

Algebraische Geometrie

Wolfgang M. Ruppert

Wintersemester 1996/97

10. Juli 1997 ¹

¹Im Wintersemester 1996/97 am Mathematischen Institut der Universität Erlangen-Nürnberg abgehaltene Vorlesung

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Einführung	5
Kapitel 2. Affine Varietäten	9
Kapitel 3. Projektive Varietäten	17
Kapitel 4. Geraden im \mathbf{P}^3	23
Kapitel 5. Quadriken	27
Quadriken im \mathbf{P}^1	28
Quadriken im \mathbf{P}^2 : Ebene Kegelschnitte	28
Quadriken im \mathbf{P}^3	31
Kapitel 6. Morphismen	33
Kapitel 7. Produkte von Varietäten	39
Kapitel 8. Bilder von Morphismen	43
Kapitel 9. Rationale Abbildungen	47
Aufblasen	50
Kapitel 10. Tangentialräume, Tangentialkegel und Singularitäten	55
Kapitel 11. Nichtsinguläre Kurven	63
Divisoren	66
Ausblick	68
Kapitel 12. Schnitttheorie ebener Kurven	69
Schnitttheorie auf $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$	76
Kapitel 13. Ebene Kurven	79
Kapitel 14. Kubische Flächen im \mathbf{P}^3	89
Anhang A. Vorlesungsankündigung	97
Anhang B. Übungen	99
1. Aufgabe 1.11	99
2. Übung	99

Einführung

Aus der Vorlesungsankündigung: Mit der Erfindung der kartesischen Koordinaten durch Descartes und Fermat in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts wurde es möglich, geometrische Fragestellungen algebraisch zu formulieren und mit den Methoden der Algebra zu behandeln. Heutzutage lernt man bereits in der Schule, wie man einfache geometrische Gebilde wie Geraden, Parabeln, Ebenen und Kugeln durch Gleichungen beschreibt.

In der Algebraischen Geometrie studiert man nun allgemein Lösungsmengen polynomialer Gleichungen. Dazu gehören geometrische Objekte, aber auch diophantische Gleichungen.

Ausgangspunkt der algebraischen Geometrie sind folgende Situationen:

- Geometrische Probleme in algebraische Gleichungen übersetzen und zu lösen versuchen.
- Algebraische Gleichungen geometrisch deuten und verstehen.

Bevor wir richtig beginnen, wollen wir zwei einfache Beispiele für das fruchtbare Zusammenwirken von Geometrie und Algebra geben.

Beispiel 1: Gegeben seien die drei Geraden

$$y = x - 2, \quad y = -2x + 1, \quad y = 1.$$

Bestimmt werden sollen alle Kreise, die alle drei Geraden berühren.

1. Ein Kreis mit Mittelpunkt (u, v) und Radius r wird beschrieben durch eine Gleichung

$$f(x, y) = (x - u)^2 + (y - v)^2 - w = 0,$$

wo $w = r^2$ ist. Wann berührt der Kreis $f(x, y) = 0$ die Gerade $y = x - 2$? Genau dann, wenn sich Kreis und Gerade in genau einem Punkt schneiden. Dazu setzen wir $y = x - 2$ in die Kreisgleichung ein:

$$f(x, x - 2) = 2x^2 + (-2u - 2v - 4)x + (u^2 + v^2 + 4v - w + 4).$$

Bezüglich x ist dies eine Parabel, die keine, eine oder zwei Nullstellen haben kann. Die Bedingung, daß es genau eine Nullstelle gibt, ist äquivalent dazu, daß die Diskriminante verschwindet, also

$$\begin{aligned} d_1 &= (-2u - 2v - 4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (u^2 + v^2 + 4v - w + 4) = \\ &= -4u^2 + 8uv - 4v^2 + 16u - 16v + 8w - 16 = 0. \end{aligned}$$

Ähnlich liefern die zwei anderen Geraden die Bedingungen

$$d_2 = -16u^2 - 16uv - 4v^2 + 16u + 8v + 20w - 4 = 0,$$

$$d_3 = -4v^2 + 8v + 4w - 4 = 0.$$

Wir haben jetzt also drei Bedingungen für unsere gesuchten Kreise: $d_1 = d_2 = d_3 = 0$. Wir suchen die Lösungen dieser drei Gleichungen in u, v, w .

2. Aus der dritten Gleichung berechnen wir w :

$$w = v^2 - 2v + 1.$$

Setzt man dies jetzt ein, so bleiben die beiden Gleichungen

$$\frac{d_1}{4} = -u^2 + 2uv + v^2 + 4u - 8v - 2 = 0,$$

$$\frac{d_2}{16} = -u^2 - uv + v^2 + u - 2v + 1 = 0.$$

3. Die zweite Gleichung läßt sich ersetzen durch

$$d_3 = \frac{1}{3} \left(\frac{d_2}{16} - \frac{d_1}{4} \right) = -uv - u + 2v + 1 = 0.$$

Aus $d_3 = 0$ berechnet man jetzt v zu

$$v = -\frac{u-1}{u-2},$$

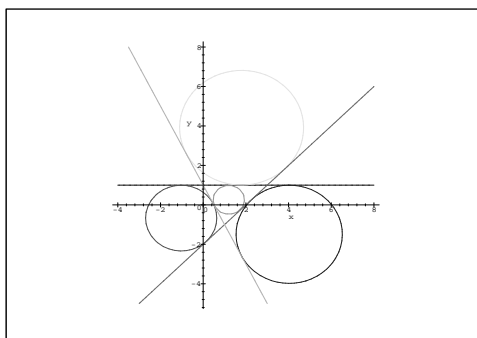
sodaß die letzte Gleichung $d_1 = 0$ jetzt zu

$$-\frac{d_1}{4} = \frac{u^4 - 6u^3 + 7u^2 + 6u - 9}{(u-2)^2} = 0$$

wird. Wir erhalten also eine Gleichung 4. Grades für u . Numerisch findet man dann:

u	-1.03	1.20	1.80	4.03
v	-0.67	0.26	3.91	-1.49
w	2.79	0.55	8.45	6.21
r	1.67	0.74	2.91	2.49

Wir haben also ein geometrisches Problem in die Algebra übersetzt, die entsprechenden Gleichungen manipuliert und gelöst. Als Ergebnis erhalten wir vier Kreise.

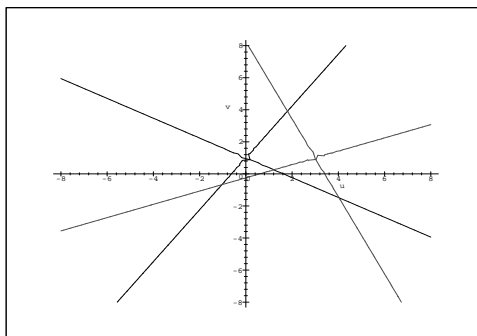


4. Wir wollen die beiden früheren Gleichungen

$$0 = -u^2 + 2uv + v^2 + 4u - 8v - 2$$

$$0 = -u^2 - uv + v^2 + u - 2v + 1$$

geometrisch untersuchen. Versucht man sie zu zeichnen, kommt man auf die Vermutung, daß es sich bei beiden Gleichungen um Geradenpaare handelt.



Durch Probieren findet man die Zerlegungen

$$0 = -u^2 + 2uv + v^2 + 4u - 8v - 2 = (v + u - 4 + \sqrt{2}(u-3))(v + u - 4 - \sqrt{2}(u-3))$$

$$0 = -u^2 - uv + v^2 + u - 2v + 1 = (v - \frac{1}{2}u - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{5}u)(v - \frac{1}{2}u - 1 - \frac{1}{2}\sqrt{5}u)$$

Die Schnittpunkte lassen sich hier natürlich sofort direkt ausrechnen:

$$u = \frac{3}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}, \quad v = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}, \quad w = \frac{9}{2} + 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

und natürlich die konjugierten Lösungen. (Man sieht hieran auch, daß Körpererweiterungen ins Spiel kommen.)

Beispiel 2:

1. Bestimme die Lösungen der Gleichung

$$a^2 + b^2 = c^2$$

in natürlichen Zahlen a, b, c . Z.B. $3^2 + 4^2 = 5^2$. Teilen wir die Gleichung durch c^2 , so erhalten wir

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1,$$

wir können also die Aufgabe auch so formulieren: Bestimme alle rationalen Zahlen x, y , die $x^2 + y^2 = 1$ erfüllen.

2. Die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ definiert geometrisch einen Kreis in der affinen Ebene. Wir wollen die Kreispunkte parametrisieren. Dazu betrachten wir die Geraden durch den Punkt $(-1, 0)$ mit Steigung t :

$$y = t(x + 1).$$

Wir schneiden den Kreis mit der Geraden:

$$0 = x^2 + t^2(x + 1)^2 - 1 = (1 + t^2)x^2 + 2t^2x + (t^2 - 1) = (1 + t^2)(x + 1)\left(x - \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right).$$

Der interessante Schnittpunkt ist also

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Wir haben jetzt also eine Parametrisierung unserer Kreispunkte erhalten. Z.B. gehört der Kreispunkt $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ zum t -Wert $\frac{1}{2}$. Setzt man ein $t = \frac{m}{n}$, so erhält man

$$x = \frac{n^2 - m^2}{n^2 + m^2}, \quad y = \frac{2mn}{n^2 + m^2}.$$

Daher

$$(n^2 - m^2)^2 + (2mn)^2 = (n^2 + m^2)^2.$$

So erhält man also Pythagoreische Tripel. Zeige, daß man so bis auf Vertauschung von a und b alle erhält. (Das Ergebnis ist natürlich auch elementar zu erhalten.)

3. Wir wollen die gewonnene Kreisparametrisierung ausnutzen, um das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

zu berechnen. Es ist

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad dx = -\frac{4t}{(1 + t^2)^2} dt, \quad \sqrt{1 - x^2} = y = \frac{2t}{1 + t^2},$$

also

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{-2dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{i} \left(\frac{1}{t+i} - \frac{1}{t-i} \right) dt = \\ &= \frac{1}{i} \log \frac{t+i}{t-i} = \frac{1}{i} \log \frac{y+i(x+1)}{y-i(x+1)} = \frac{1}{i} \log \frac{\sqrt{1-x^2} + i(x+1)}{\sqrt{1-x^2} - i(x+1)}. \end{aligned}$$

(Was hat dies mit $\arcsin(x)$ zu tun?)

Die algebraische Geometrie ist ein aktuelles Forschungsgebiet; einen Eindruck davon gewinnt man, wenn man die Liste der neu erscheinenden Preprints unter <http://xxx.lanl.gov/archive/alg-geom> ansieht. In Erlangen ist die algebraische Geometrie durch W. Barth, Ch. Birkenhake, W.-D. Geyer, J. Köhn, H. Lange, G. Martens vertreten. Von S. Endraß stammt das Programm SURF zum Zeichnen algebraischer Flächen.

Beispielhaft sei als Lehrbuchliteratur genannt:

- *R. Hartshorne*, Algebraic Geometry (1977): Ein Standardwerk zur Einführung in die moderne algebraische Geometrie.
- *J. Harris*, Algebraic Geometry (1992): Eine Einführung an Hand vieler Beispiele.

Die Vorlesung will mit einer Einführung in die algebraische Geometrie beginnen im Umfang von Hartshorne, Kapitel I. In den Übungen sollen die zugehörigen Aufgaben aus Hartshorne besprochen werden.

Affine Varietäten

Wir legen einen algebraisch abgeschlossenen Körper k zugrunde, z.B. \mathbf{C} , $\overline{\mathbf{Q}}$, $\overline{\mathbf{F}}_p$. Der n -dimensionale affine Raum ist

$$\mathbf{A}^n = k^n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in k\},$$

die Elemente heißen Punkte: $P = (a_1, \dots, a_n)$, die a_i 's Koordinaten des Punktes P .

Sei $A = k[x_1, \dots, x_n]$ der Polynomring über k in den Unbestimmten x_1, \dots, x_n . Die Elemente aus A liefern Funktionen auf \mathbf{A}^n : Für $f \in A$ und $P = (a_1, \dots, a_n)$ ist $f(P) = f(a_1, \dots, a_n)$.

Nullstellenmengen von Polynomen: Ist T eine Menge von Polynomen, so kann man dieser als geometrisches Objekt die gemeinsame Nullstellenmenge zuordnen:

$$Z(T) = \{P \in \mathbf{A}^n : f(P) = 0 \text{ für alle } f \in T\}.$$

Ist T endlich, so schreibt man auch

$$Z(f_1, \dots, f_r) = \{P \in \mathbf{A}^n : f_1(P) = \dots = f_r(P) = 0\}.$$

Beispiele:

1. $Z(x^2 - 2) \subseteq \mathbf{A}^1$ besteht aus zwei Punkten.
2. $Z(x^2 + y^2 - 1)$ deuten wir als Kreis in der Ebene.
3. $Z(xy) = \{x = 0\} \cup \{y = 0\}$.
4. $Z(xy - 1, x - y) = \{(-1, -1), (1, 1)\}$.

Bemerkungen:

1. Sei T eine Menge von Polynomen und $X = Z(T)$. Sind f und g Polynome in T , h ein beliebiges Polynom, so verschwinden f und g auf X , also auch $f + g$ und $h \cdot f$, d.h. auch alle Polynome aus dem von T erzeugten Ideal verschwinden auf X , d.h.

$$Z(T) = Z(\langle T \rangle).$$

2. In der Algebra lernt man, daß Polynomringe über Körpern noethersch sind, d.h. alle Ideale sind endlich erzeugt. Ist also T eine Menge von Polynomen, so gibt es immer Polynome f_1, \dots, f_r mit

$$Z(T) = Z(f_1, \dots, f_r).$$

DEFINITION 1. Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbf{A}^n$ heißt *algebraische Menge*, wenn sie Nullstellenmenge von Polynomen ist, d.h. wenn es Polynome f_1, \dots, f_r gibt mit

$$X = Z(f_1, \dots, f_r).$$

Die algebraischen Mengen sind die geometrischen Objekte, mit denen sich die Vorlesung befaßt.

LEMMA 1. Für die algebraischen Mengen von \mathbf{A}^n gilt:

- \emptyset und \mathbf{A}^n sind algebraisch,
- der Durchschnitt beliebig vieler algebraischer Mengen ist wieder algebraisch,
- die Vereinigung von endlich vielen algebraischen Mengen ist algebraisch.

Beweis:

1. Es ist $\emptyset = Z(1)$ und $\mathbf{A}^n = Z(0)$.

2. Sind $Z(T_i), i \in I$ algebraische Mengen in \mathbf{A}^n , so ist auch

$$\bigcap_{i \in I} Z(T_i) = Z(\bigcup_{i \in I} T_i)$$

algebraisch.

