrix  $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  eine Orthonormalbasis aus gleichzeitig selbstadjungierten und unitären Operatoren, denn es gilt

$$\frac{1}{2}(\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i) = \delta_{ij} \mathbb{1}.$$

Definieren wir die sog. *Pauli-Vektoren* als die selbstadjungierten Matrizen

$$x \cdot \sigma := x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_3 \sigma_3 \quad (x \in \mathbb{R}^3),$$

dann besitzen alle  $H \in \mathcal{L}_s(\mathcal{H})$  (also im *reellen* Unterraum  $\mathcal{L}_s(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$  der selbstadjungierten Operatoren, siehe *MP-2*, Kap. 2.3.5) eine eindeutige Darstellung

$$H = c \mathbb{1} + x \cdot \sigma \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^3.$$

Im Weiteren verwenden wir die *Einsteinsche Summenkonvention*, summieren also über gleichnamige Indices.

Das *Levi-Civita-Symbol*  $\varepsilon_{ijk}$  mit

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \quad \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = -1$$

und  $\varepsilon_{ijk} = 0$ , falls  $i = j$ ,  $i = k$  oder  $j = k$ , ist nützlich in vielen Formeln für den  $\mathbb{R}^3$ , wie z.B. die für das Vektorprodukt:

$$x \times y = \varepsilon_{klm} x_k y_l e_m \quad (x, y \in \mathbb{R}^3)$$

Mit ihm schreibt man die Vertauschungsrelationen der Pauli-Matrizen in der Form

$$\sigma_k \sigma_\ell = \sigma_{k\ell} \mathbb{1} + i \varepsilon_{klm} \sigma_m, \quad \text{also } [\sigma_k, \sigma_\ell] = 2i \varepsilon_{klm} \sigma_m \quad (k, \ell = 1, 2, 3).$$

Folgende Resultate lassen sich daraus ableiten:

- Das Produkt zweier Pauli-Matrizen ist

$$(x \cdot \sigma)(y \cdot \sigma) = \langle x, y \rangle \mathbb{1} + i(x \times y) \cdot \sigma \quad (x, y \in \mathbb{R}^3).$$

- Für  $x \in \mathbb{R}^3$  ist  $\text{spek}(x \cdot \sigma) = \{-\|x\|, \|x\|\}$ . Für  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  und den Einheitsvektor  $\hat{x} := x/\|x\|$  ist die Spektraldarstellung der Pauli-Matrix

$$x \cdot \sigma = \|x\|P_{\hat{x}} - \|x\|P_{-\hat{x}} \quad \text{mit den Projektoren} \quad P_{\hat{x}} := \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \hat{x} \cdot \sigma).$$

- Für  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\{-\|x\|, \|x\|\} \subseteq U \subseteq \mathbb{C}$  ist daher

$$f(x \cdot \sigma) = \frac{f(\|x\|) + f(-\|x\|)}{2} \mathbb{1} + \frac{f(\|x\|) - f(-\|x\|)}{2} \hat{x} \cdot \sigma.$$

Insbesondere ist die von  $H = x \cdot \sigma$  erzeugte unitäre Zeitentwicklung

$$U(t) = \exp(-iHt) = \cos(\|x\|t)\mathbb{1} + i \sin(\|x\|t)\hat{x} \cdot \sigma \quad (t \in \mathbb{R}). \quad \diamond$$

## 9.2 Unbeschränkte Operatoren

In diesem Beispiel ist der Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  endlich-dimensional. Viel typischer ist allerdings der Fall unendlich-dimensionaler Hilbert-Räume, und auf diesen gibt es auch unbeschränkte Operatoren.

### 9.4 Definition

- **Ein Operator** auf dem Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  ist eine lineare Abbildung  $A : D \rightarrow \mathcal{H}$  eines dichten Unterraums  $D \subseteq \mathcal{H}$  in  $\mathcal{H}$ .
- **Kern bzw. Bild** von  $A$  bezeichnen wir mit

$$\text{Ker}(A) := \{\varphi \in D \mid A\varphi = 0\} \quad , \quad \text{Im}(A) := \text{Ran}(A) := A(D).$$

- $A$  heißt **beschränkt**, wenn  $\sup_{\varphi \in D: \|\varphi\|=1} \|A\varphi\| < \infty$  ist, sonst **unbeschränkt**.

