Einführung in das Studium der Mathematik

Andreas Knauf*

Wintersemester 2000/2001

Zusammenfassung

Die Entwicklung mathematischer Begriffe wird am Beispiel der *Graphentheorie* erläutert. Dieses Skript enthält das mathematische Gerüst der Einführungsvorlesung.

Es werden nur elementare Vorkenntnisse vorausgesetzt. Umgekehrt wird im weiteren Studium nicht auf diesen Vorkurs zurückgegriffen.

Allerdings gehört die Graphentheorie zu einem sehr anwendungsorientierten Gebiet der Mathematik — der sog. *Diskreten Mathematik* — das sich auch gut für ein weiteres Selbststudium eignet.

Ein einführendes Buch und weitere Buchempfehlungen finden sich am Ende dieses Skriptes

Inhaltsverzeichnis

*Mathematisches Institut, Universität Erlangen-Nürnberg, Bismarckstr. $1\frac{1}{2}$, D–91054 Erlangen, Germany. e-mail: knauf@mi.uni-erlangen.de

1 Einleitung

Das elementarste Konzept der Mathematik ist das der *Menge*. Ist eine Menge V nicht zu groß (nämlich abzählbar), dann können wir ihre Elemente $v_i \in V$ als Punkte in der Ebene oder im Raum darstellen:

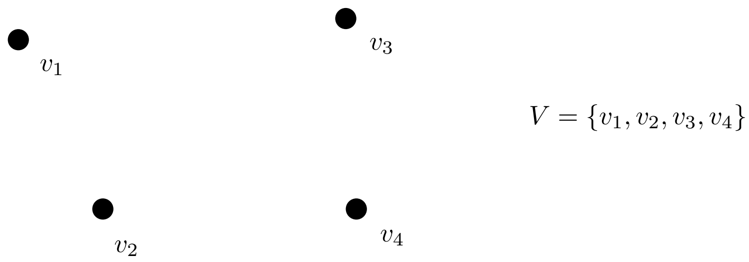


Abbildung 1: Punktmenge $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

Nun wollen wir gewisse Paare von Punkten miteinander verbinden. Es entsteht das Bild eines sogenannten *Graphen*:

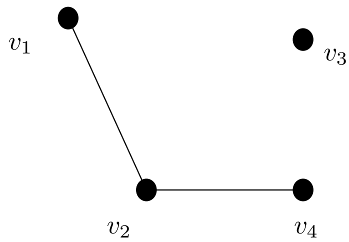


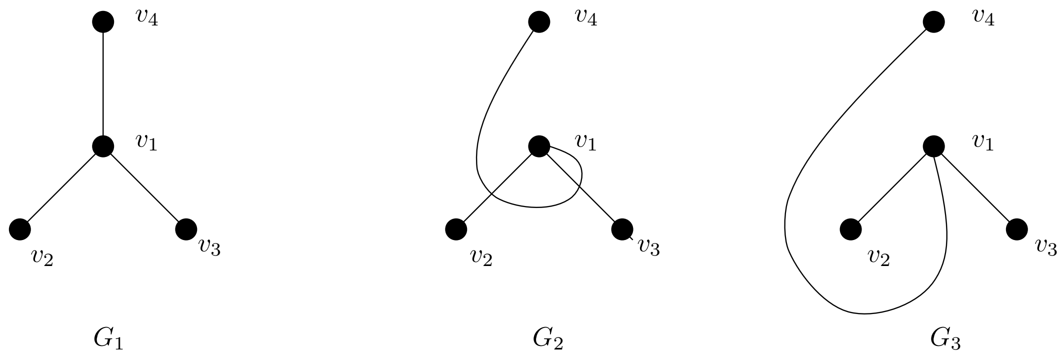
Abbildung 2: Graph mit Knotenmenge V

So simpel dieses Konzept ist, so vielfältig sind seine Anwendungen. Wir werden z.B. eine Anwendung in der Wasserversorgung kennen lernen. Gleichzeitig werde ich Ihnen anhand des Beispiels zeigen, wie mathematische Begriffs- und Theoriebildung vonstatten geht.

2 Der Begriff des Graphen

Wir haben jetzt einen anschaulichen Begriff von Graphen. Das reicht uns aber nicht aus, denn die Anschauung ist noch zu unscharf.