3. Sind $Z(f_1, \dots, f_r)$ und $Z(g_1, \dots, g_s)$ gegeben, so zeigen wir

$$Z(f_1, \dots, f_r) \cup Z(g_1, \dots, g_s) = Z(f_1 g_1, \dots, f_1 g_s, \dots, f_r g_1, \dots, f_r g_s),$$

\subseteq ist klar. \supseteq : Sei $P \in Z(f_i g_j : i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, s)$ und $P \notin Z(f_1, \dots, f_r)$. Dann gibt es ein f_m mit $f_m(P) \neq 0$. Da alle $f_m g_j$ auf P verschwinden, folgt $P \in Z(g_1, \dots, g_s)$. ■

DEFINITION 2. *Das Lemma zeigt, daß die algebraischen Teilmengen von \mathbf{A}^n die Eigenschaften der abgeschlossenen Mengen einer Topologie definieren. Man nennt die zugehörige Topologie die Zariski-Topologie auf \mathbf{A}^n . Nochmals anders ausgedrückt: Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbf{A}^n$ heißt (Zariski-)offen, wenn es Polynome f_1, \dots, f_r gibt mit $U = \mathbf{A}^n \setminus Z(f_1, \dots, f_r)$.*

Beispiel: Die algebraischen Teilmengen von \mathbf{A}^1 .

- Der Ring $k[x]$ ist ein Hauptidealring, d.h. jede algebraische Menge von \mathbf{A}^1 hat die Form $Z(f)$ mit einem Polynom f .
- Natürlich ist $Z(0) = \mathbf{A}^1$ und $Z(1) = \emptyset$.
- Ein nichtkonstantes Polynom f läßt sich schreiben

$$f = c(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n),$$

also ist

$$Z(f) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

eine endliche Menge von Punkten. Umgekehrt hat natürlich jede endliche Menge von Punkten die Form $Z(f)$.

- Die abgeschlossenen Mengen sind also \emptyset, \mathbf{A}^1 und jede endliche Menge von Punkten.
- Jede nichtleere offene Menge hat die Form

$$\mathbf{A}^1 \setminus \{P_1, \dots, P_n\}.$$

Bemerkung: Die Zariski-Topologie auf \mathbf{A}^n induziert natürlich auch auf jeder Teilmenge von \mathbf{A}^n eine Topologie. Man nennt sie wieder Zariski-Topologie.

DEFINITION 3. *Ein topologischer Raum X heißt irreduzibel, wenn sich X nicht zerlegen läßt, d.h. aus $X = X_1 \cup X_2$ mit abgeschlossenen Mengen X_1, X_2 , folgt bereits $X = X_1$ oder $X = X_2$. Ist X nicht irreduzibel, so nennen wir X reduzibel. Die leere Menge bezeichnen wir nicht als irreduzibel.*

Beispiele:

1. \mathbf{A}^1 ist irreduzibel.
2. $Z(xy) \subseteq \mathbf{A}^2$ ist nicht irreduzibel.
3. $Z(x^2 - yz, xz - x) \subseteq \mathbf{A}^3$ ist reduzibel, da es sich in $Z(x, y), Z(x, z), Z(x^2 - y, z - 1)$ zerlegen läßt.
4. $Z(xy - 1)$ ist irreduzibel.

Beispiel: Sei X irreduzibel und U nichtleere offene Teilmenge von X . Dann ist auch U irreduzibel und liegt dicht in X .

DEFINITION 4. *Eine affine Varietät ist eine abgeschlossene irreduzible Teilmenge eines affinen Raumes \mathbf{A}^n . Eine quasi-affine Varietät ist eine offene Teilmenge einer affinen Varietät.*

Beispiel: $X = Z(x - y) \subseteq \mathbf{A}^2$ ist eine affine Varietät, $X \setminus \{(0, 0)\}$ ist eine quasi-affine Varietät.

Nun wollen wir von der Geometrie zurück zur Algebra: Ist Y eine Teilmenge von \mathbf{A}^n , so betrachten wir alle Polynome, die auf Y verschwinden:

$$I(Y) = \{f \in A : f(P) = 0 \text{ für alle } P \in Y\}.$$

$I(Y)$ ist ein Ideal im Polynomring A . Es gilt der Satz:

SATZ 1. 1. $T_1 \subseteq T_2 \subseteq A \Rightarrow Z(T_1) \supseteq Z(T_2)$.

2. $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \mathbf{A}^n \Rightarrow I(Y_1) \supseteq I(Y_2)$.
3. $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$.
4. $Z(I(Y)) = \overline{Y}$, der Zariski-Abschluß von Y .

Beweis: Klar. ■

Wir hatten am Anfang vorausgesetzt, daß der Grundkörper k algebraisch abgeschlossen ist. Geometrisch läßt sich das so charakterisieren: Ein Körper k ist genau dann algebraisch abgeschlossen, wenn jedes nicht konstante Polynom in $k[x]$ eine Nullstelle in k hat. Dies verallgemeinert sich auf den Polynomring $A = k[x_1, \dots, x_n]$:

SATZ 2 (Hilbertscher Nullstellensatz, 1. Version). *Ist k algebraisch abgeschlossen und \mathfrak{a} ein Ideal in $A = k[x_1, \dots, x_n]$ mit $\mathfrak{a} \neq A$, so ist $Z(\mathfrak{a}) \neq \emptyset$.*

Der der Beweis hier etwas aus dem Rahmen fallen würde, verzichten wir darauf. Einen Beweis findet man in Büchern der Kommutativen Algebra oder Langs Algebra.

Für ein Ideal \mathfrak{a} in A wollen wir jetzt $I(Z(\mathfrak{a}))$ betrachten. Ist $f \in \mathfrak{a}$, so verschwindet f auf $Z(\mathfrak{a})$, also gilt $\mathfrak{a} \subseteq I(Z(\mathfrak{a}))$. Das läßt sich erweitern: Ist f ein Polynom, $m \in \mathbf{N}$ mit $f^m \in \mathfrak{a}$, so verschwindet f^m auf $Z(\mathfrak{a})$, also auch f , d.h. $f \in I(Z(\mathfrak{a}))$. Das Polynom f gehört zum Radikalideal $\sqrt{\mathfrak{a}}$ von \mathfrak{a} :

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{f \in A : f^m \in \mathfrak{a} \text{ für ein } m \in \mathbf{N}\}.$$

Damit gilt also $\sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq I(Z(\mathfrak{a}))$.

SATZ 3 (Hilbertscher Nullstellensatz). *Ist k algebraisch abgeschlossen und \mathfrak{a} ein Ideal in $k[x_1, \dots, x_n]$, so gilt*

$$I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Beweis: \supseteq haben wir bereits gesehen. \subseteq : Sei $f \in I(Z(\mathfrak{a}))$, $f \neq 0$ und $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_r)$. Wir betrachten das Ideal $\mathfrak{b} = (\mathfrak{a}, fy - 1) = (f_1, \dots, f_r, fy - 1)$ im Polynomring $B = k[x_1, \dots, x_n, y]$ mit einer neuen Variablen y . Ist $(p_1, \dots, p_n, q) \in Z(\mathfrak{b})$, so ist $(p_1, \dots, p_n) \in Z(\mathfrak{a})$, also $f(p_1, \dots, p_n) = 0$, andererseits aber $f(p_1, \dots, p_n)q = 1$, was nicht sein kann. Damit ist $Z(\mathfrak{b}) = \emptyset$, nach der 1. Version des Hilbertschen Nullstellensatzes also $\mathfrak{b} = k[x_1, \dots, x_n, y]$. Also gibt es wegen $1 \in \mathfrak{b}$ Polynome $g(x_1, \dots, x_n, y)$ und $g_i(x_1, \dots, x_n, y)$ mit

$$1 = g(x_1, \dots, x_n, y)(fy - 1) + g_1(x_1, \dots, x_n, y)f_1 + \dots + g_r(x_1, \dots, x_n, y)f_r.$$

Wir setzen ein $y = \frac{1}{f}$ (und rechnen in $\text{Quot}(A)$):

$$1 = g_1(x_1, \dots, x_n, \frac{1}{f})f_1 + \dots + g_r(x_1, \dots, x_n, \frac{1}{f})f_r.$$

Also Nenner tritt eine Potenz f^m auf. Multipliziert man also mit f^m , so erhält man $f^m \in (f_1, \dots, f_r) = \mathfrak{a}$ wie behauptet. ■

Beispiele:

1. Betrachte $\mathfrak{a} = (x^2, y^2)$. Dann ist $Z(\mathfrak{a}) = \{(0, 0)\}$ und $I(Z(\mathfrak{a})) = (x, y)$.
2. Die Voraussetzung k algebraisch abgeschlossen im Hilbertschen Nullstellensatz ist wichtig. Denn wählen wir z.B. $k = \mathbf{R}$, so ist $I(Z(x^2 + 1)) = I(\emptyset) = \mathbf{R}[x]$.

Eine unmittelbare Folgerung ist:

FOLGERUNG 1. *Die algebraischen Teilmengen von \mathbf{A}^n stehen in Bijektion zu den Radikalidealen ($\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$) von $A = k[x_1, \dots, x_n]$ vermöge den Zuordnungen*

$$X \mapsto I(X) \quad \text{und} \quad \mathfrak{a} \mapsto Z(\mathfrak{a}).$$

Wir wollen jetzt algebraisch charakterisieren, wann eine algebraische Menge irreduzibel ist.

Erinnerung an Primideale:

- Ein Ideal $\mathfrak{p} \neq R$ eines kommutativen Rings R heißt Primideal, wenn gilt: $fg \in \mathfrak{p}$ impliziert $f \in \mathfrak{p}$ oder $g \in \mathfrak{p}$. Das kann auch so formuliert werden: $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ impliziert $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$.

- \mathfrak{p} ist genau dann ein Primideal, wenn R/\mathfrak{p} ein Integritätsring ist.
- Primideale in \mathbf{Z} : 0 und (p) , wo p eine Primzahl ist.
- Beispiele für Primideale für $R = k[x_1, \dots, x_n]$:
 - Ist f ein irreduzibles Polynom, so ist (f) ein Primideal.
 - 0 ist ein Primideal.
 - $(x_1 - c_1, \dots, x_n - c_n)$ ist ein Primideal, ja sogar maximal.
- Ist \mathfrak{p} ein Primideal, so folgt aus $f^r \in \mathfrak{p}$ sofort $f \in \mathfrak{p}$, d.h. $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{p}}$.

SATZ 4. Eine algebraische Menge $X \subseteq \mathbf{A}^n$ ist genau dann irreduzibel, wenn $I(X)$ ein Primideal ist.

Beweis:

- Sei X irreduzibel und $\mathfrak{a} = I(X)$. Dann ist $\mathfrak{a} \neq A$. Sind f und g Polynome mit $fg \in \mathfrak{a}$, dann ist $X \subseteq Z(fg) = Z(f) \cup Z(g)$, also $X = (X \cap Z(f)) \cup (X \cap Z(g))$. Da X irreduzibel ist, gilt $X = X \cap Z(f)$ oder $X = X \cap Z(g)$, d.h. $X \subseteq Z(f)$ oder $X \subseteq Z(g)$ und damit $f \in \mathfrak{a}$ oder $g \in \mathfrak{a}$. Dies zeigt, daß \mathfrak{a} ein Primideal ist.
- Sei \mathfrak{p} ein Primideal. Angenommen $Z(\mathfrak{p}) \subset Z(\mathfrak{a}) \cup Z(\mathfrak{b})$. Nun ist $Z(\mathfrak{a}) \cup Z(\mathfrak{b}) = Z(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$, also dann $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$. Da \mathfrak{p} Primideal ist, folgt $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$, also $Z(\mathfrak{p}) \subseteq Z(\mathfrak{a})$ oder $Z(\mathfrak{p}) \subseteq Z(\mathfrak{b})$. Also ist $Z(\mathfrak{a})$ irreduzibel. ■

Beispiele:

1. \mathbf{A}^n ist irreduzibel, da $I(\mathbf{A}^n) = 0$ ein Primideal in $A = k[x_1, \dots, x_n]$ ist.
2. Ist $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ ein irreduzibles Polynom, so ist also $Z(f)$ irreduzibel, definiert also eine affine Varietät. Für $n = 2$ spricht man von Kurve, für $n = 3$ von Fläche, für $n > 3$ von Hyperfläche.

Wir wollen jetzt Funktionen auf einer algebraischen Menge $X \subseteq \mathbf{A}^n$ betrachten. Ganz natürlich liefert jedes Polynom $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ eine Funktion auf X . Ist $f \in I(X)$, so ist $(f+g)(P) = f(P)$ für alle $P \in X$, d.h. man kann f um Polynome aus $I(X)$ abändern ohne die Funktion zu ändern. Umgekehrt liefern zwei Polynome f und g gleiche Funktion auf X , wenn gilt:

$$f(P) = g(P) \text{ für alle } P \in X \iff (f-g)(P) = 0 \text{ für alle } P \in X \iff f-g \in I(X) \iff f \equiv g \pmod{I(X)}.$$

Also definieren die Elemente aus $k[x_1, \dots, x_n]/I(X)$ Funktionen auf X .

DEFINITION 5. Der affine Koordinatenring $A(X)$ einer algebraischen Menge $X \subseteq \mathbf{A}^n$ ist der Ring $k[x_1, \dots, x_n]/I(X)$.

Beispiele:

- $A(\mathbf{A}^n) = k[x_1, \dots, x_n]$, $A(\text{Punkt}) = k$.
- Ist $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ ein irreduzibles Polynom, so ist $A(Z(f)) = k[x_1, \dots, x_n]/(f)$.
- $X = \{-1, 1\} \subseteq \mathbf{A}^1$. Dann ist $I(X) = (x^2 - 1)$ und $A(X) = k[x]/(x^2 - 1)$. Mit dem chinesischen Restsatz gilt: $A(X) \simeq k \oplus k$ mit der Abbildung $f \mapsto ((f(1), f(-1)))$.

SATZ 5. Eine algebraische Menge $X \subseteq \mathbf{A}^n$ ist genau dann irreduzibel, wenn $A(X)$ ein Integritätsring ist.

Beweis: Dies folgt aus den Äquivalenzen

$$X \text{ irreduzibel} \iff I(X) \text{ Primideal} \iff A(X) = k[x_1, \dots, x_n]/I(X) \text{ Integritätsring.} \blacksquare$$

Beispiel: Sei $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ ein nichtkonstantes Polynom. Der Ring $k[x_1, \dots, x_n]$ ist faktoriell, also gibt es irreduzible Polynome p_1, \dots, p_r , natürliche Zahlen e_1, \dots, e_r , so daß gilt $f = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$. Dann hat man durch

$$Z(f) = Z(p_1) \cup \dots \cup Z(p_r)$$

die algebraische Menge $Z(f)$ in eine Vereinigung von irreduziblen Hyperflächen $Z(p_i)$ zerlegt. Dieses Beispiel wird durch den folgenden Satz verallgemeinert.

SATZ 6. Jede algebraische Teilmenge X von \mathbf{A}^n besitzt eine Zerlegung

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_r,$$

wo die X_i irreduzibel, d.h. Varietäten sind. Setzt man noch voraus, daß kein X_i in einem anderen X_j enthalten ist, so ist die Zerlegung eindeutig. Die X_i heißen die irreduziblen Komponenten von X .