### 9.5 Bemerkungen (Operatoren)

1. Streng genommen ist damit ein Operator das *geordnete Paar*  $(D, A)$ , wobei  $D \equiv D(A) \subseteq \mathcal{H}$  der Definitionsbereich der linearen Abbildung  $A$  ist. Zwei Operatoren sind also nur dann einander gleich, wenn auch ihre Definitionsbereiche übereinstimmen.
2. Beschränkte Operatoren  $A : D \rightarrow \mathcal{H}$  kann man eindeutig zu einem beschränkten Operator  $\bar{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  fortsetzen.
3. Summen und Produkte von Operatoren  $(D_i, A_i)$  auf  $\mathcal{H}$  sind im Allgemeinen keine Operatoren, denn der natürliche Definitionsbereich  $D_1 \cap D_2$  von  $A_1 + A_2$  braucht in  $\mathcal{H}$  nicht dicht zu sein, ebensowenig der Definitionsbereich  $A_2^{-1}(D_1)$  von  $A_1 A_2$ . Ist aber  $A_2$  beschränkt, dann können (und werden) wir  $A_1 + A_2$  als Operator mit Definitionsbereich  $D_1$  auffassen.  $\diamond$

**9.6 Beispiel (Wasserstoffatom)** Wie schon in Kapitel 2.3.6. der *MP-2* diskutiert, ist der Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  des Elektrons (ohne Berücksichtigung seines Spins) gleich  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , und im elektrostatischen Feld eines beim Ursprung des  $\mathbb{R}^3$  lokalisierten Atomkerns wird es durch den Hamiltonoperator  $H$  auf  $L^2(\mathbb{R}^3)$  mit

$$(H\psi)(x) := -\frac{1}{2}\Delta\psi(x) - \frac{\psi(x)}{\|x\|} \quad (x \in \mathbb{R}^3).$$

beschrieben.

Ein möglicher Definitionsbereich von  $H$  ist der Schwartz-Raum<sup>31</sup>  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ :

- Mit  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  ist auch  $\Delta\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  und die Funktion  $x \mapsto \frac{\psi(x)}{\|x\|}$  liegt immerhin in  $L^2(\mathbb{R}^3)$ .

Letzteres sieht man etwa durch die Aufteilung des Integrationsgebietes  $\mathbb{R}^3$  in die Einheitsvollkugel und ihr Komplement. In der Kugel wird der Integrand  $\frac{|\psi(x)|^2}{\|x\|^2}$  durch  $\frac{C}{\|x\|^2}$  majorisiert, außerhalb durch  $|\psi(x)|^2$ .

- Nach Kapitel 7.2 liegt der Unterraum  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  in  $L^2(\mathbb{R}^3)$  dicht.

$$\text{spek}(H) = [0, \infty) \cup \{ -1/(2n^2) \mid n \in \mathbb{N} \}. \quad (9.1)$$

ist das Spektrum von  $H$ . ◇

An diesem Beispiel sehen wir nun Charakteristika der Quantenmechanik, die eng mit der unendlichen Dimension von  $\mathcal{H}$  verknüpft sind:

1. Der Operator  $H$  ist gar nicht auf dem ganzen Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  definierbar, denn die typische Funktion  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$  ist unstetig, sodass  $\Delta\psi$  (als sogenannte *Distribution* aufgefasst) nicht mehr in  $\mathcal{H}$  liegt. Das Spektrum ist keine beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{R}$ , wie auch  $H$  selbst ein unbeschränkter Operator ist.
2. Das Spektrum eines Operators  $A$  ist allgemein definiert als

$$\text{spek}(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda \text{Id ist nicht beschränkt invertierbar} \}.$$

Im Gegensatz zum Fall endlich dimensionaler Hilbert-Räume besteht hier nach (9.1)  $\text{spek}(H)$  nicht nur aus den Eigenwerten  $-1/(2n^2)$ , sondern auch aus den Punkten  $\lambda \in [0, \infty)$ . Diese können nicht als Eigenwerte von Eigenfunktionen aus  $\mathcal{H}$  interpretiert werden können.

Der Unterschied zwischen den beiden Spektralanteilen ist auch physikalisch wichtig, weil den negativen Eigenwerten gebundene Zustände des Elektrons entsprechen, während der positive Teil des Spektrums der Streuung am Atomkern entspricht.