Beispiel 2.1 Sind die folgenden drei Graphen G_1, G_2 und G_3 einander "im Wesentlichen" gleich oder nicht?



Im Fall von G_1 und G_3 treffen sich Verbindungskurven nur in Punkten der Menge V, bei G_2 auch an anderen Punkten der Ebene.

Von v_1 aus gesehen, folgen die Verbindungskurven zu den Punkten v_2, v_3 und v_4 aufeinander im Gegenuhrzeigersinn (das ist der "mathematisch positive"), bei G_3 im Uhrzeigersinn.

Offensichtlich gibt es verschiedene Präzisierungsmöglichkeiten und entsprechend verschiedene mögliche Definitionen des Begriffs eines Graphen.

Tatsächlich werden Sie auch, wenn Sie verschiedene Bücher über Graphen aufschlagen, unterschiedliche Definitionen des Graphenbegriffes finden. Wir benutzen die folgende:

Definition 2.2 Ein *Graph* G ist ein Zwei-Tupel $G = (V, E)$, wobei V eine Menge und E eine Teilmenge von $\{\{v_1, v_2\} \subset V \mid v_1 \neq v_2\}$ ist.

G heißt *endlich*, wenn $|V| < \infty$ ist.

V heißt *Knotenmenge* (englisch: vertex-set), $v \in V$ heißt *Knoten* oder *Ecke*. E heißt *Kantenmenge* (englisch: edge-set), $e \in E$ heißt *Kante*.

Dies ist nun recht abstrakt; wir finden aber einen Zusammenhang zu unserer anschaulichen Definition, wenn wir für jedes verbundene Paar $\{v, w\}$ von Knoten $v \neq w$, $v, w \in V$ die Kante $e := \{v, w\}$ zur Kantenmenge E schlagen.

Beispiel 2.3 $G_1 = G_2 = G_3 = (V, E)$ mit $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}\}$.

Wir brauchen nun keineswegs auf eine graphische Darstellung von Graphen zu verzichten. Wir haben mit der Definition aber vereinbart, wie wir diese Bilder interpretieren wollen.

Im folgenden werde ich nur Graphen mit einer endlichen Zahl von Knoten betrachten.

3 Einfache Eigenschaften von Graphen

Wir haben bis jetzt als Struktur nur eine Menge V und eine Menge E zweielementiger Teilmengen von V.

Mit diesem Pfund wollen wir wuchern und schauen, welche Begrifflichkeiten aus dieser Struktur folgen.

Definition 3.1

- v_1 und v_2 aus V heißen *benachbart*, wenn $\{v_1, v_2\} \in E$.
- $N(v) := \{w \in V \mid \{v, w\} \in E\}$ heißt die *Nachbarschaft* von v. $|N(v)|$ heißt der *Grad* von v (dabei bezeichnet $|M|$ die Zahl der Elemente der Menge M).

Nun kommt unsere erste kleine Erkenntnis über Graphen:

Satz 3.2 *Für einen endlichen Graphen* (V, E) *gilt*

$$\sum_{v \in V} |N(v)| = 2|E|.$$

Bew.: Die Menge $\tilde{N}(v) := \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E\}$ lässt sich als die Menge der von v ausgehenden und zu den Nachbarn w von v hinlaufenden *orientierten* Kanten auffassen. Es gilt $|\tilde{N}(v)| = |N(v)|$, aber $\tilde{N}(v_1) \cap \tilde{N}(v_2) = \emptyset$, falls $v_1 \neq v_2$. Denn zwar sind die *Mengen* $\{v_2, v_1\} = \{v_1, v_2\}$, aber die *geordneten Paare* (v_2, v_1) und (v_1, v_2) sind voneinander verschieden. Damit ist

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in V} |N(v)| &= \sum_{v \in V} |\tilde{N}(v)| = \left| \bigcup_{v \in V} \tilde{N}(v) \right| \\
&= |\{(v, w) \in V \times V \mid \{v, w\} \in E\}| = 2|E|.
\end{aligned}$$

$\square$

Nun, das ist ein wahrer Satz, aber ist er auch nützlich? Letztlich steckt in ihm ja nur die Erkenntnis: "Jedes Ding hat einmal ein End', nur die Wurst (und die Kante) hat zwei."