Beweis:

- Wir wollen zuerst die Existenz einer Zerlegung zeigen. Wir nehmen an, X ist nicht endliche Vereinigung irreduzibler algebraischer Mengen. Insbesondere ist X selbst nicht irreduzibel, d.h. es gibt eine echte Zerlegung $X = X_1 \cup X_{1a}$. Nicht alle beide X_1, X_{1a} können sich in endlich viele irreduzible Bestandteile zerlegen lassen, sonst wären wir fertig. O.E. erfüllt auch X_1 nicht den Satz. Insbesondere ist X_1 zerlegbar: $X_1 = X_2 \cup X_{2a}$. Und wieder können wir annehmen, daß X_2 den Satz nicht erfüllt. Wir können uns so eine Folge abgeschlossener Teilmengen von \mathbf{A}^n konstruieren:

$$X \supset X_1 \supset X_2 \supset X_3 \dots,$$

wo die Inklusionen echt sind. Nun gehört dazu nach unserer Korrespondenz eine Folge von Radikalidealen

$$\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{a}_3 \dots,$$

wo die Inklusionen auch echt sind. Das gibt es aber nicht, denn: $\bigcup \mathfrak{a}_i$ ist ein Ideal der Form (f_1, \dots, f_m) . Es gibt dann ein N mit $f_i \in \mathfrak{a}_N$, also

$$\mathfrak{a}_N = \mathfrak{a}_{N+1} = \mathfrak{a}_{N+2} = \dots,$$

was obiger Aussage widerspricht. Damit erhalten wir einen Widerspruch, die erste Aussage ist also falsch.

- Nun zur Eindeutigkeit der Zerlegung: Sei

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_r = Y_1 \cup \dots \cup Y_s$$

wie im Satz. Dann ist

$$Y_i = (Y_i \cap X_1) \cup \dots \cup (Y_i \cap X_r)$$

eine Zerlegung von Y_i . Da Y_i irreduzibel ist, gibt es ein $\sigma(i)$ mit $Y_i \subseteq X_{\sigma(i)}$. Aus Symmetriegründen gibt es ein $\tau(j)$ mit $X_j \subseteq Y_{\tau(j)}$. Damit:

$$Y_i \subseteq X_{\sigma(i)} \subseteq Y_{\tau(\sigma(i))}$$

und aus unseren Voraussetzungen folgt $Y_i = X_{\sigma(i)}$. Damit folgt schnell die Eindeutigkeit der Zerlegung. ■

Eine algebraische Menge in ihre irreduziblen Komponenten zu zerlegen ist i.a. ein nichttriviales Problem.

Beispiel: Eine algebraische Menge $X \subseteq \mathbf{A}^1$ ist entweder \mathbf{A}^1 selbst oder eine endliche Menge von Punkten.

Beispiel: Sei $X = Z(f_1, \dots, f_d) \subseteq \mathbf{A}^2$ eine algebraische Menge und o.E. $X \neq \mathbf{A}^2$.

1. Sei $f_i = fg_i$ mit $f = \gcd(f_1, \dots, f_d)$. Dann ist $X = Z(f) \cup Z(g_1, \dots, g_d)$.
2. Ist f nicht konstant und $f = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$ die Primfaktorzerlegung von f , so ist

$$Z(f) = Z(p_1) \cup \dots \cup Z(p_r).$$

3. Ist $d = 1$, so sind wir bereits fertig. Andernfalls können wir annehmen, daß g_1 und g_2 teilerfremd sind. Wir bilden dann die Resultanten

$$h_x = \text{resultant}(g_1, g_2, y), \quad h_y = \text{resultant}(g_1, g_2, x),$$

wo jetzt h_x ein Polynom in x , h_y ein Polynom in y ist. Bekanntlich liegen h_x und h_y in dem von g_1 und g_2 erzeugten Ideal. Sei $h_x = c_x(x - x_1) \dots (x - x_s)$ und $h_y = c_y(y - y_1) \dots (y - y_t)$. Wegen

$$Z(g_1, \dots, g_d) \subseteq Z(g_1, g_2) \subseteq Z(h_x, h_y) = \{(x_i, y_j) : i = 1 \dots s, j = 1 \dots t\}$$

ist dann X eine Vereinigung endlich vieler Punkte und endlicher vieler Kurven.

Erinnerung an die Resultante:

- \mathbf{A}^2 hat Dimension 2, denn als irreduzible abgeschlossene Teilmengen haben wir kennengelernt: Punkte $Z(x - a, y - b)$, Kurven $Z(f)$ (mit f irreduzibel) und \mathbf{A}^2 .

Wie übersetzt sich der Dimensionsbegriff in die Algebra? Eine algebraische Menge $X \subseteq \mathbf{A}^n$ ist genau dann irreduzibel, wenn $I(X)$ ein Primideal ist.

DEFINITION 7. Sei R ein Ring und $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal. Dann heißt

$$h(\mathfrak{p}) = \sup\{n : \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}, \mathfrak{p}_i \text{ Primideal für } i = 0, \dots, n\}$$

die Höhe von \mathfrak{p} . Die (Krull-)Dimension von R ist

$$\dim R = \sup\{h(\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \text{ Primideal}\}.$$

Beispiele:

1. In einem Körper k gibt es außer 0 keine Primideale, also ist $\dim k = 0$.
2. In \mathbf{Z} gilt $h(0) = 0$ und $h((p)) = 1$, also $\dim \mathbf{Z} = 1$.
3. Ist $k[x]$ algebraisch abgeschlossen, so sind die Primideale 0 und $x - c$ mit $c \in k$. Also folgt $\dim k[x] = 1$.
4. Jeder Hauptidealring hat Dimension 1. (Übung)

Ohne Beweis geben wir folgenden Satz an:

SATZ 7. Sei \mathfrak{p} ein Primideal in $A = k[x_1, \dots, x_n]$ und $B = A/\mathfrak{p}$. Dann gilt:

1. $\dim B$ ist der Transzendenzgrad des Quotientenkörpers von B über k .
2. Ist \mathfrak{q} ein Primideal in B , so gilt

$$h(\mathfrak{q}) + \dim B/\mathfrak{q} = \dim B.$$

Damit kann man oft die Dimension eines Ringes ausrechnen.

Beispiele:

1. $k[x_1, \dots, x_n]$ hat Dimension n .
2. Ist $f(x_1, \dots, x_n)$ ein irreduzibles Polynom und kommt x_n explizit in f vor, so ist $\text{Quot}(k[x_1, \dots, x_n]/(f))$ algebraisch über $k(x_1, \dots, x_{n-1})$, also hat $k[x_1, \dots, x_n]/(f)$ Dimension $n - 1$.

SATZ 8. Ist $X \subseteq \mathbf{A}^n$ eine algebraische Menge, so gilt

$$\dim X = \dim A(X).$$

Beweis: Die abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen von X stehen in Bijektion zu den Primidealen von $A = k[x_1, \dots, x_n]$, die $I(X)$ enthalten, diese wiederum in Bijektion zu den Primidealen von $A(X)$. Daraus ergibt sich die Behauptung. ■

Wir geben ohne Beweis noch einen Satz aus der kommutativen Algebra an.

SATZ 9 (Krullscher Hauptidealsatz). Ist R ein noetherscher Ring und $f \in R$ weder Nullteiler noch Einheit, so hat jedes minimale Primideal \mathfrak{p} , das f enthält, Höhe 1.

SATZ 10. Ein noetherscher Integritätsring R ist genau dann ein faktorieller Ring, wenn jedes Primideal der Höhe 1 ein Hauptideal ist.

Beweis:

- Sei R faktoriell und \mathfrak{p} ein Primideal der Höhe 1. Wähle $f \in \mathfrak{p}$ mit $f \neq 0$. Das Element f hat eine Primfaktorzerlegung $f = p_1 \dots p_r$. Aus $p_1 \dots p_r \in \mathfrak{p}$ folgt, daß es einen Index s gibt mit $p_s \in \mathfrak{p}$. Nun haben wir die Kette von Primidealen $0 \subset (p_s) \subseteq \mathfrak{p}$. Da \mathfrak{p} Höhe 1 hat, folgt $\mathfrak{p} = (p_s)$.
- Wir zeigen jetzt die Umkehrung. Da R noethersch ist, ist jedes Element $f \in R$, das keine Einheit und nicht 0 ist, Produkt von endlich vielen irreduziblen Elementen. Es genügt dann zu zeigen, daß jedes irreduzible Element prim ist. Sei also f irreduzibel. Sei \mathfrak{p} ein minimales Primoberideal von (f) . Nach dem Krullschen Hauptidealsatz ist $h(\mathfrak{p}) = 1$ und nach Voraussetzung gibt es ein Primelement p mit $\mathfrak{p} = (p)$. Also ist $(f) \subseteq (p)$, es gibt daher ein $g \in R$ mit $f = pg$. Da f irreduzibel ist, muß g eine Einheit sein, also ist f auch prim. ■

Dieser Satz hat jetzt eine unmittelbare geometrische Anwendung.

SATZ 11. *Eine Varietät $X \subseteq \mathbf{A}^n$ hat genau dann Dimension $n - 1$, wenn es ein irreduzibles Polynom f gibt mit $X = Z(f)$.*

Beweis: Ist f ein irreduzibles Polynom, so haben wir bereits gesehen, daß $Z(f)$ eine Varietät der Dimension $n - 1$ ist. Sei umgekehrt $X \subseteq \mathbf{A}^n$ eine Varietät der Dimension $n - 1$. Dann ist $\mathfrak{p} = I(X)$ ein Primideal. Aus $h(\mathfrak{p}) + \dim A/\mathfrak{p} = \dim \bar{A}$ folgt $h(\mathfrak{p}) = 1$, da $A = k[x_1, \dots, x_n]$ faktoriell ist, gibt es nach dem letzten Satz also ein irreduzibles Polynom f mit $\mathfrak{p} = (f)$, was die Behauptung beweist. ■

Projektive Varietäten

DEFINITION 8. Der n -dimensionale projektive Raum \mathbf{P}^n ist $(k^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$, wo

$$(a_0, a_1, \dots, a_n) \sim (b_0, b_1, \dots, b_n) \iff b_i = \lambda a_i \text{ für ein } \lambda \in k, \lambda \neq 0.$$

Für einen Punkt $P \in \mathbf{P}^n$ schreiben wir $P = (a_0 : a_1 : \dots : a_n)$ und nennen die a_i homogene Koordinaten von P . Also

$$(a_0 : a_1 : \dots : a_n) = (b_0 : b_1 : \dots : b_n) \iff b_i = \lambda a_i, i = 0, \dots, n.$$

Die Punkte des \mathbf{P}^n entsprechen also den Geraden des \mathbf{A}^n , die durch 0 gehen.

Erste Deutung:

- Sei $(a_0 : a_1) \in \mathbf{P}^1$. Ist $a_0 \neq 0$, so ist $(a_0 : a_1) = (1 : \frac{a_1}{a_0})$, ist $a_0 = 0$, so $a_1 \neq 0$, also $(a_0 : a_1) = (0 : 1)$.
Damit:

$$\mathbf{P}^1 = \{(a_0 : a_1) : (a_0, a_1) \neq (0, 0)\} = \{(1 : a) : a \in k\} \cup \{(0 : 1)\} \simeq \mathbf{A}^1 \cup \{\text{Punkt}\} = \mathbf{A}^1 \cup \mathbf{A}^0.$$

- Analog wie eben

$$\mathbf{P}^2 = \{(1 : a : b) : a, b \in k\} \cup \{(0 : 1 : a) : a \in k\} \cup \{(0 : 0 : 1)\} = \mathbf{A}^2 \cup \mathbf{A}^1 \cup \mathbf{A}^0.$$

Wir wollen wieder Nullstellenmengen von Polynomen betrachten. Dazu braucht man homogene Polynome.

DEFINITION 9. Ein Polynom $f \in k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ heißt homogen vom Grad d , wenn gilt:

$$f(tx_0, tx_1, \dots, tx_n) = t^d f(x_0, x_1, \dots, x_n).$$

Äquivalent dazu ist, daß alle in f auftretenden Monome Grad d haben, d.h. f hat die Form

$$f = \sum_{i_0 + \dots + i_n = d} a_{i_0 \dots i_n} x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n}.$$

Sei jetzt $P = (a_0 : \dots : a_n) \in \mathbf{P}^n$ und $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ homogen vom Grad d . Die homogenen Koordinaten von P sind nicht eindeutig bestimmt, nur bis auf ein Vielfaches λ . Nun ist

$$f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = \lambda^d f(a_0, \dots, a_n).$$

Also kann man nicht vom Wert von f in P sprechen. Aber man kann sagen, ob f in P den Wert 0 annimmt oder nicht.

DEFINITION 10. Sei T eine Menge homogener Polynome in $k[x_0, \dots, x_n]$. Dann sei

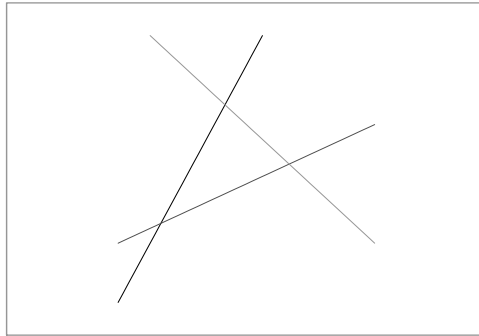
$$Z(T) = \{P \in \mathbf{P}^n : f(P) = 0 \text{ für alle } f \in T\}.$$

Mengen dieser Bauart nennen wir algebraisch.

Beispiel: Wir betrachten in \mathbf{P}^2 ein paar einfache algebraische Mengen:

- $Z(x_0) = \{(0 : a_1 : a_2)\} \sim \mathbf{P}^1$, analog $Z(x_1)$ und $Z(x_2)$.
- $Z(x_0, x_1) = \{(0 : 0 : 1)\}$, etc.

- Man skizziert dies oft wie folgt:



Wie zuvor zeigt man:

LEMMA 2. Für die algebraischen Mengen in \mathbf{P}^n gilt:

- \emptyset und \mathbf{P}^n sind algebraisch,
- der Durchschnitt beliebig vieler algebraischer Mengen ist algebraisch,
- die Vereinigung endlich vieler algebraischer Mengen ist algebraisch.

DEFINITION 11. Die algebraischen Mengen in \mathbf{P}^n definieren also die abgeschlossenen Mengen einer Topologie. Wir nennen dies die Zariski-Topologie auf \mathbf{P}^n .

Sei $H_i = Z(x_i)$. Dann ist $U_i = \mathbf{P}^n \setminus H_i$ offen. Wir definieren $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbf{A}^n$ durch

$$\phi_i(a_0 : \dots : a_n) = \left(\frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i} \right).$$

ϕ_i ist bijektiv, die Umkehrabbildung ist $\psi : \mathbf{A}^n \rightarrow U_i$ mit

$$\psi(b_1, \dots, b_n) = (b_1 : \dots : b_i : 1 : b_{i+1} : \dots : b_n).$$

Wir erhalten durch die U_i eine affine Überdeckung von \mathbf{P}^n .