---

<sup>31</sup>Allerdings ist  $H$  auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  *nicht selbstadjungiert*, denn der adjungierte Operator  $H^*$  hat einen größeren natürlichen Definitionsbereich als  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ .

Die *Funktionalanalysis* ist die mathematische Disziplin, die sich unter anderem mit Operatoren auf unendlichdimensionalen Hilbert-Räumen beschäftigt. In der *Mathematischen Physik* werden diese Methoden insbesondere auf Schrödinger-Operatoren der Quantenmechanik angewandt.

Eine funktionalanalytische Fragestellung ist die nach der Natur des Spektrums eines Operators. Im Fall des Wasserstoffatoms gelingt dessen explizite Berechnung unter Ausnutzung der Rotationssymmetrie von  $H$ . Aber schon das Spektrum des Heliumatoms ist nicht exakt berechenbar. Mit funktionalanalytischen Techniken kann man aber immerhin viele qualitative Fragen beantworten, etwa die Existenz unendlich vieler Eigenwerte, die Nichtexistenz positiver Eigenwerte, die Form  $[-1/2, \infty)$  des kontinuierlichen Spektrums etc.<sup>32</sup>

Eine weitere Frage, nämlich die nach der Existenz der unitären Zeitevolution  $U(t)$  (siehe Beispiel 5.35.2), wird durch die Mathematische Physik geklärt. Es ist zwar für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren  $H$  nicht möglich,  $\exp(-iHt)$  wie im beschränkten Fall als Potenzreihe zu definieren. Man kann aber den aus der Linearen Algebra bekannten Spektralkalkül normaler Operatoren  $A$  verallgemeinern. Diese haben die Spektraldarstellung

$$A = \sum_{\lambda \in \text{spek}(A)} \lambda P_\lambda \quad \text{mit Projektoren } P_\lambda.$$

Für eine Funktion  $f$ , deren Definitionsbereich  $\text{spek}(A)$  umfasst, definiert man  $f(A)$  als

$$f(A) := \sum_{\lambda \in \text{spek}(A)} f(\lambda) P_\lambda.$$

Diese Summen werden in der Funktionalanalysis zu Integralen verallgemeinert.

### 9.3 Orthonormalbasen und Störungstheorie

Wie in Kapitel 5.6 besprochen, ist außer im Fall endlich-dimensionaler Vektorräume der Basisbegriff der Linearen Algebra für analytische Zwecke ungeeignet, da er nur endliche Linearkombinationen zulässt.

In Hilbert-Räumen arbeitet man stattdessen mit in Def. 5.38 eingeführten Orthonormalbasen  $B \subset \mathcal{H}$ , also maximalen Teilmengen mit  $\langle b, b' \rangle = \delta_{b,b'}$ .

Nach Bemerkung 5.39 besitzt jeder Hilbert-Raum eine Orthonormalbasis.

**9.7 Beispiel** Der *Hilbertsche Folgenraum*  $\ell^2$  besitzt die Orthonormalbasis

$$B := \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \ell^2, \quad \text{mit } e_n(k) = \delta_{n,k},$$

hat also abzählbar unendliche Dimension. ◇

<sup>32</sup>Siehe: W. Thirring: Lehrbuch der Mathematischen Physik, Bd. 3, Quantenmechanik von Atomen und Molekülen. Springer

Mit Satz 5.40 gilt:

**9.8 Satz 1.** Es sei  $B \subset \mathcal{H}$  ein Orthonormalsystem. Dann ist die Abbildung  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ,  $v \mapsto \sum_{b \in B} \langle v, b \rangle b$  die Orthogonalprojektion auf  $\overline{\text{span}(B)} \subset \mathcal{H}$ .