So etwas nennt man in der Mathematik etwas pikiert "trivial". Andererseits kommt man oft durch Kombination einiger Trivialitäten zu etwas Unerwartetem:

Satz 3.3 *Die Zahl der Knoten* $v \in V$ *mit ungeradem Grad* $|N(v)|$ *ist gerade.*

Bew.:

$$\sum_{v\in V}|N(v)| = \sum_{\substack{v\in V:\\ |N(v)| \text{ ungerade}}} |N(v)| + \sum_{\substack{v\in V\\ |N(v)| \text{ gerade}}} |N(v)| = 2|E|,$$

also ist $\sum_{\substack{v\in V:\\ |N(v)| \text{ ungerade}}} |N(v)|$ gerade. Das kann aber nur sein, wenn die Menge $\{v \in V \mid |N(v)| \text{ ungerade}\}$ eine gerade Zahl von Elementen besitzt. □

Aufgaben:

1. Zeigen Sie: Falls $|V| > 1$, besitzt (V, E) (mindestens) zwei Knoten gleichen Grades.

2. Gibt es Graphen, deren Knoten die folgenden Grade besitzen?

   a) $2, 2, 2, 3$

   b) $1, 2, 2, 3, 4$

   c) $2, 2, 4, 4, 4$

   d) $1, 2, 3, 4$

   Wenn ja, bitte ein Beispiel, wenn nein, möglichst Angabe eines Kriteriums, gegen das die Grad-Tabelle verstößt.

3. Doreen und Kevin veranstalten eine Party und laden vier andere Paare ein. Manche schütteln sich die Hand, die Paare aber nicht. Kevin fragt nachher die anderen, wieviel Hände sie geschüttelt haben und erhält neun verschiedene Antworten. Wieviele Hände hat Doreen geschüttelt?[1]

So einfach das Konzept des Graphen ist, so vielfältig sind die Fragen, die man zur Struktur von Graphen stellen kann, und so schwierig sind oft die Antworten.

Beispiel 3.4 Eine *Färbung* eines Graphen (V, E) ist eine Zuordnung $f : V \to F$ in eine Menge F (von Farben), sodaß allen benachbarten Knoten $v, w \in V$ verschiedene Farben $f(v) \neq f(w)$ zugeordnet werden.

Ein Graph heißt *planar* wenn man ihn "ohne Überschneidungen von Kanten in der Ebene zeichnen kann".

Nimmt man beispielsweise an, dass die Länder der Erde alle zusammenhängend sind (es gibt allerdings Länder, für die das nicht zutrifft), zeichnet man einen

[1] Aus: Norman Biggs: Discrete Mathmatics. Oxford Science Publications 1987

Punkt pro Land und verbindet Länder, die eine gemeinsame Grenze haben, durch eine Kante, so erhält man einen planaren Graphen.

Die im 19ten Jahrhundert aufgestellte und erst 1976 bewiesene Vierfarbenvermutung besagt nun, daß sich jeder planare Graph mit nur vier Farben färben lässt, dass es also eine entsprechende Abbildung $f : V \to F$ gibt, wobei $|F| = 4$.

Der Beweis war nur durch Computereinsatz möglich. Bis jetzt existiert noch kein in allen Details lesbarer Beweis.[2]

Wir werden aus dem Gestrüpp von Fragen einige auswählen.

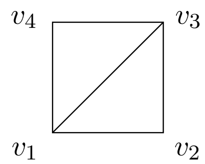
4 Bäume

Definition 4.1 Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Ein *Weg* p_n in G ist eine endliche Folge $v_1, \ldots, v_n \in V$ voneinander verschiedener Ecken mit $\{v_i, v_{i+1}\} \in E \quad (i = 1, \ldots, n-1)$. Die Zahl $n-1$ seiner Kanten heißt die *Länge* des Weges.

- Ein *Kreis* c_n in G ist eine Folge $v_1, \ldots, v_n \in V$ voneinander verschiedener Ecken mit $\{v_i, v_{i+1}\} \in E \quad (i = 1, \ldots, n-1)$ und $\{v_n, v_1\} \in E$. Die Anzahl n seiner Kanten heißt die *Länge* des Kreises.