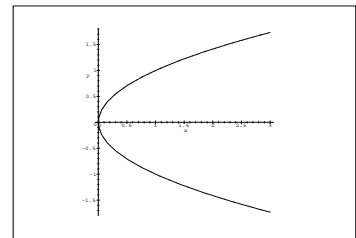
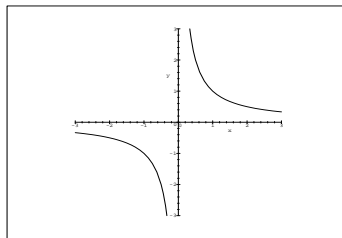
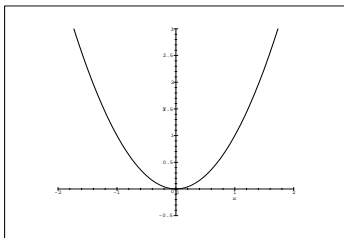
Beispiel: $X = Z(x_0x_2 - x_1^2) \subseteq \mathbf{P}^2$ ist eine abgeschlossene Teilmenge des \mathbf{P}^2 . Dann ist

$$X \cap H_0 = \{(1 : x : y) : y = x^2\} \simeq Z(y - x^2) \subseteq \mathbf{A}^2,$$

$$X \cap H_1 = \{(x : 1 : y) : xy = 1\} \simeq Z(xy - 1) \subseteq \mathbf{A}^2,$$

$$X \cap H_2 = \{(x : y : 1) : x = y^2\} \simeq Z(x - y^2) \subseteq \mathbf{A}^2.$$

Hyperbel und Parabel sind also nur verschiedene affine Ansichten der projektiven Quadrik $x_0x_2 = x_1^2$.



Wir wollen nun die Beziehung projektiv - affin an Hand der Polynome studieren. Sei $f(x_1, \dots, x_n)$ ein Polynom vom Grad d , d.h.

$$f = \sum_{i_1 + \dots + i_n \leq d} a_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}.$$

Dann heißt

$$F(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_0 + \dots + i_n = d} a_{i_1 \dots i_n} x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n} = x_0^d f\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$$

die Homogenisierung von f . Natürlich erhält man f aus F zurück: $f = F(1, x_1, \dots, x_n)$.

Seien nun F_i homogene Polynome und $f_i(x_1, \dots, x_n) = F_i(1, x_1, \dots, x_n)$. Dann ist sofort klar

$$\phi_0(Z(F_i) \cap U_0) = Z(f_i) \subseteq \mathbf{A}^n.$$

Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

SATZ 12. Die bijektiven Abbildungen ϕ_i sind Homöomorphismen, d.h. stellen eine Bijektion zwischen den abgeschlossenen Mengen von U_i und den abgeschlossenen Mengen von \mathbf{A}^n her. (ϕ_i und ψ_i sind stetig.)

Ist X ein topologischer Raum, sind U_i offene Teilmengen mit $X = \cup_i U_i$, so gilt $\dim X = \sup_i \dim U_i$ (Übungsaufgabe), woraus man sofort erhält:

FOLGERUNG 2. $\dim \mathbf{P}^n = n$.

Wegen $\mathbf{A}^n \simeq U_0 \subseteq \mathbf{P}^n$ können wir \mathbf{A}^n als offene Teilmenge von \mathbf{P}^n auffassen, d.h.

$$\mathbf{A}^n = \{(1 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbf{P}^n\}.$$

Ist $X \subseteq \mathbf{A}^n$ eine algebraische Menge, dann nennen wir den topologischen Abschluß von $X \subseteq \mathbf{A}^n \subseteq \mathbf{P}^n$ in \mathbf{P}^n den projektiven Abschluß \overline{X} von X . Natürlich gilt $\overline{X} \cap \mathbf{A}^n = X$.

Beispiele:

1. Ist f ein Polynom und F seine Homogenisierung, so ist der projektive Abschluß von $Z(f) \subseteq \mathbf{A}^n$ die Menge $Z(F) \subseteq \mathbf{P}^n$.
2. Der projektive Abschluß der Parabel $y = x^2$ ist $x_0 x_2 = x_1^2$.
3. Ist $X = Z(f_1, \dots, f_r) \subseteq \mathbf{A}^n$, ist F_i die Homogenisierung von f_i , so muß nicht gelten $\overline{X} = Z(F_1, \dots, F_r)$. Beispielsweise ist $\{(0, 0)\} = Z(x, y - x^2)$, aber $Z(x_1, x_0 x_2 - x_1^2) = \{(1 : 0 : 0), (0 : 0 : 1)\}$.

Geraden in der Ebene:

- In der affinen Ebene \mathbf{A}^2 hat eine Gerade die Gestalt $y = ax + b$ oder $x = c$. Daraus wird projektiv: $x_2 = ax_1 + bx_0$ und $x_1 = cx_0$.
- Die Geraden $x = 1$ und $x = 2$ schneiden sich affin nicht. Die projektiven Abschlüsse $x_1 = x_0$ und $x_1 = 2x_0$ schneiden sich aber im Punkt $(0 : 0 : 1)$.
- Eine Gerade G_a in \mathbf{P}^2 ist die Nullstellenmenge eines linearen Polynoms $a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$, wo $(a_0, a_1, a_2) \neq 0$.
- Ist $a_2 \neq 0$, so ist $G_a \cap U_0 = \{y = -\frac{a_1}{a_2}x - \frac{a_0}{a_2}\}$, ist $a_2 = 0, a_1 \neq 0$, so ist $G_a \cap U_0 = \{x = -\frac{a_0}{a_1}\}$. Ist $a_1 = a_2 = 0$, so ist $G_a \cap U_0 = \emptyset$, $G_a = Z(x_0)$ ist die sogenannte unendlich ferne Gerade.
- Seien $a = (a_0, a_1, a_2), b = (b_0, b_1, b_2) \in k^3 \setminus \{0\}$. Sind a und b linear abhängig, so ist $G_a = G_b$. Sind a und b linear unabhängig, so hat das lineare Gleichungssystem $a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0$ einen eindimensionalen Lösungsraum, also besteht $G_a \cap G_b$ aus einem Punkt. Projektiv schneiden sich also zwei verschiedene Geraden immer in einem Punkt.

DEFINITION 12. Eine projektive Varietät ist eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge eines projektiven Raums \mathbf{P}^n . Eine quasi-projektive Varietät ist eine offene Teilmenge einer projektiven Varietät.

Aus obiger Definition folgt dann schnell folgender Satz:

SATZ 13. Ist $X \subseteq \mathbf{A}^n$ eine affine Varietät, so ist $\overline{X} \subseteq \mathbf{P}^n$ eine projektive Varietät und $\overline{X} \cap \mathbf{A}^n = X$. Ist $Y \subseteq \mathbf{P}^n$ eine projektive Varietät, so ist entweder $Y \cap \mathbf{A}^n = \emptyset$ oder $Y \cap \mathbf{A}^n$ eine affine Varietät und $Y = \overline{Y \cap \mathbf{A}^n}$.

Vieles überträgt sich vom Affinen auf das Projektive. Wir wollen hier hauptsächlich Unterschiedliches erwähnen.

Ideale: Jedes $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ zerlegt sich in homogene Bestandteile:

$$f = f_0 + f_1 + \dots + f_d.$$

f ist also genau dann homogen vom Grad d , wenn $f = f_d$. Ein homogenes Ideal ist ein Ideal, das von homogenen Elementen erzeugt wird. So definiert man für eine Teilmenge $Y \subseteq \mathbf{P}^n$:

$$I(Y) = (\{f \text{ homogen, } f \text{ verschwindet auf } Y\}).$$

Ist Y eine abgeschlossene Teilmenge des \mathbf{P}^n , so heißt

$$S(Y) = k[x_0, \dots, x_n]/I(Y)$$

der homogene Koordinatenring von Y . (Achtung: Wir interpretieren die Elemente aus $S(Y)$ nicht als Funktionen auf Y !)

Bemerkung:

- $Z(x_0, \dots, x_n) = \emptyset = Z(1)$, wir haben also hier nicht die gleiche Eindeutigkeit wie im affinen.
- Sonst gilt aber: $Z(\mathfrak{a}) \neq \emptyset$, dann ist $I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

Koordinatenwechsel: Manchmal ist es nützlich, Koordinaten zu wechseln. Sei $T \in GL_{n+1}(k)$ und

$$(x_i) = T \cdot (y_i).$$

Geht man dann von den x_i 's zu den y_i 's über, so nennt man dies einen projektiven Koordinatenwechsel. Zwei Teilmengen X und Y des \mathbf{P}^n heißen projektiv äquivalent, wenn sie durch einen Koordinatenwechsel auseinander hervorgehen. Die Gruppe, die auf den Punkten operiert, ist die $PGL_{n+1}(k)$.

Beispiel: Wir identifizieren \mathbf{P}^1 mit $k \cup \{\infty\}$. Die Gruppe $PGL_2(k)$ operiert dann auf \mathbf{P}^1 mit $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ (Möbiustransformation). Es gilt

$$T(0) = \frac{b}{d}, \quad T(\infty) = \frac{a}{c}, \quad T(1) = \frac{a+b}{c+d}.$$

Sind $A, B, C \in \mathbf{P}^1$ drei verschiedene Punkte, so gibt es genau eine Transformation T mit $T(0) = A, T(\infty) = B, T(1) = C$. Ist D ein weiterer Punkt, so gibt es genau ein t mit $D = T(t)$. Durch Nachrechnen findet man:

$$t = t(A, B, C, D) = \frac{(A-D)(B-C)}{(A-C)(B-D)}.$$

$t(A, B, C, D)$ wird auch Doppelverhältnis der 4 Punkte A, B, C, D genannt. Nun kann man zeigen: 4 verschiedene Punkte auf \mathbf{P}^1 sind genau dann projektiv äquivalent, wenn sie das gleiche Doppelverhältnis besitzen.

Lineare Teilräume: Eine algebraische Menge $X \subseteq \mathbf{P}^n$ heißt linearer Teilraum, wenn sich X durch lineare Gleichungen beschreiben läßt:

$$X = Z(a_{i0}x_0 + \dots + a_{in}x_n = 0, i = 1, \dots, m).$$

Ist $A = (a_{ij})$, x der aus den x_j 's gebildete Spaltenvektor, so ist $X = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbf{P}^n : A \cdot x = 0\}$. Natürlich kann man statt A auch eine Matrix SA verwenden, wenn S eine invertierbare Matrix ist. Ist r der Rang von A , so gibt es invertierbare Matrizen S und T mit

$$SAT = \text{diag}(0, \dots, 0, 1, \dots, 1),$$

wo in der Diagonalmatrix r Einser stehen. Machen wir in \mathbf{P}^n Koordinatenwechsel mit $T: y = Tx$, so wird X zu

$$X \simeq T(X) = \{(y_0 : \dots : y_n) \in \mathbf{P}^n : y_{n-r+1} = \dots = y_n = 0\} = \{(y_0 : \dots : y_{n-r} : 0 : \dots : 0)\} \simeq \mathbf{P}^{n-r}.$$

Also gilt $\dim X = n - \text{Rang}(A)$.

Natürlich ist der Durchschnitt linearer Teilräume wieder ein linearer Teilraum. Ein erster für das Projektive charakteristischer Satz ist der folgende:

SATZ 14. Für lineare Teilräume X_1 und X_2 von \mathbf{P}^n gilt:

$$\dim X_1 + \dim X_2 \geq n \quad \Rightarrow \quad X_1 \cap X_2 \neq \emptyset.$$

Beweis: X_i wird beschrieben durch eine Matrix A_i mit $\text{Rang}(A_i) = n - \dim X_i$. Der Durchschnitt $X_1 \cap X_2$ wird dann durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ beschrieben. Nun ist

$$\text{Rang}(A) \leq \text{Rang}(A_1) + \text{Rang}(A_2) = 2n - \dim X_1 - \dim X_2 \leq n$$

und damit

$$\dim X_1 \cap X_2 = n - \text{Rang}(A) \geq 0,$$

was die Behauptung beweist. ■

Als Lösung linearer Gleichungssysteme lassen sich lineare Teilräume natürlich auch parametrisiert beschreiben: Ist $X \subseteq \mathbf{P}^n$ ein linearer Teilraum der Dimension r , so gibt es Punkte $(a_{i0} : \cdots : a_{in}), i = 0, \dots, r$ mit

$$X = \{(a_{00}u_0 + \cdots + a_{0r}u_r : \cdots : a_{n0}u_0 + \cdots + a_{nr}u_r) : (u_0 : \cdots : u_r) \in \mathbf{P}^r\}.$$

Im Fall $\dim X = 1$ spricht man auch von Geraden, im Fall $\dim X = 2$ von Ebenen, im Fall $\dim X = n - 1$ von Hyperebenen.

Geraden im \mathbf{P}^3

Geraden im \mathbf{P}^2 : Eine Gerade im \mathbf{P}^2 hat die Gestalt $Z(a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2)$, wobei (a_0, a_1, a_2) bis auf einen Skalarfaktor eindeutig bestimmt ist. Die Abbildung $(a_0 : a_1 : a_2) \mapsto Z(a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2)$ liefert also eine Bijektion

$$\{ \text{Geraden im } \mathbf{P}^2 \} \simeq \mathbf{P}^2.$$

Wir sagen: Die Geraden im \mathbf{P}^2 bilden einen \mathbf{P}^2 .

Ist ℓ eine Gerade im \mathbf{P}^3 , sind $(a_0 : a_1 : a_2 : a_3), (b_0 : b_1 : b_2 : b_3)$ zwei verschiedene Punkte von ℓ , so ist

$$\ell = \{(a_0u + b_0v : a_1u + b_1v : a_2u + b_2v : a_3u + b_3v) : (u : v) \in \mathbf{P}^1\}.$$

Natürlich sind die a_i 's und b_i 's durch ℓ nicht eindeutig bestimmt. Sind auch $(c_0 : \dots : c_3), (d_0 : \dots : d_3)$ zwei verschiedene Punkte von ℓ , so gibt es eine invertierbare 2×2 -Matrix T mit

$$\begin{pmatrix} c_0 & d_0 \\ c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \cdot T, \quad \text{insbesondere} \quad \begin{pmatrix} c_i & d_i \\ c_j & d_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{pmatrix} \cdot T,$$

woraus durch Determinantenbildung folgt

$$c_i d_j - c_j d_i = (a_i b_j - a_j b_i) \cdot \det(T).$$

Definieren wir also $p_{ij} = a_i b_j - a_j b_i$, so ist $p_{ji} = -p_{ij}$, $p_{ii} = 0$ und

$$\pi(\ell) = (p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23})$$

ist unabhängig von $(a_0 : \dots : a_3)$ und $(b_0 : \dots : b_3)$ definiert. Man nennt die p_{ij} 's die Plückerkoordinaten der Geraden ℓ . Wir erhalten so eine Abbildung

$$\pi : \{ \text{Geraden im } \mathbf{P}^3 \} \rightarrow \mathbf{P}^5.$$

SATZ 15. Sei ℓ eine Gerade im \mathbf{P}^3 und $\pi(\ell) = (p_{01} : \dots : p_{23})$. Dann gilt

$$\ell = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) : \begin{pmatrix} 0 & p_{23} & -p_{13} & p_{12} \\ -p_{23} & 0 & p_{03} & -p_{02} \\ p_{13} & -p_{03} & 0 & p_{01} \\ -p_{12} & p_{02} & -p_{01} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\}.$$

Insbesondere ist eine Gerade durch ihre Plückerkoordinaten eindeutig bestimmt, d.h. π ist injektiv.