2. Für eine Orthonormalbasis  $B$  von  $\mathcal{H}$  gilt

$$v = \sum_{b \in B} \langle v, b \rangle b \quad \text{und} \quad \langle v, w \rangle = \sum_{b \in B} \langle v, b \rangle \langle b, w \rangle \quad (v, w \in \mathcal{H}).$$

### 9.9 Beispiel

Der harmonische Oszillator besitzt den Hamilton-Operator  $H$  auf  $L^2(\mathbb{R})$

$$H = \frac{1}{2} \left( -\frac{d^2}{dq^2} + q^2 \right)$$

und dessen Orthonormalbasis von Eigenvektoren

$$h_m(x) = \frac{(-1)^m}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{2^m m!}} e^{x^2/2} \frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}_0)$$

den sog. *Hermite-Funktionen*  $h_m$ , siehe Abb. 9.9. Diese Orthonormalbasis des

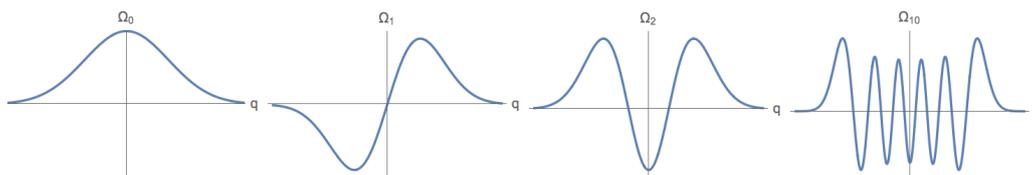


Abbildung 9.1: Eigenfunktionen  $h_m$  des quantenm. harmonischen Oszillators

$L^2(\mathbb{R})$  ist besonders dann nützlich, wenn man anharmonische Störungen des harmonischen Oszillators wie z.B.  $H(c) := \frac{1}{2} \left( -\frac{d^2}{dq^2} + q^2 + cq^4 \right)$  mit  $c \in \mathbb{R}$  untersucht.  $\diamond$

Eine ganze theoretisch-physikalische Industrie beschäftigt sich damit, für vergleichbare Probleme die Eigenwerte  $E_n(c)$  als Potenzreihen in  $c$

$$\sum_{k=0}^{\infty} E_{n,k} c^k \tag{9.2}$$

(so genannte *Störungsreihen*) darzustellen.

Im vorliegenden Fall ist für die normalisierte  $n$ -te Eigenfunktion  $\psi_n$  von  $H(0)$  zum Eigenwert  $E_n$

$$E_{n,0} = E_n \quad \text{und} \quad E_{n,1} = \langle \psi_n, q^4 \psi_n \rangle = \int_{\mathbb{R}} q^4 |\psi_n(q)|^2 dq.$$

Allerdings sagt uns im Beispiel des anharmonischen Oszillators  $H(c)$

- die *physikalische* Intuition, dass für  $c < 0$  die schnelle Divergenz des Potentials  $q^2 + cq^4$  gegen  $-\infty$  impliziert, dass das quantenmechanische wie das klassische Teilchen in endlicher Zeit ins räumlich Unendliche entweicht.
- *Mathematisch* gesehen wird dies durch die Tatsache reflektiert, dass die Störungsreihe (9.2) des (angeblichen) Eigenwertes den Konvergenzradius Null besitzt, also weitgehend nutzlos wird.

Es ist also im weiteren Physikstudium vorteilhaft, sich ab und zu an die erworbenen Mathe-Kenntnisse zu erinnern ...

## A Rechenregeln der Vektoranalysis im $\mathbb{R}^3$

Es seien die Funktionen  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  und die Vektorfelder  $u, v, w : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  glatt. Es werden kartesische Koordinaten und die Euklidische Metrik benutzt.

- $\langle u, v \times w \rangle = \langle v, w \times u \rangle = \langle w, u \times v \rangle$
- $u \times (v \times w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w$
- $\text{grad}(f) \equiv \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix}$
- $\text{div}(v) \equiv \nabla \cdot v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$
- $\text{rot}(v) \equiv \nabla \times v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$
- $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$  ,  $\Delta v = \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix}$
- $\text{div rot}(v) = 0$
- $\text{rot grad}(f) = 0$
- $\text{grad}(fg) = f \text{grad}(g) + g \text{grad}(f)$
- $\text{grad}(a \circ f) = a' \circ f \text{grad}(f)$
- $\text{div}(fv) = f \text{div}(v) + v \text{grad}(f)$
- $\text{div}(v \times w) = \langle \text{rot } v, w \rangle - \langle v, \text{rot } w \rangle$
- $\text{rot}(v \times w) = \langle w, \text{grad} \rangle v + \langle v, \text{grad} \rangle w$
- $\text{rot rot}(v) = \text{grad div}(v) - \Delta v$