Beispiel 4.2 $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ und $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_1\}, \{v_1, v_3\}\}$.



a) v_1 ist ein Weg der Länge 0.

b) v_1, v_2, v_3 ist ein Weg der Länge 2 und ein Kreis der Länge 3.

c) v_1, v_2, v_4 und v_1, v_2, v_1 sind keine Wege.

[2] Allerdings wird weiter daran gearbeitet, siehe: Martin Aigner: Die Ideen von Penrose zum 4-Farbenproblem. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 102. Band, pp. 43–68 (2000)

Definition 4.3 $w \in V$ heißt von $v \in V$ aus *erreichbar*, wenn es einen Weg $v_1, \dots, v_n$ mit $v_1 = v$ und $v_n = w$ gibt.

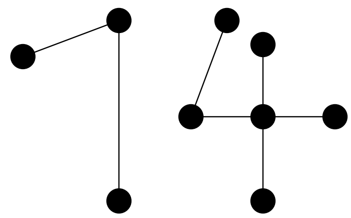
Erreichbarkeit von Ecken ist eine sog. *Äquivalenzrelation*. Schreiben wir nämlich $v \sim w$, falls w von v aus erreichbar ist, dann gilt

1. $v \sim v$
2. $v \sim w \Longrightarrow w \sim v$
3. $v \sim w$ und $w \sim u \Longrightarrow v \sim u$.

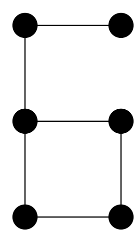
Damit wird die Knotenmenge V in *Komponenten*, d.h. Teilmengen V_i zerlegt, deren Punkte untereinander zusammenhängen, aber nicht mit Knoten aus $V \backslash V_i$.

Definition 4.4
- Ein aus einer Komponente bestehender Graph heißt *zusammenhängend*.
- Ein zusammenhängender Graph heißt *Baum*, wenn er keinen Kreis enthält.

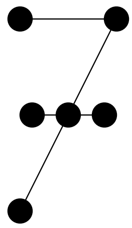
Beispiel 4.5
1. Ein nicht zusammenhängender Graph mit zwei Komponenten:



2. Ein zusammenhängender Graph, der kein Baum ist:



3. Ein Baum:



Satz 4.6 *Für einen Baum* $G = (V, E)$ *gilt* $|E| = |V| - 1$.

Bew.: Es sei $v \in V$ ein fest gewählter Knoten, den wir die Wurzel nennen. Von jedem $w \in V$ gibt es genau einen Weg zu v hin:

- mindestens einen, weil G zusammenhängend,
- höchstens einen, weil man bei Existenz zweier verschiedener solcher Wege einen Kreis in G konstruieren könnte.

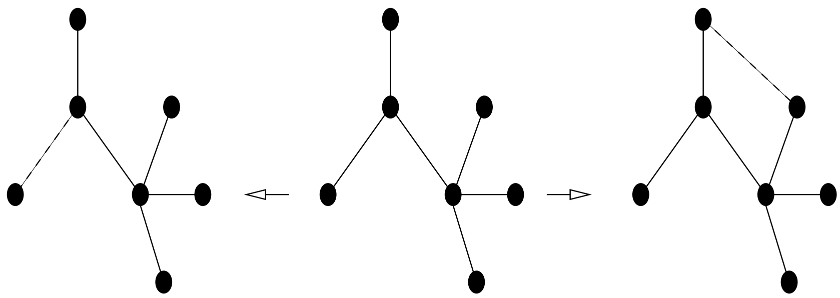
Man ordnet jedem von der Wurzel v verschiedenen Knoten $w \in V$ die erste Kante des Weges zur Wurzel hin zu. Dies ist eine Bijektion, also eine Abbildung, die verschiedenen Knoten verschiedene Kanten zuordnet und die alle Kanten als Bild hat. $\square$

Aufgabe: Warum kann man aus zwei verschiedenen Wegen von w nach v einen Kreis konstruieren?

Warum interessiert man sich für Bäume? Zunächst einmal sind es einfache Graphen, deren Eigenschaften sich gut berechnen lassen. Außerdem tauchen sie in vielen Anwendungsproblemen auf, oft als sogenannte aufspannende Bäume (siehe unten).