Beweis: Seien $(a_0 : \dots : a_3), (b_0 : \dots : b_3)$ zwei verschiedene Punkte auf ℓ und $p_{ij} = a_i b_j - a_j b_i$. Es gilt

$$\begin{aligned}
(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \ell &\iff \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & x_0 \\ a_1 & b_1 & x_1 \\ a_2 & b_2 & x_2 \\ a_3 & b_3 & x_3 \end{pmatrix} \text{ hat Rang } \leq 3 \\
&\iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x_1 \\ a_2 & b_2 & x_2 \\ a_3 & b_3 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & x_0 \\ a_2 & b_2 & x_2 \\ a_3 & b_3 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & x_0 \\ a_1 & b_1 & x_1 \\ a_3 & b_3 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & x_0 \\ a_1 & b_1 & x_1 \\ a_2 & b_2 & x_2 \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff \begin{aligned} p_{23}x_1 - p_{13}x_2 + p_{12}x_3 &= 0, & p_{23}x_0 - p_{03}x_2 + p_{02}x_3 &= 0 \\ p_{13}x_0 - p_{03}x_1 + p_{01}x_3 &= 0, & p_{12}x_0 - p_{02}x_1 + p_{01}x_2 &= 0 \end{aligned} \\
&\iff \begin{pmatrix} 0 & p_{23} & -p_{13} & p_{12} \\ -p_{23} & 0 & p_{03} & -p_{02} \\ p_{13} & -p_{03} & 0 & p_{01} \\ -p_{12} & p_{02} & -p_{01} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Ist $\pi(\ell) = (p_{01} : \dots : p_{23})$, so muß natürlich die Determinante der im Satz vorkommenden Matrix 0 sein. Die Determinante berechnet sich zu $(p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12})^2$, also folgt

$$\text{Bild}(\pi) \subseteq Z(p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12}) \subseteq \mathbf{P}^5,$$

wobei wir auf \mathbf{P}^5 die Koordinaten $p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23}$ verwenden.

SATZ 16. *Es gilt*

$$\text{Bild}(\pi) = Z(p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12}) \subseteq \mathbf{P}^5,$$

d.h. die Geraden im \mathbf{P}^3 bilden eine Quadrik im \mathbf{P}^5 , die sogenannte Plückerquadrik Q .

Beweis: Wir müssen nur noch zeigen, daß alle Punkte auf der Quadrik von Geraden herkommen. Sei also $(p_{01} : \dots : p_{23}) \in Z(p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12})$. Wir unterscheiden Fälle:

- $p_{01} \neq 0$, o.E. $p_{01} = 1$. Dann haben wir die Gleichung $p_{23} = p_{02}p_{13} - p_{03}p_{12}$. Durch Probieren findet man, daß die von den Punkten $(1 : 0 : -p_{12} : -p_{13})$ und $(0 : 1 : p_{02} : p_{03})$ aufgespannte Gerade die gewünschten Plückerkoordinaten hat.
- $p_{01} = 0, p_{02} \neq 0$, o.E. $p_{02} = 1$. Dann ist $p_{13} = p_{03}p_{12}$. Die von den Punkten $(1 : p_{12} : 0 : -p_{23})$ und $(0 : 0 : 1 : p_{03})$ aufgespannte Gerade hat dann die gewünschten Plückerkoordinaten.
- $p_{01} = p_{02} = 0, p_{03} \neq 0$, o.E. $p_{03} = 1$. Dann ist $p_{12} = 0$. Die Gerade durch $(1 : -p_{13} : -p_{23} : 0)$ und $(0 : 0 : 0 : 1)$ tut's.
- $p_{01} = p_{02} = p_{03} = 0$. Hier bleibt keine Einschränkung. Daß diese Fälle von Geraden herkommen, folgt aus den folgenden Beispielen: Die Gerade durch $(0 : 1 : 0 : -b)$ und $(0 : 0 : 1 : a)$ hat Plückerkoordinaten $(0 : 0 : 0 : 1 : a : b)$. Die Gerade durch $(0 : 1 : a : 0)$ und $(0 : 0 : 0 : 1)$ hat Plückerkoordinaten $(0 : 0 : 0 : 0 : 1 : a)$. Die Gerade durch $(0 : 0 : 1 : 0)$ und $(0 : 0 : 0 : 1)$ hat Plückerkoordinaten $(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1)$.

Da jetzt alle Fälle behandelt sind, folgt die Behauptung. \blacksquare

Wir wollen jetzt untersuchen, wann sich Geraden im \mathbf{P}^3 schneiden bzw. wann sie windschief sind.

SATZ 17. *Für zwei (verschiedene) Geraden ℓ und ℓ' im \mathbf{P}^3 mit $\pi(\ell) = (p_{01} : \dots : p_{23})$ und $\pi(\ell') = (q_{01} : \dots : q_{23})$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. ℓ und ℓ' schneiden sich.
2. $p_{01}q_{23} - p_{02}q_{13} + p_{03}q_{12} + p_{12}q_{03} - p_{13}q_{02} + p_{23}q_{01} = 0$.
3. Die Verbindungsgerade von $\pi(\ell)$ und $\pi(\ell')$ im \mathbf{P}^5 liegt auf Q .

Beweis: ℓ werde aufgespannt von $(a_0 : \dots : a_3)$ und $(b_0 : \dots : b_3)$, ℓ' von $(c_0 : \dots : c_3)$ und $(d_0 : \dots : d_3)$. Sei

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \ell \cap \ell' \neq \emptyset &\iff M \text{ hat Rang } \leq 3 \\ &\iff \det M = 0 \\ &\iff p_{01}q_{23} - p_{02}q_{13} + p_{03}q_{12} + p_{12}q_{03} - p_{13}q_{02} + p_{23}q_{01} = 0, \end{aligned}$$

wobei man bei der letzten Umformung die Determinante nach 2 + 2 Spalten entwickeln muß. Damit ist die Äquivalenz von 1. und 2. gezeigt. Die Verbindungsgerade von $\pi(\ell)$ und $\pi(\ell')$ ist

$$g = \{(p_{01}u + q_{01}v : \dots : p_{23}u + q_{23}v) : (u : v) \in \mathbf{P}^1\}.$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} g \subseteq Q &\iff (p_{01}u + q_{01}v)(p_{23}u + q_{23}v) - (p_{02}u + q_{02}v)(p_{13}u + q_{13}v) + (p_{03}u + q_{03}v)(p_{12}u + q_{12}v) = 0 \\ &\quad \text{für alle } u, v \\ &\iff p_{01}q_{23} - p_{02}q_{13} + p_{03}q_{12} + p_{12}q_{03} - p_{13}q_{02} + p_{23}q_{01} = 0, \end{aligned}$$

was schließlich die Äquivalenz von 2. und 3. beweist. ■

Für einen Punkt $P \in \mathbf{P}^3$, eine Ebene $H \subseteq \mathbf{P}^3$ mit $P \in H$ sei

$$\Sigma_{P,H} = \{\ell \text{ Gerade mit } P \in \ell \subseteq H\}.$$

SATZ 18. $\pi(\Sigma_{P,H})$ ist eine Gerade in \mathbf{P}^5 , die auf Q liegt. Umgekehrt hat jede auf Q liegende Gerade die Gestalt $\pi(\Sigma_{P,H})$.

Beweis: Sei $P = (a_0 : \dots : a_3)$, $(b_0 : \dots : b_3)$, $(c_0 : \dots : c_3)$ weitere Punkte, die zusammen H aufspannen. Ist $\ell \in \Sigma_{P,H}$, so gibt es u, v, w , so daß ℓ von $(a_0 : \dots : a_3)$ und $(a_0u + b_0v + c_0w : \dots : a_3u + b_3v + c_3w)$ aufgespannt wird. Die Plückerkoordinaten von ℓ sind dann:

$$p_{ij} = a_i(a_ju + b_jv + c_jw) - a_j(a_iu + b_iv + c_iw) = (a_ib_j - a_jb_i)v + (a_ic_j - a_jc_i)w.$$

Durchläuft also ℓ alle Geraden aus $\Sigma_{P,H}$, so die Bildpunkte alle Punkte einer Geraden. Dies beweist den ersten Teil der Aussage. Sei umgekehrt $g \subseteq Q$ eine Gerade. Wähle zwei verschiedene Punkte $\pi(\ell), \pi(\ell') \in g$. Dann schneiden sich ℓ und ℓ' in einem Punkt P und liegen in einer Ebene H . Offensichtlich muß dann $\pi(\Sigma_{P,H})$ mit g übereinstimmen, woraus sofort die Behauptung folgt. ■

Wir definieren weiter für einen Punkt $P \in \mathbf{P}^3$

$$\Sigma_P = \{\ell \text{ Gerade mit } P \in \ell\}$$

und für eine Ebene H

$$\Sigma_H = \{\ell \text{ Gerade mit } \ell \subseteq H\}.$$

SATZ 19. $\pi(\Sigma_P)$ und $\pi(\Sigma_H)$ sind Ebenen im \mathbf{P}^5 . Ist umgekehrt E eine in Q enthaltene Ebene im \mathbf{P}^5 , so gilt $E = \pi(\Sigma_P)$ oder $E = \pi(\Sigma_H)$ für einen Punkt P oder eine Ebene H im \mathbf{P}^3 .

Bevor wir den Satz beweisen, bemerken wir: Ein Koordinatenwechsel im \mathbf{P}^3 induziert auch einen Koordinatenwechsel im \mathbf{P}^5 .

Beweis:

- Nach Koordinatenwechsel können wir $P = (1 : 0 : 0 : 0)$ annehmen. Die zu Σ_P gehörigen Geraden werden von den Spalten folgender Matrizen aufgespannt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

mit den Plückerkoordinaten

$$(1 : a : b : 0 : 0 : 0), \quad (0 : 1 : c : 0 : 0 : 0), \quad (0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0),$$

was sofort

$$\pi(\Sigma_P) = Z(p_{12}, p_{13}, p_{23})$$

liefert, also eine Ebene.

- Nach Koordinatenwechsel können wir $H = Z(x_3)$ annehmen. Die zu Σ_H gehörigen Geraden werden von den Spalten folgender Matrizen aufgespannt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mit den Plückerkoordinaten

$$(1 : b : 0 : -a : 0 : 0), \quad (0 : 1 : 0 : c : 0 : 0), \quad (0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0),$$

was sofort

$$\pi(\Sigma_H) = Z(p_{03}, p_{13}, p_{23})$$

liefert, also eine Ebene.

- Sei nun umgekehrt E eine in Q enthaltene Ebene, $\pi(\ell_1)$, $\pi(\ell_2)$ und $\pi(\ell_3)$ drei Punkte von E , die E aufspannen. Dann schneiden sich ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 paarweise, wofür es zwei Möglichkeiten gibt:
 - ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 gehen durch einen Punkt P . Dann gilt $\ell_i \in \Sigma_P$, also $E \subseteq \pi(\Sigma)$ und damit $E = \pi(\Sigma_P)$.
 - ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 schneiden sich in drei Punkten. Dann müssen die ℓ_i in einer Ebene H liegen, also $\ell_i \in \Sigma_H$, was sofort $E = \pi(\Sigma_H)$ liefert. ■

Es gibt also zwei Typen von Ebenen, die in der Plückerquadrik enthalten sind. Wir bemerken noch folgendes Schnittverhalten:

$$\begin{aligned} \Sigma_{P_1} \cap \Sigma_{P_2} &= \text{Gerade durch } P_1 \text{ und } P_2, \\ \Sigma_{H_1} \cap \Sigma_{H_2} &= \text{Schnittgerade von } H_1 \text{ und } H_2, \\ \Sigma_P \cap \Sigma_H &= \Sigma_{P,H} \text{ im Fall } P \in H, \\ \Sigma_P \cap \Sigma_H &= \emptyset \text{ im Fall } P \notin H, \end{aligned}$$

insbesondere

$$\pi(\Sigma_{P_1}) \cap \pi(\Sigma_{P_1}) = \text{Punkt}, \quad \pi(\Sigma_{H_1}) \cap \pi(\Sigma_{H_1}) = \text{Punkt}, \quad \pi(\Sigma_P) \cap \pi(\Sigma_H) = \text{Gerade oder } \emptyset.$$

Quadriken

Wir setzen jetzt $\text{char}(k) \neq 2$ voraus. Eine Quadrik $Q \subseteq \mathbf{P}^n$ ist die Nullstellenmenge eines quadratischen Polynoms:

$$Q = Z(f), \quad \text{wo } f = \sum a_{ij}x_i x_j = x^t A x,$$

wo o.E. A eine symmetrische $(n+1) \times (n+1)$ -Matrix ist. Gilt auch $Q = Z(g)$, wo g ein homogenes quadratisches Polynom ist, so folgt aus dem Hilbertschen Nullstellensatz, daß sich f und g nur um eine Konstante unterscheiden, insbesondere ist die Matrix A bis auf eine Konstante durch Q eindeutig bestimmt. Bei Koordinatenwechsel mit einer Matrix T geht die Matrix A über in $T^t A T$, wobei natürlich der Rang von A gleich bleibt. Wir nennen dies den Rang von Q bzw. den Rang von f . Es gilt $1 \leq \text{Rang}(f) \leq n+1$. Eine Quadrik vom Rang $n+1$ heißt nichtausgeartet.

LEMMA 3. Eine Quadrik $Q \subseteq \mathbf{P}^n$ vom Rang r ist projektiv äquivalent zur Quadrik

$$Z(x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_{r-1}^2).$$

Insbesondere sind alle Quadriken vom Rang r projektiv äquivalent.

Beweis: Sei $f(x_0, \dots, x_n)$ ein homogenes quadratisches Polynom. Wir geben ein konstruktives Verfahren an, wie man f rekursiv diagonalisieren kann.

Fall 1: Es gibt einen Index i , so daß x_i^2 explizit in f vorkommt. Durch Vertauschen von x_0 und x_i erreicht man

$$f(x_0, \dots, x_n) = c x_0^2 + x_0 \ell(x_1, \dots, x_n) + q(x_1, \dots, x_n)$$

mit $c \neq 0$. Durch Koordinatenwechsel $\sqrt{c}x_0 = x'_0$ kann man o.E. $c = 1$ annehmen. Dann gilt:

$$f = (x_0 + \frac{1}{2}\ell(x_1, \dots, x_n))^2 + q(x_1, \dots, x_n) - \frac{1}{4}\ell(x_1, \dots, x_n)^2,$$

setzt man also $x'_0 = x_0 + \frac{1}{2}\ell(x_1, \dots, x_n)$, so ist o.E.

$$f = x_0^2 + g(x_1, \dots, x_n).$$

Ist $g \neq 0$, so beginne man mit g von vorne.