## Literatur

- [AF] Agricola, I., Friedrich, T.: *Globale Analysis*, Vieweg, 2001
- [An1] Knauf, A.: *Vorlesung Analysis I*, Skript, Erlangen 2018/19
- [Ar] Arnol'd, V.I.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer, 2001
- [BS] Bamberg, P.; Sternberg, S.: *A Course in mathematics for students of physics, Bd. 1 und 2*, Cambridge University Press, 1998
- [Bl] Blatter, Ch.: *Analysis*, Bd. I-III. Springer, 1974
- [Bl2] Blatter, Ch.: *Wavelets — Eine Einführung*. Springer-Vieweg, 2003
- [Ba] Bauer, H.: *Maß- und Integrationstheorie*, de Gruyter 1992
- [Br] Bröcker, T.: *Analysis*, Bd. 1 und 2. Spektrum der Wissenschaft, 1995
- [Ca] do Carmo, M.P.: *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*, Vieweg, 1998
- [DH] Deuffhard, P.; Hohmann, A.: *Numerische Mathematik I. Eine algorithmisch orientierte Einführung*, de Gruyter, 2002
- [DB] Deuffhard, P., Bornemann, F.: *Numerische Mathematik II: Gewöhnliche Differentialgleichungen*, de Gruyter, 2002
- [Fi] Fischer, G.: *Lineare Algebra*, Springer, 2014
- [Fo] Forster, O.: *Analysis*, Bd. 1-3. Springer, 2016
- [HW] Hellwig, K.-E.; Wegner, B.: *Mathematik und theoretische Physik*, Bd. 1 und 2., de Gruyter, 1992
- [Hi] Hildebrandt, S.: *Analysis 1*, Springer, 2006
- [Ja] Jänich, K.: *Topologie*, Springer, 2005
- [Kn] Knörrer, H.: *Geometrie*, Vieweg 1996
- [KW] Kerner, H., von Wahl, W.: *Mathematik für Physiker*, Springer, 2006
- [Ko] Königsberger, K.: *Analysis*, Bd. 1 und 2. Springer, 2004
- [LL] Lieb, E.H., Loss, M.: *Analysis*. AMS Graduate Studies in Mathematics, Volume 14, 2001

- [MV] Meyberg, K., Vachenauer, P.: *Höhere Mathematik*, Bd. 1 und 2. Springer, 2001
- [RS] Reed, M., Simon, B.: *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. II: Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Academic Press, 1975
- [RS2] Remmert, R., Schumacher, G.: *Funktionentheorie 1*, Springer Lehrbuch, 2002
- [Wu] Wüst, R.: *Höhere Mathematik für Physiker*, Bd. 1 und 2. de Gruyter, 1995

## Index

- Aharonov–Bohm Effekt 98
- analytisch 127
- Antiderivation 8
- Ableitung
  - äußere 8
  - komplexe 117
- äußere Form 2
- asymptotisch stabil 29, 32
- Bereich 117
- Bessel–Ungleichung 84
- Bilinearform 1
- Cauchy–Hadamard–Formel 127
- Cauchy–Riemannsches DGLn 119
- Cauchy–Schwarz–Ungleichung 82
- Differentialform 7
  - exakte 9
  - geschlossene 9
  - komplexwertige 123
- Differentialgleichung
  - hamiltonsche 19
  - inhomogene lineare 109
- Dimension 36
- Dirac–Folge 107
- Dirac–Maß 36
- Dirichlet–Problem 136
- Divergenz 10
- Doppelfakultät 79
- Dualbasis 1
- Eichfeld 11
- einfach zusammenhängend 99
- Einsteinsche Summenkonvention 140
- Elektrostatik 135
- Faltung 104
- fast überall 52
- Fourier–Koeffizient 114
- Fourier–Synthese 115
- Fourier–Transformation 68, 111, 114
  - Umkehrsatze 108
- Freiheitsgrad 19
- Fundamentalsatz der Algebra 129
- Funktional 39
- Funktionaldeterminante 105
- Funktionentheorie 116
- Gammafunktion 66, 77
- ganz 128
- Gaußsche Glockenkurve 102
- Gebiet 117
- Gibbs–Phänomen 115
- Gleichgewichtslage 24
- Gradient 10
- Grassmann–Algebra 5
- Gronwall–Ungleichung 31
- Gruppencharakter 113
- Haar–Basis 86
- Haar–Maß 114
- Halbnorm 41
- Hamilton–Funktion 19
- harmonisch 135
- harmonischer Oszillator 110, 144
- hebbare Singularität 130
- Hermite–Funktion 144
- Hilbertscher Folgenraum 85
- Hölder–Ungleichung 80
- holomorph 117
- Homotopie
  - geschlossener Kurven 124
  - von Kurven 99
- Hüllreihe 41
- inkompressible Flüssigkeit 120
- inneres Produkt 13
- instabil 28
- Integral 88
- Integralformel von Cauchy 125, 126
- Jordan–Normalform 33
- Kegel 50
- komplex differenzierbar 117