Bäume sind durch Zusammenhang und Kreislosigkeit definiert. Entfernt man eine beliebige Kante eines Baumes, dann ist er nicht mehr zusammenhängend. Fügt man eine neue Kante zwischen zwei Knoten eines Baumes hinzu, dann besitzt der so konstruierte Graph einen Kreis:

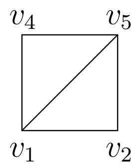
Baum



Definition 4.7

- Der Graph $G_2 := (V_2, E_2)$ heißt *Teilgraph* des Graphen $G_1 := (V_1, E_1)$, wenn $V_2 \subset V_1$ und $E_2 \subset E_1$.
- Ist der Teilgraph G_2 ein Baum und $V_2 = V_1$, dann heißt G_2 *aufspannender Baum*.

Beispiel 4.8 Der folgende Graph G_1 besitzt die sechs in Abb. 3 dargestellten aufspannenden Bäume. Welche aufspannenden Bäume fehlen noch?

$G_1 =$ 

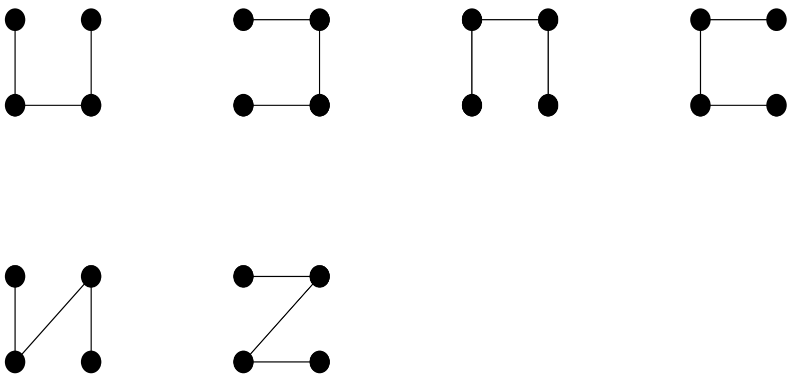


Abbildung 3: Aufspannende Bäume von G_1

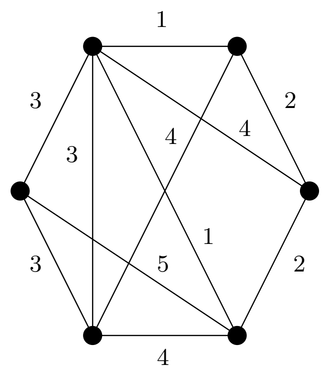
5 Algorithmen

Manchmal besitzen in Anwendungen der Graphentheorie die Kanten *Gewichte*, d.h. auf der Kantenmenge des Graphen (V, E) ist eine Funktion

$$f : E \to (0, \infty)$$

definiert.

Beispiel 5.1 Die Knoten $v \in V$ des folgenden Graphen entsprechen Ortschaften, die Kanten $e \in E$, $e = \{v_1, v_2\}$ der Möglichkeit, zwischen v_1 und v_2 eine Wasserleitung zu legen. $f(e)$ entspricht den Kosten der Wasserleitung.



Wir können nun für einen aufspannenden Baum $T = (V, E')$ in $G = (V, E)$ die Gewichte addieren, d.h.

$$F(T) := \sum_{e' \in E'} f(e')$$

definieren.

Frage: Für welche aufspannenden Bäume T^* nimmt F das Minimum an, d.h. gilt

$$F(T^*) = \min_{T \text{ aufsp. Baum}} F(T)?$$

Beispiel 5.2 Im obigen Beispiel entspricht dies einem kostengünstigsten Anschluss aller Ortschaften an die Wasserversorgung[3]. Es gibt genau sechs Lösungen dieses Problems.

[3]siehe Béla Bollobás: Modern Graph Theory. Springer 1998

Falls der zusammenhängende Graph G viele Kanten besitzt, besitzt er auch viele aufspannende Bäume und die Suche nach dem kostengünstigsten aufspannenden Baum könnte daher langwierig werden.

Aufgaben:

1. Wieviele Kanten besitzt ein Graph mit n Knoten höchstens?

2. Es sei K_n der vollständige Graph mit n Knoten, d.h. der Graph, dessen Knoten paarweise durch Kanten verbunden sind. Zählen Sie für $n = 2, 3$ und 4 die Zahl t_n der aufspannenden Bäume.