Fall 2: Kein x_i^2 in f vor. Ist $f \neq 0$, so gibt es aber Indizes $i \neq j$, so daß $x_i x_j$ in f vorkommt. Substituiert man $x_j = x'_j + x_i$, so enthält f einen Term x_i^2 , so daß man in Fall 1 ist. ■

Beispiele: Die ebenen Quadriken

$$Z(x_0 x_2 - x_1^2), \quad Z(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2), \quad Z(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)$$

sind alle projektiv äquivalent.

Bei der Betrachtung der (nichtausgearteten) Plückerquadrik Q im \mathbf{P}^5 hatten wir gesehen, daß Q Ebenen enthält. Dies verallgemeinert sich:

SATZ 20. Sei Q eine nichtausgeartete Quadrik in \mathbf{P}^n . Dann gilt:

1. Ist U ein in Q enthaltener linearer Unterraum, so ist $\dim U \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.
2. Es gibt in Q enthaltene lineare Teilräume der Dimension $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.

Beweis:

1. Die nichtausgeartete Quadrik $Q = Z(f)$ enthalte einen ℓ -dimensionalen linearen Unterraum U . Nach Koordinatenwechsel können wir $U = \{(x_0 : x_1 : \dots : x_\ell : 0 : \dots : 0)\}$ und $f = x^t A x$ annehmen. Da f auf U identisch verschwindet, ist die $(\ell + 1) \times (\ell + 1)$ -Hauptuntermatrix von A identisch 0. Der Rang von A ist höchstens die Summe der Ränge der ersten $\ell + 1$ Zeilen und der letzten $n - \ell$ Zeilen, woraus folgt

$$n + 1 = \text{Rang}(A) \leq (n - \ell) + (n - \ell)$$

und damit

$$\ell \leq \frac{n - 1}{2}.$$

2. Ist $n = 2m + 1$, so ist nach Koordinatenwechsel

$$Q = Z(x_0 x_1 + x_2 x_3 + \dots + x_{2m} x_{2m+1}).$$

Q enthält z.B. die linearen Unterräume $Z(x_0, x_2, x_4, \dots, x_{2m})$ und $Z(x_1, x_3, x_5, \dots, x_{2m+1})$, die Dimension $m = \frac{n-1}{2}$ haben.

3. Ist $n = 2m$, so ist nach Koordinatenwechsel

$$Q = Z(x_0^2 + x_1 x_2 + x_3 x_4 + \dots + x_{2m-1} x_{2m}).$$

Q enthält z.B. die linearen Unterräume $Z(x_0, x_1, x_3, \dots, x_{2m-1})$ und $Z(x_0, x_2, \dots, x_{2m})$, die Dimension $m - 1 = \frac{n-1}{2} - \frac{1}{2}$ haben. ■

LEMMA 4. *Über einem algebraisch abgeschlossenen Körper zerfällt jedes homogene Polynom in zwei Variablen in Linearfaktoren.*

Beweis: Die Behauptung ergibt sich aus folgender Rechnung:

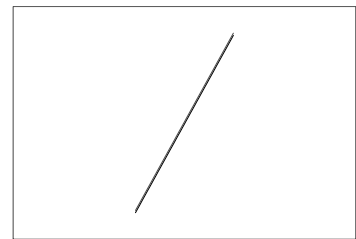
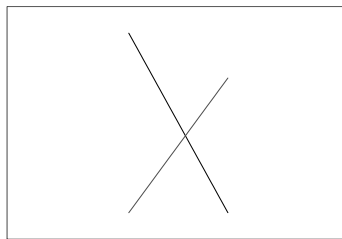
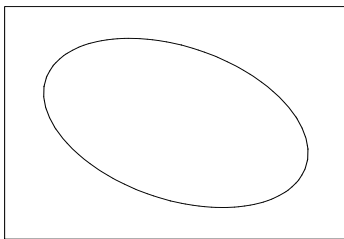
$$\begin{aligned} f(x, y) &= a_0 x^d + a_1 x^{d-1} y + \dots + a_d y^d = \\ &= y^d \left[a_0 \left(\frac{x}{y} \right)^d + a_1 \left(\frac{x}{y} \right)^{d-1} + \dots + a_d \right] = \\ &= y^d (b_1 \left(\frac{x}{y} \right) - c_1) \dots (b_d \left(\frac{x}{y} \right) - c_d) = \\ &= (b_1 x - c_1 y) \dots (b_d x - c_d y). \blacksquare \end{aligned}$$

Quadriken im \mathbf{P}^1

Die Quadriken im \mathbf{P}^1 werden vermöge $(a_0 : a_1 : a_2) \mapsto Z(a_0 x_0^2 + a_1 x_0 x_1 + a_2 x_1^2)$ von einem \mathbf{P}^2 parametrisiert. Es gibt nur zwei Typen, nämlich Quadriken vom Rang 1, d.h. projektiv äquivalent zu $Z(x_0^2)$, einem (Doppel-)Punkt, und Quadriken vom Rang 2, d.h. projektiv äquivalent zu $Z(x_0^2 + x_1^2)$, zwei Punkten. $Z(a_0 x_0^2 + a_1 x_0 x_1 + a_2 x_1^2)$ hat genau dann Rang 1, wenn $a_1^2 - 4a_0 a_2 = 0$ ist. Die Rang-1-Quadriken bilden also einen Kegelschnitt im \mathbf{P}^2 aller Quadriken (im \mathbf{P}^1).

Quadriken im \mathbf{P}^2 : Ebene Kegelschnitte

Bis auf projektive Äquivalenz gibt es genau drei Typen:



Rang 3: Nichtausgearteter Kegelschnitt, z.B. $Z(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)$

Rang 2: Geradenpaar, z.B. $Z(x_1 x_2)$

Rang 1: Doppelgerade, z.B. $Z(x_1^2)$

Eine allgemeine Quadrik schreibt sich

$$f = a_0x_0^2 + a_1x_0x_1 + a_2x_0x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_2^2.$$

In Matrixschreibweise ergibt dies

$$f = \frac{1}{2}(x_0x_1x_2) \begin{pmatrix} 2a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & 2a_3 & a_4 \\ a_2 & a_4 & 2a_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Das Polynom f ist durch die Quadrik $Z(f)$ nur bis auf einen Skalar bestimmt. Dann ist $(a_0 : a_1 : \dots : a_5)$ ein Punkt eines neuen \mathbf{P}^5 . Die Zuordnung ist eineindeutig, d.h. wir haben eine Bijektion

$$\text{Quadriken} \subseteq \mathbf{P}^2 \iff \text{Punkte} \in \mathbf{P}^5.$$

Algebraische Mengen in \mathbf{P}^5 :

- Wir wissen

$$Z(f) \text{ zerfällt in 2 Geraden} \iff \text{rg}(M) \leq 2 \iff \det(M) = 0.$$

Nun ist

$$\det(M) = 8a_0a_3a_5 + 2a_1a_2a_4 - 2a_2^3 - 2a_0a_4^2 - 2a_1^2a_5.$$

Ist nun R die Menge der reduziblen Kegelschnitte in \mathbf{P}^2 , so ist also

$$R = Z(4a_0a_3a_5 + a_1a_2a_4 - a_2^3 - a_0a_4^2 - a_1^2a_5).$$

Insbesondere ist R abgeschlossen.

- $Z(f)$ ist eine Doppelgerade, d.h. $f = (b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2)^2$, genau dann wenn $\text{rg}(M) = 1$. Dies läßt sich dadurch ausdrücken, daß alle 2×2 -Unterdeterminanten verschwinden. Also bleibt

$$\begin{aligned} D &= \{ \text{Doppelgeraden} \} = \\ &= Z(4a_0a_3 - a_2^2, 4a_0a_5 - a_2^2, 4a_3a_5 - a_4^2, 2a_0a_4 - a_1a_2, 2a_1a_5 - a_2a_4, 2a_2a_3 - a_1a_4). \end{aligned}$$

D ist also auch eine abgeschlossene Teilmenge von \mathbf{P}^5 .

- R ist eine Hyperfläche vom Grad 3, also von Dimension 4. Später werden wir sehen, daß D isomorph zu \mathbf{P}^2 ist, insbesondere hat D Dimension 2.

Geometrische Bedingungen:

- Für einen Punkt $P \in \mathbf{P}^2$ sei σ_P die Menge aller Quadriken (im \mathbf{P}^2), die P enthalten. Wir interpretieren σ_P als Teilmenge des \mathbf{P}^5 . Durch Einsetzen folgt mit $P = (p_0 : p_1 : p_2)$:

$$\sigma_P = \{(a_0 : a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5) \in \mathbf{P}^5 : a_0p_0^2 + a_1p_0p_1 + a_2p_0p_2 + a_3p_1^2 + a_4p_1p_2 + a_5p_2^2 = 0\},$$

d.h. σ_P bildet eine Hyperfläche im \mathbf{P}^5 .

- **Folgerung:** Durch 5 vorgegebene Punkte des \mathbf{P}^2 geht (mindestens) eine Quadrik.
- Für eine Gerade $g \subseteq \mathbf{P}^2$ sei τ_g die Menge aller Quadriken, die g berühren. Wir betrachten o.E. $g = Z(x_0)$. Einschränken einer Quadrik $a_0x_0^2 + a_1x_0x_1 + \dots + a_5x_2^2$ auf $x_0 = 0$ liefert $a_3x_1^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_2^2$. Die Quadrik berührt die Gerade, wenn es genau einen Schnittpunkt gibt, d.h. wenn gilt $a_4^2 - 4a_3a_5 = 0$. Also

$$\tau_{\{x_0=0\}} = \{(a_0 : a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5) \in \mathbf{P}^5 : a_4^2 - 4a_3a_5 = 0\},$$

d.h. τ_g bildet eine quadratische Hyperfläche im \mathbf{P}^5 .

- **Beispiel:**

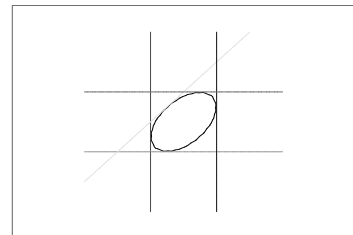
Hat man die 5 Geraden

$$x = 0, \quad x = 2, \quad y = 0, \quad y = 2, \quad y = x + 1$$

gegeben, so ist die Menge der Quadriken, die diese Geraden berühren

$$\{1 - 4x - 4y + 4x^2 - 4xy + 4y^2\} \cup D.$$

Die Doppelgeraden kommen ins Spiel, weil $D \subseteq \tau_g$ gilt.



Wir wollen jetzt ein paar Bedingungen auferlegen. Dazu benötigen wir ein Lemma.

LEMMA 5. Sei G eine Gerade in einem \mathbf{P}^n und F eine Hyperfläche vom Grad d in \mathbf{P}^n . Dann gilt

$$G \subseteq F \text{ oder } 1 \leq \#G \cap F \leq d.$$

Beweis: Sei $F = \{f(x_0, \dots, x_n = 0)\}$, f homogen vom Grad d und

$$G = \{(a_0u + b_0v : a_1u + b_1v : \dots : a_nu + b_nv) : (u : v) \in \mathbf{P}^1\}.$$

Dann ist

$$G \cap F = \{(a_0u + b_0v : a_1u + b_1v : \dots : a_nu + b_nv) : (u : v) \in \mathbf{P}^1, f(a_0u + b_0v, \dots, a_nu + b_nv) = 0\}.$$

Nun gibt es zwei Möglichkeiten:

- $f(a_0u + b_0v, \dots, a_nu + b_nv) = 0$: Dann ist $G \subseteq F$.
- $f(a_0u + b_0v, \dots, a_nu + b_nv) \neq 0$: Da das Polynom homogen vom Grad d ist, gibt es (nicht notwendig verschiedene) Nullstellen $(u_1 : v_1), \dots, (u_d : v_d)$. Durch Einsetzen folgt $\#G \cap F \leq d$. ■

Quadriken durch 3 Punkte:

- Die 3 Punkte liegen auf einer Geraden G . Alle Quadriken, die durch die 3 Punkte gehen, enthalten nach dem Lemma die Gerade G . Dies ist nicht interessant.
- Die 3 Punkte sind nicht kollinear. O.E. sind die 3 Punkte $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$ und $(0 : 0 : 1)$. Die Quadriken hierdurch sind

$$b_0x_1x_2 + b_1x_0x_2 + b_2x_0x_1,$$

sie bilden also einen \mathbf{P}^2 . So etwas nennt man ein Netz N von Quadriken. Es ist

$$N \cap R = Z(b_0b_1b_2) \text{ und } N \cap D = \emptyset.$$

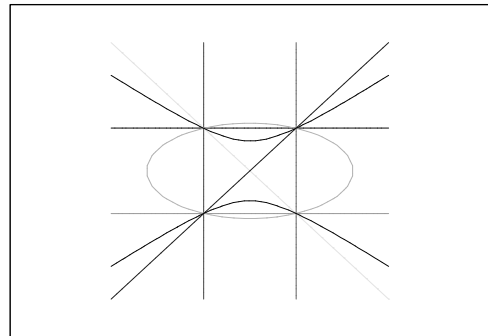
Quadriken durch 4 Punkte, von denen keine 3 kollinear sind: Den Fall von kollinearen Punkten haben wir bereits diskutiert. O.E. (projektive Äquivalenz) können wir die Punkte annehmen als

$$(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1).$$

Dies liefert

$$t_0(x_0x_1 - x_1^2) + t_1(x_0x_2 - x_2^2).$$

Dies ist eine Gerade im \mathbf{P}^5 . So etwas nennt man ein Kegelschnittbüschel. Schnittpunkte mit R gibt es für $t = 0, \infty, -1$.



SATZ 21. Zwei Quadriken $Q_1, Q_2 \subseteq \mathbf{P}^2$ ohne gemeinsame Komponente schneiden sich höchstens in 4 Punkten.

Beweis: Betrachte das Büschel $t_0Q_0 + t_1Q_1$. Es schneidet R mindestens einmal. Sei G_1G_2 ein Schnittpunkt. Dann ist $G_1G_2 \in (Q_0, Q_1)$. Nun ist

$$Z(Q_0, Q_1) = Z(G_1G_2, Q) = Z(G_1, Q) \cup Z(G_2, Q),$$

woraus sofort die Behauptung folgt. ■

Wir haben gesehen, daß ein Büschel, das nicht nur aus reduziblen Quadriken besteht, höchstens 3 reduzible Quadriken enthalten kann. Welche Möglichkeiten kommen vor?

Quadriken im \mathbf{P}^3

Projektiv gibt es 4 Typen:

- Rang 4: Nichtausgeartete Quadrik, z.B. $x_0x_3 - x_1x_2 = 0$
- Rang 3: Quadratischer Kegel, z.B. $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$
- Rang 2: Zwei Ebenen, z.B. $x_1x_2 = 0$
- Rang 1: Doppalebene, z.B. $x_1^2 = 0$

Geometrie auf der Quadrik $x_0x_3 = x_1x_2$:

Sei $Q = Z(x_0x_3 - x_1x_2)$. Dann ist

$$Q = \{(1 : x : y : xy)\} \cup \{(0 : 0 : x_2 : x_3)\} \cup \{(0 : x_1 : 0 : x_3)\}.$$

Die letzten beiden Mengen sind Geraden.