konform 119  
 Koordinatenvektorfeld 14  
 Kreuzprodukt 5  
 Laplace–Gleichung 135  
 Laurent–Reihe 132  
 Lebesgue–Integral 41  
 Lebesgue–Maß 49  
 Leibniz–Regel 14  
 Levi-Civita-Symbol 140  
 Liapunov–Funktion 29  
 Liapunov–stabil 28, 33  
 Lie–Ableitung 13  
 Linearisierung einer Dgl. 24  
 lokal integrierbar 69  
 lokal kompakt 114  
 lokal Lipschitzstetig 55  
 Mannigfaltigkeit 92  
 Maß 35  
 Maximumsprinzip 136  
 Maxwell–Gleichung 11  
 messbar 49  
 metrischer Tensor 89  
 Minkowski–Ungleichung 80  
 Multiindex-Notation 103  
 multilinear 1  
 nullhomotop 124  
 Nullmenge 51  
 Operator 141  
 Operatornorm 139  
 orthogonal 83  
 Orthonormalbasis 83  
 Orthonormalsystem 83  
 Parallelotop 74  
 Pauli–Matrix 140  
 Pendel 25  
 Plancherel–Formel 111  
 Poincaré–Lemma 98, 101  
 Poisson–Kern 137  
 Poisson–Klammer 23  
 Pol 130  
 Polarisationsidentität 82  
 Polarkoordinaten 12, 77, 120  
 Potential 121  
 Produkt  
     inneres 13, 82  
     äußeres 3  
 pull-back 6, 12  
 Quader 36  
 Quasimode 139  
 Residuum 132  
 Riemannscher Hebbarkeitssatz 130  
 Rückkehrrschritt 131  
 Rotation 10  
 Ruhelage 24  
 Satz  
     Beppo Levi 62  
     Casorati–Weierstraß 130  
     Cauchy 125  
     Cauchys Residuensatz 133  
     Fatou 63  
     Fubini 39, 47, 70  
     Gauss 97  
     Kelvin–Stokes 96  
     Lebesgue 65  
     Liouville 128  
     majorisierte Konvergenz 65  
     Maximumsprinzip 136  
     monotone Konvergenz 62  
     Pythagoras 84  
     Riemannscher Hebbarkeitssatz 130  
     Riesz–Fischer 60, 80  
     Stokes 94  
     Tietze 47  
     Transformationsatz 73  
 Schnelle Fourier-Transformation 115  
 Schrödinger–Operatoren 81  
 Schwartz–Raum 110  
 Schwarzsche Ungleichung 82  
 $\sigma$ –additiv 49  
 Singularität 129  
 Spektrum 139  
 Spin 140

Standardvolumenform 88  
Sterngebiet 98  
Störungsreihe 144  
submultiplikativ 139  
symplektische Form 4  
Tragflügel 121  
Transformationsatz 73  
Translationsinvarianz 64  
Trennung der Variablen 17  
Treppenfunktion 37  
Ungleichung  
    Bessel 84  
    Cauchy–Schwarz 82  
    Gronwall 31  
    Hölder 80  
    Minkowski 80  
unitär 85  
unwesentliche Singularität 130  
Variation der Konstanten 31  
Verfeinerung 37  
Wärmeleitungsgleichung 135  
Wahrscheinlichkeitsmaß 36  
Wasserstoffatom 142  
wesentliche Singularität 130  
Windungszahl 133  
winkeltreu 119  
Zirkulation 96  
zusammenhängend 99