   Welche allgemeine Formel vermuten Sie?

Tatsächlich gibt es aber einen einfachen und schnellen Algorithmus zum Auffinden von T^*:

- Am Anfang seien alle Kanten $e \in E$ unmarkiert.

- Im k–ten Schritt des Verfahrens wählt man unter den noch unmarkierten Kanten von E eine Kante e_k mit minimalem Gewicht $f(e_k)$ und markiert e_k. Dabei darf man e_k aber nur dann wählen, wenn ihre Markierung keinen Kreis markierter Kanten erzeugt.

- Kann man keine neue Kante markieren, bedeutet das, dass durch Markieren einer beliebigen Kante ein Kreis enstehen würde, d.h. die markierten Kanten bilden einen Baum T^*.

Nimmt die Gewichtsfunktion Werte mehrmals an, dann ist das Verfahren nicht eindeutig, aber alle nach dem Verfahren konstruierten, aufspannenden Bäume haben das gleiche Gewicht.

Aufgabe: Konstruieren Sie alle minimalen, d.h. kostengünstigen, aufspannenden Bäume für Beispiel 5.2.

Satz 5.3 *Die beschriebene Methode führt zu einem minimalen aufspannenden Baum T^*.*

Bew.: Es sei $\tilde{T} = (V, \tilde{E})$ ein minimaler aufspannender Baum von G, der, falls es mehrere davon gibt, möglichst viele Kanten mit $T^* = (V, E^*)$ gemeinsam hat. Wir nehmen an, dass trotzdem $\tilde{E} \neq E^* = \{e_1, \dots, e_n\}$. Es sei e_r die erste Kante von E^*, die nicht zu $\tilde{E}$ gehört, $e_r = \{x, y\}$. Auch in $\tilde{T}$ sind x und y über einen Weg p verbunden, der aber eben e_r nicht enthält. Andererseits muss p eine Kante

$\tilde{e} := \{u, v\}$ enthalten, die nicht zu E^* gehört, sonst gäbe es nämlich einen Kreis in E^*.

Da bei der Suche nach e_r die Wahl auf $\{x, y\}$ und nicht auf $\{u, v\}$ fiel, gilt

$$f(e_r) \geq f(\tilde{e}).$$

Damit ist der Baum $T' := (V, E')$ mit $E' := \tilde{E} \cup \{e_r\}/\{\tilde{e}\}$ aufspannend und $f(T') \leq f(\tilde{T})$. T' hat aber eine Kante mehr mit T^* gemeinsam als T, nämlich e_r. Widerspruch! □

Ein zweites algorithmisches Problem ist das der *kürzesten Wege* in einem zusammenhängenden Graphen (V, E) mit Gewichtsfunktion $f : E \to (0, \infty)$. Hier geht es darum, zwischen den Knoten v und w einen Weg $v_1, \ldots, v_n$ (mit $v_1 = v$ und $v_n = w$) zu finden, für den die Summe

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(\{v_i, v_{i+1}\})$$

minimal wird.

Beispiel 5.4 Die Knoten sind Städte, die Kanten e Direktverbindungen mit der Bahn, und $f(e)$ ist der Fahrpreis. Hier geht es also um die kostengünstigste Verbindung zwischen den Städten v und w.

Auch dieses Problem besitzt eine schnelle Löung, den sog. Dijkstra-Algorithmus, siehe [1].

Viele Algorithmen in der Graphentheorie beruhen auf Methoden der Linearen Algebra, die Sie in den kommenden beiden Semestern kennen lernen werden.

Literatur

[1] Martin Aigner: Diskrete Mathematik. Vieweg 1999, DM 46,-

[2] R. Courant, H. Robbins: Was ist Mathematik? Springer 1997.
Zur Zeit vergriffen, aber in der Präsenzbibliothek des Mathematischen Instituts vorhanden.

[3] Winfried Scharlau: Schulwissen Mathematik: Ein Überblick. Vieweg 1995, DM 26,-

[4] Eberhard Zeidler (Herausgeber): Teubner-Taschenbuch der Mathematik. Teubner. Teil I und II; je DM 64,-