SATZ 22. Die Abbildung

$$\phi : \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^3, \quad ((u_0 : u_1), (v_0 : v_1)) \rightarrow (u_0v_0 : u_1v_0 : u_0v_1 : u_1v_1)$$

ist injektiv und hat als Bild die Quadrik $Q = Z(x_0x_3 - x_1x_2)$.

Beweis: Offensichtlich ist $\phi(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1) \subseteq Q$. Wir betrachten die Abbildung ϕ noch etwas genauer:

$$\begin{aligned} \phi((1 : u), (1 : v)) &= (1 : u : v : uv) \\ \phi((0 : 1), (v_0 : v_1)) &= (0 : v_0 : 0 : v_1) \\ \phi((u_0 : u_1), (0 : 1)) &= (0 : 0 : u_0 : u_1) \end{aligned}$$

Damit sieht man sofort, daß ϕ eine Bijektion von $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ mit Q liefert. Später werden wir sehen, daß ϕ ein Isomorphismus ist. ■

Wir wollen jetzt untersuchen, welche Geraden auf Q liegen.

SATZ 23. Für $u, v \in \mathbf{P}^1$ sind

$$\begin{aligned} G_u &= \phi(\{u\} \times \mathbf{P}^1) = \{(u_0t_0 : u_1t_0 : u_0t_1 : u_1t_1), (t_0 : t_1) \in \mathbf{P}^1\} = Z(u_1x_0 - u_0x_1, u_1x_2 - u_0x_3), \\ H_v &= \phi(\mathbf{P}^1 \times \{v\}) = \{(t_0v_0 : t_1v_0 : t_0v_1 : t_1v_1), (t_0 : t_1) \in \mathbf{P}^1\} = Z(v_1x_0 - v_0x_2, v_1x_1 - v_0x_3) \end{aligned}$$

Geraden auf $Q = Z(x_0x_3 - x_1x_2)$ mit

$$G_u \cap G_{u'} = \emptyset, \quad H_v \cap H_{v'} = \emptyset, \quad G_u \cap H_v = \{\phi(u, v)\},$$

für $u \neq u'$ und $v \neq v'$. Jede Gerade auf Q hat die Gestalt G_u oder H_v .

Beweis: Alle Aussagen bis auf die letzte folgen sofort aus der angegebene Darstellung. Sei nun L eine Gerade auf Q . L wird parametrisiert durch 4 Linearformen $g_i(t_0, t_1)$. Dann gilt also für die Polynome $g_0g_3 = g_1g_2$.

Fall 1: $g_0 = 0$. Dann ist $g_1g_2 = 0$. Ist $g_1 = 0$, so ist $L = Z(x_0, x_1) = H_{(0:1)}$, ist $g_2 = 0$, so ist $L = Z(x_0, x_2) = G_{(0:1)}$.

Fall 2: $g_0 \neq 0$. Dann teilt g_0 das Produkt g_1g_2 . Ist $g_1 = cg_0$, so folgt $g_3 = cg_2$ und damit $L = Z(x_1 - cx_0, x_3 - cx_2) = G_{(1:c)}$. Ist $g_2 = cg_0$, so ist $g_3 = cg_1$ und damit $L = Z(x_2 - cx_0, x_3 - cx_1) = H_{(1:c)}$. ■

Wir wollen noch sehen, auf was die Geraden unter der Plückerabbildung π abgebildet werden.

Die Gerade G_u wird von den Punkten $(0 : 0 : u_0 : u_1)$ und $(u_0 : u_1 : 0 : 0)$ aufgespannt, also gilt

$$\pi(G_u) = (0 : -u_0^2 : -u_0u_1 : -u_0u_1 : -u_1^2 : 0),$$

also ist

$$\pi(\{G_u : u \in \mathbf{P}^1\}) = Z(p_{01}, p_{23}, p_{03} - p_{12}, p_{03}^2 - p_{02}p_{13})$$

eine ebene Quadrik.

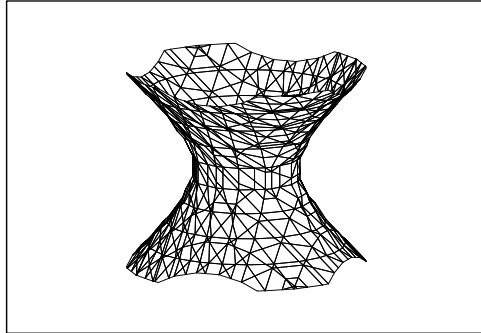
Die Gerade H_v wird von den Punkten $(0 : v_0 : 0 : v_1)$ und $(v_0 : 0 : v_1 : 0)$ aufgespannt, also ist

$$\pi(H_v) = (-v_0^2 : 0 : -v_0v_1 : v_0v_1 : 0 : -v_1^2),$$

und damit

$$\pi(\{H_v : v \in \mathbf{P}^1\}) = Z(p_{02}, p_{13}, p_{03} + p_{12}, p_{03}^2 - p_{01}p_{23})$$

eine ebene Quadrik.



Morphismen

Wir haben bereits naive Abbildungen zwischen algebraischen Mengen betrachtet. Die meisten davon waren polynomial. In der Einführung hatten wir den Kreis aber auch mit anderen Funktionen parametrisiert:

$$x = \frac{2t}{t^2 + 1}, \quad y = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1},$$

für $t = \pm i$ ist das nicht definiert.

DEFINITION 13. Sei $X \subseteq \mathbf{A}^n$ quasi-affine Varietät. Eine Funktion $f : X \rightarrow k$ heißt regulär in $P \in X$, wenn es eine offene Umgebung U von P gibt und Polynome $g, h \in k[x_1, \dots, x_n]$, so daß h auf U nicht 0 wird und gilt $f = \frac{g}{h}$ auf U . Die Funktion f heißt regulär auf X , falls sie in jedem Punkt von X regulär ist.

Beispiel: Ist $X \subseteq \mathbf{A}^n$ eine quasi-affine Varietät, so definiert jedes Polynom $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ eine reguläre Funktion auf X . Für $g \in k[x_1, \dots, x_n]$ ist $U = \{P \in X : g(P) \neq 0\} = (\mathbf{A}^n \setminus Z(g)) \cap X$ offen in X . Ist also $U \neq \emptyset$, so definiert $\frac{f}{g}$ eine reguläre Funktion auf U .

Beispiel: Wir betrachten $X = Z(x^2 + y^2 - 1) \subseteq \mathbf{A}^2$. Die Funktion $f = \frac{1-x}{y}$ ist regulär für $y \neq 0$, d.h. in allen Punkten $P \neq (1, 0), (-1, 0)$. Nun gilt aber außerhalb dieser Punkte

$$f = \frac{1-x}{y} = \frac{(1-x)y}{y^2} = \frac{(1-x)y}{(1-x)(1+x)} = \frac{y}{1+x},$$

definiert man also f durch diese Formel, so ist f auch in $(1, 0)$ definiert mit Wert 0.

Beispiel: Wir betrachten die affine Varietät $X = Z(y^2 - x^3) \in \mathbf{A}^2$. Sei $f = \frac{y}{x}$. Setzen wir $U = X \setminus \{(0, 0)\}$, so ist klar, daß f eine reguläre Funktion auf U ist. Sei jetzt $g = f^2$. Natürlich ist g regulär auf U . Nun ist aber auch

$$g = \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^3}{x^2} = x.$$

Setzen wir also $g((0, 0)) = 0$, so ist g regulär auf ganz X . f läßt sich nicht regulär auf $(0, 0)$ fortsetzen, denn sonst gäbe es Polynome $u(x, y), v(x, y)$ mit

$$\frac{y}{x} = \frac{u(x, y)}{v(x, y)}$$

für alle Punkte einer offenen Umgebung von $(0, 0)$, insbesondere $v(0, 0) \neq 0$. O.E. ist

$$u(x, y) = u_0(x) + u_1(x)y, \quad v(x, y) = v_0(x) + v_1(x)y.$$

Ausmultiplizieren ergibt auf X :

$$u_0(x)x + u_1(x)xy = v_0(x)y + v_1(x)x^3$$

auf einer offenen nichtleeren Menge, also auf ganz X . Die Gleichheit muß dann modulo des Ideals $(y^2 - x^3)$ gelten, also auch modulo des größeren Ideals (x^2, xy, y^2) , was

$$u_0(0)y \equiv v_0(0)x \pmod{(x^2, xy, y^2)}$$

liefert, also $v_0(0) = 0$, einen Widerspruch zu $v_0(0) \neq 0$. Also läßt sich f nicht zu einer regulären Funktion auf X fortsetzen, wohl aber f^2 .

LEMMA 6. Eine reguläre Funktion $f : X \rightarrow k$ ist stetig, wenn k mit \mathbf{A}^1 (mit der Zariski-Topologie) identifiziert wird.

Beweis: Es ist zu zeigen, daß das Urbild abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist. Die einzigen abgeschlossenen Teilmengen von k sind \emptyset , k und $\{a_1, \dots, a_n\}$. Also genügt es zu zeigen, daß für $a \in k$ die Menge $f^{-1}(a)$ abgeschlossen ist. Sei f auf einer offenen Menge U gegeben durch $f = \frac{g(x_1, \dots, x_n)}{h(x_1, \dots, x_n)}$. Dann ist

$$f^{-1}(a) \cap U = \{P \in U : f(P) = ag(P)\} = Z(g(x_1, \dots, x_n) - ah(x_1, \dots, x_n)) \cap U,$$

d.h. $f^{-1}(a) \cap U$ ist abgeschlossen in U . Da X von solchen offenen Mengen U überdeckt wird, folgt, daß $f^{-1}(a)$ abgeschlossen ist. ■

Die Umkehrung des Lemmas gilt nicht, dazu ist die Zariski-Topologie zu schwach:

Beispiel: Eine nichtkonstante Funktion $f : \mathbf{A}^1 \rightarrow k$ ist genau dann stetig, wenn für jedes $c \in k$ die Menge $f^{-1}(c)$ endlich ist. So ist f mit $f(t) = t$ für $t \neq 0$, $f(0) = 1$ stetig. Wäre f regulär in 0, so gäbe es Polynome $g(t), h(t)$ mit $h(0) \neq 0$ und $f(t) = \frac{g(t)}{h(t)}$ für unendlich viele Werte von t . Dann würde folgen $g(t) = th(t)$ und damit $g(0) = 0$, also $f(0) = 0$, ein Widerspruch. Also ist f stetig, aber nicht regulär.

DEFINITION 14. Sei $X \subseteq \mathbf{P}^n$ eine quasi-projektive Varietät. Eine Funktion $f : X \rightarrow k$ heißt regulär im Punkt $P \in X$, falls eine offene Menge U mit $P \in U \subseteq X$ existiert, homogene Polynome gleichen Grades $g(x_0, \dots, x_n), h(x_0, \dots, x_n)$, so daß h auf U nicht verschwindet und $f = \frac{g}{h}$ auf U gilt. f heißt regulär auf X , falls f in jedem Punkt von X regulär ist.

Bemerkungen:

1. Regulär zu sein ist also eine lokale Eigenschaft. Man sieht sofort, daß die zweite Definition unmittelbar aus der ersten folgt.
2. Man zeigt auch im zweiten Fall die Stetigkeit einer regulären Funktion.

DEFINITION 15. Für eine quasi-affine bzw. quasi-projektive Varietät X sei

$$\mathcal{O}(X) = \{f : X \rightarrow k \text{ regulär}\}.$$

LEMMA 7. $\mathcal{O}(X)$ ist ein Ring und $\mathcal{O}(X) \supseteq k$.

Beweis: Zu zeigen bleibt: Sind f und g regulär auf X , so auch $f + g$ und fg . Das ist aber eine lokale Eigenschaft. Sei also $P \in X$. Um P gilt dann

$$f = \frac{F(x_1, \dots, x_n)}{U(x_1, \dots, x_n)} \text{ und } g = \frac{G(x_1, \dots, x_n)}{V(x_1, \dots, x_n)}.$$

Dann ist dort

$$f + g = \frac{FV + GU}{UV} \text{ und } fg = \frac{FG}{UV},$$

also wieder regulär in P . ■

SATZ 24 (Identitätssatz). Sind f und g regulär auf X und stimmen sie auf einer offenen Teilmenge $U \neq \emptyset$ überein, so gilt bereits $f = g$ auf ganz X .

Beweis: Auch $f - g$ ist regulär, also stetig, also $(f - g)^{-1}(0)$ abgeschlossen. Da nichtleere offene Mengen dicht liegen folgt aus $U \subseteq (f - g)^{-1}(0)$ sofort $(f - g)^{-1}(0) = X$, also die Behauptung. ■

Warnung: Die stetigen Funktionen auf einer Menge müssen keinen Ring bilden.

Beispiel: Sei $f_c : \mathbf{A}^1 \rightarrow k$ gegeben durch $f_c(t) = t$ für $t \neq 0$ und $f_c(0) = c$. Dann ist f_c stetig, nicht jedoch $f_2 - f_1$.

Ist X eine affine Varietät im \mathbf{A}^n , so sind natürlich alle Polynomfunktionen regulär auf X . Gibt es noch andere?

SATZ 25. Die regulären Funktionen auf einer affinen Varietät X sind genau die Polynomfunktionen, d.h. die Elemente des affinen Koordinatenrings $A(X)$.

Beweis: Sei f eine reguläre Funktion auf X . Dann wird X überdeckt von offenen nichtleeren Mengen $U_i, i \in I$, so daß f auf U_i durch den Quotienten von Polynomen gegeben ist: $f = \frac{f_i}{g_i}$. Auf $U_i \cap U_j$ gilt $\frac{f_i}{g_i} = \frac{f_j}{g_j}$, also $f_i g_j = f_j g_i$ auf $U_i \cap U_j$ und damit auf ganz X . Ist $X = Z(p_j, j \in J)$, so ist $Z(p_1, j \in J, g_i, i \in I) = \emptyset$, da in jedem Punkt von X mindestens ein g_i nicht verschwindet. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz gibt es Polynome $h_i, i \in I, k_j, j \in J$ mit

$$1 = \sum h_i g_i + \sum k_j p_j.$$

Auf X gilt also $1 = \sum h_i g_i$ und weiterhin

$$g_j \left(\sum_i h_i f_i \right) = f_j \left(\sum_i h_i g_i \right) = f_j,$$

auf U_j also $f = \sum_i h_i f_i$, d.h. f wird auf ganz X durch die Polynomfunktion $\sum_i h_i f_i$ darstellt. ■

Welche regulären Funktionen gibt es auf projektiven Varietäten? Natürlich sind die Elemente aus k regulär.

SATZ 26. *Sei $X \subseteq \mathbf{P}^n$ eine projektive Varietät. Jede reguläre Funktion auf X ist konstant.*

Beweis: Wir können o.E. $X \not\subseteq \{x_i = 0\}$ für alle i annehmen. Sei $U_i = \{x_i \neq 0\}$ und $f : X \rightarrow k$ regulär. Dann ist $X \cap U_i$ eine affine Varietät mit affinen Koordinaten $\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}$. Da f auf $U_i \cap X$ regulär ist, gibt es nach dem letzten Satz ein $N \in \mathbf{N}$ und ein homogenes Polynom $F_i(x_0, \dots, x_n)$ vom Grad N , so daß auf $U_i \cap X$ gilt $f = \frac{F_i}{x_i^N}$. (N kann unabhängig von i gewählt werden.) Auf $U_i \cap U_j \cap X$ gilt $\frac{F_i}{x_i^N} = \frac{F_j}{x_j^N}$, also $x_i^N F_j = x_j^N F_i$ auf $U_i \cap U_j \cap X$, also auf ganz X und damit in $S(X)$, dem projektiven Koordinatenring von X . Im Quotientenkörper $Quot(S(X))$ gilt also $g := \frac{F_i}{x_i^N} = \frac{F_j}{x_j^N}$. Sei jetzt $M > (n+1)(N-1)$ und V_M der k -Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad M . Für $S_M = V_M/V_M \cap I(X)$ gilt dann

$$S_M \subseteq S(X) \subseteq Quot(S(X)).$$

Nun wird S_M erzeugt von Monomen $x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n}$ mit $i_0 + \dots + i_n = M$. Dann gibt es einen Index ℓ mit $\ell \geq N$ und somit wird (in $Quot(S(X))$)

$$g \cdot x_0^{i_0} \cdot x_n^{i_n} = g x_\ell^N \cdot x_0^{i_0} \dots x_\ell^{\ell-N} \dots x_n^{i_n} \in S_M.$$

Also $g \cdot S_M \subseteq S_M$, d.h. g liefert einen Endomorphismus des endlich dimensionalen k -Vektorraums S_M . Daher erfüllt g ein charakteristisches Polynom

$$g^m + c_1 g^{m-1} + \dots + c_m = 0 \quad \text{mit} \quad c_1, \dots, c_m \in k.$$

Da k algebraisch abgeschlossen ist, folgt $g \in k$ und damit $f \in k$, was zu zeigen war. ■

DEFINITION 16. • *Unter einer Varietät über k verstehen wir eine affine, quasi-affine, projektive oder quasi-projektive Varietät über k .*

- *Seien X und Y Varietäten und $\phi : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. ϕ heißt Morphismus, falls ϕ stetig ist und für jede offene Menge $V \subseteq Y$ und jede reguläre Funktion f auf V auch $f \circ \phi : \phi^{-1}(V) \rightarrow k$ regulär ist.*
- *Zwei Varietäten heißen isomorph, falls es Morphismen $\phi : X \rightarrow Y$ und $\psi : Y \rightarrow X$ gibt mit $\phi \psi = id_Y$ und $\psi \phi = id_X$.*

Beispiel: Wir hatten die Bijektion

$$\phi_i : U_i \rightarrow \mathbf{A}^n,$$

wo $U_i = \mathbf{P}^n \setminus Z(x_i)$. ϕ_i war ein Homöomorphismus. Wir hatten uns schon überlegt, wie Polynome transformiert werden. Also ist ϕ_i ein Isomorphismus.

Beispiel: Koordinatenwechsel sind Isomorphismen.

Beispiel: Bei der Parametrisierung des Kreises $x^2 + y^2 = 1$ haben wir (x, y) zugeordnet $t = \frac{y}{x+1}$. Wir wollen daraus eine Abbildung ϕ von $X = Z(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2) \subseteq \mathbf{P}^2$ in \mathbf{P}^1 machen.

Für $x_2 \neq 0$ gilt:

$$(x_0 + x_1 : x_2) = ((x_0 + x_1)x_2 : (x_0 + x_1)(x_0 - x_1)) = (x_2 : x_0 - x_1).$$

Die linke Seite ist definiert außer für $(1 : -1 : 0)$, die rechte Seite außer für $(1 : 1 : 0)$. Also liefern die Formeln einen Morphismus $\phi : X \rightarrow \mathbf{P}^1$. (Daß reguläre Funktionen in reguläre zurückgezogen werden, ist trivial!)

Wir definieren jetzt $\psi : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$ durch

$$\psi((t_0 : t_1)) = (t_0^2 + t_1^2 : t_0^2 - t_1^2 : 2t_0t_1).$$

Man sieht sofort, daß ψ regulär ist. Zeige, daß ϕ ein Isomorphismus ist.

Beispiel: Sei $X = \mathbf{A}^1 \setminus \{0\}$ und $Y = Z(xy - 1) \subseteq \mathbf{A}^2$. Wir definieren

$$\phi : X \rightarrow Y, t \mapsto (t, \frac{1}{t}),$$

und

$$\psi : Y \rightarrow X, (x, y) \mapsto x.$$

Zeige, daß ϕ ein Isomorphismus ist. Eine quasi-affine Varietät kann also zu einer affinen isomorph sein.

Beispiel: Sei $X = Z(y^2 - x^3) \subseteq \mathbf{A}^2$.

1. Definiert man $\phi : \mathbf{A}^1 \rightarrow X$ durch $t \mapsto (t^2, t^3)$, so ist ϕ ein Morphismus.
2. Sei $\psi : X \rightarrow \mathbf{A}^1$ definiert durch: $\psi((x, y)) = \frac{y}{x}$ für $(x, y) \neq 0$ und $\psi((0, 0)) = 0$. Trivialerweise ist ψ stetig. ψ ist kein Morphismus, sonst wäre ψ regulär auf X , eine Fortsetzung von $\frac{y}{x}$, was nach einem früheren Beispiel nicht geht.
3. ϕ ist also kein Isomorphismus.

SATZ 27. Seien X und Y Varietäten. Jeder Morphismus $\phi : X \rightarrow Y$ induziert dann einen k -Algebrahomomorphismus $\phi^* : \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X), f \mapsto f \circ \phi$. Ist $\psi : Y \rightarrow Z$ ein Morphismus, so gilt $(\psi\phi)^* = \phi^*\psi^*$ und $\text{id}^* = \text{id}$. Ist ϕ ein Isomorphismus, so auch ϕ^* .

Der Beweis ist klar.

FOLGERUNG 3. Ist eine Varietät X projektiv und gleichzeitig affin, so ist X ein Punkt.

Beweis: Da X affin ist, gilt $\mathcal{O}(X) = A(X) = k[x_1, \dots, x_n]/I(X)$. Da X projektiv ist, gilt $\mathcal{O}(X) = k$. Also $A(X) = k$, d.h. X ist ein Punkt. ■

FOLGERUNG 4. Ist $X \subseteq \mathbf{P}^n$ eine projektive Varietät, aber kein Punkt, und $H \subseteq \mathbf{P}^n$ eine Hyperebene, so gilt $X \cap H \neq \emptyset$.

Beweis: O.E. $H = \{x_0 = 0\}$. Wäre $X \cap H = \emptyset$, so wäre $X = X \cap U_0$ auch affin, also X ein Punkt, was nicht sein sollte. ■

SATZ 28. Sei X eine Varietät, $Y \subseteq \mathbf{A}^n$ eine affine Varietät. Eine Abbildung $\phi : X \rightarrow Y$ ist genau dann ein Morphismus, wenn $\phi_i : X \rightarrow k$ regulär ist, wo $\phi_i = x_i\phi$ die i -te Koordinate von ϕ ist.

Beweis:

- Ist $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ ein Morphismus, so liefern nach Definition die regulären Funktionen x_i auf Y reguläre Funktionen $\phi_i = x_i\phi$ auf X .
- Seien jetzt alle $\phi_i = x_i\phi$ regulär auf X . Dann ist auch für jedes Polynom $f(x_1, \dots, x_n)$ die Funktion $f\phi = f(\phi_1, \dots, \phi_n)$ regulär. Sei $Z \subseteq Y$ abgeschlossen, also $Z = Y \cap Z(f_1, \dots, f_d)$. Dann ist $\phi^{-1}(Z) = \{f_1\phi = \dots = f_d\phi = 0\}$. Diese Menge ist aber auch abgeschlossen, da die $f_i\phi$ stetig sind. Also ist ϕ stetig. Sei schließlich f eine reguläre Funktion auf $U \subseteq Y$; wir müssen sehen, daß $f \circ \phi$ regulär auf $\phi^{-1}(U)$ ist. Ist $Q \in \phi^{-1}(U)$, so $P = \phi(Q) \in U$. Auf einer offenen Umgebung U_0 mit $P \in U_0 \subseteq U$ gibt es Polynome $g(x_1, \dots, x_n), h(x_1, \dots, x_n)$ mit $f = \frac{g}{h}$. Auf der offenen Umgebung $\phi^{-1}(U_0)$ von Q in U gilt $f\phi = \frac{g(\phi_1, \dots, \phi_n)}{h(\phi_1, \dots, \phi_n)}$. Da aber die ϕ_i 's lokal Quotient von Polynomen sind, ist es auch $f\phi$, was noch zu zeigen war. ■

SATZ 29. Ist X eine Varietät und $Y \subseteq \mathbf{A}^n$ eine affine Varietät, so ist

$$\lambda : \text{Mor}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_k\text{-Algebra}(A(Y), \mathcal{O}(X)), \quad \phi \mapsto \phi^*$$

eine Bijektion.

Beweis: λ ist injektiv: Seien ϕ_1 und ϕ_2 zwei verschiedene Morphismen von X in Y . Dann gibt es ein $P \in X$ mit $\phi_1(P) \neq \phi_2(P)$, also eine Koordinatenfunktion x_i mit $x_i\phi_1(P) \neq x_i\phi_2(P)$. Insbesondere ist $\phi_1^*(x_i) = x_i\phi_1 \neq x_i\phi_2 = \phi_2^*(x_i)$, also $\phi_1^* \neq \phi_2^*$.

λ ist surjektiv: Sei $\ell : A(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ ein k -Algebra-Homomorphismus. Dann sind $\phi_i = \ell(x_i)$ reguläre Funktionen auf X . Wir betrachten den Morphismus $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) : X \rightarrow \mathbf{A}^n$. Für $f \in I(Y)$ ist $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ in $A(Y)$ und damit

$$f(\phi(P)) = f(\phi_1, \dots, \phi_n)(P) = \ell(f(x_1, \dots, x_n))(P) = 0,$$

also $\phi(P) \in Z(I(Y)) = Y$, d.h. ϕ ist ein Morphismus von X in Y . Nun ist

$$\phi^*(x_i) = x_i\phi = \phi_i = \ell(x_i).$$

Da $A(Y)$ von den x_i erzeugt wird (über k) folgt $\ell = \phi^*$, was wir zeigen wollten. ■

SATZ 30. Zwei affine Varietäten X und Y sind genau dann isomorph, wenn ihre Koordinatenringe $A(X)$ und $A(Y)$ als k -Algebren isomorph sind.

Beweis: Die eine Richtung ist klar. Sei umgekehrt $\alpha : A(X) \rightarrow A(Y)$ ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung β . Nach dem letzten Satz gibt es Morphismen $\phi : Y \rightarrow X$ und $\psi : X \rightarrow Y$ mit $\alpha = \phi^*$ und $\beta = \psi^*$. Aus

$$(\phi\psi)^* = \beta\alpha = \text{id} \text{ und } (\psi\phi)^* = \alpha\beta = \text{id}$$

folgt $\phi\psi = \text{id}$ und $\psi\phi = \text{id}$, was zu zeigen war. ■

Bemerkung: Eine affine Varietät ist also durch $\mathcal{O}(X)$ eindeutig bestimmt. Ist $X \subseteq \mathbf{P}^n$ eine projektive Varietät, so ist $X_i = X \cap U_i$ eine affine Varietät (oder \emptyset), also durch $\mathcal{O}(X_i)$ eindeutig bestimmt, und weiter $X = \cup_i X_i$. Dies wird später zum Begriff eines Schemas entwickelt.

Wir wollen schließlich noch eine wichtige geometrische Konstruktionsmethode für Abbildungen kennenlernen:

Projektionen: Sei $Q \in \mathbf{P}^n$ ein Punkt und H eine Hyperebene in \mathbf{P}^n , die Q nicht enthält. Wir definieren dann $\pi : \mathbf{P}^n \setminus \{Q\} \rightarrow H \simeq \mathbf{P}^{n-1}$ wie folgt: für $P \in \mathbf{P}^n \setminus \{Q\}$ sei L die Verbindungsgerade von P und Q . Sie schneidet H in genau einem Punkt, den wir $\pi(P)$ nennen.

Algebraisch drückt sich das wie folgt aus: O.E. $Q = (1 : 0 : \dots : 0)$ und $H = \{x_0 = 0\}$. Dann gilt

$$\phi(x_0 : x_1 : \dots : x_n) = (0 : x_1 : \dots : x_n).$$

An Hand der algebraischen Darstellung kann man schnell ablesen, daß π ein Morphismus ist.

Beispiel: Sei jetzt $Q = (1 : -1 : 0) \in \mathbf{P}^2$ und $H = \{x_1 = 0\}$. Wir betrachten die Projektion Q auf $H \simeq \mathbf{P}^1$. Sei $X = \{x_1^2 + x_2^2 = x_0^2\}$. Wir schränken die Projektion ein auf $X \setminus \{Q\}$. Zeige, daß sich der Morphismus forsetzt zu einem Morphismus auf ganz X . Er stimmt mit dem im zuvor gegebenen überein.

Beispiel: Wir wählen $Q = (0 : 0 : 0 : 1) \in \mathbf{P}^3$ und $H = \{x_3 = 0\}$. Dann induziert die Projektion von Q auf H einen Morphismus

$$\phi : X \setminus \{Q\} \rightarrow \mathbf{P}^2, \text{ wo } X = Z(x_0x_3 - x_1x_2).$$

Wir haben die Geraden

$$G_u = \{u_1x_0 = u_0x_1, u_1x_2 = u_0x_3\}, \quad H_v = \{v_1x_0 = v_0x_2, v_1x_1 = v_0x_3\}.$$

Durch den Punkt Q gehen die beiden Geraden

$$G = G_\infty = \{x_0 = x_2 = 0\} \text{ und } H = H_\infty = \{x_0 = x_1 = 0\}.$$

Sie werden abgebildet auf zwei Punkte:

$$\phi(G \setminus \{Q\}) = (0 : 1 : 0), \quad \phi(H \setminus \{Q\}) = (0 : 0 : 1).$$

Sei $G_u \neq G$. Dann schneidet G_u die Gerade H , also liefert $\phi(G_u \setminus \{Q\})$ eine Gerade durch $(0 : 0 : 1)$. Analog ergibt ein $H_v \neq H$ eine Gerade durch $(0 : 1 : 0)$. Ein Punkt P , der weder auf G noch auf H liegt, ist Durchschnitt zweier Geraden $G_u \cap H_v$. Also ist $\phi(P)$ der entsprechende Durchschnitt von zwei Geraden im \mathbf{P}^2 . (Skizze!) Rechne zur Übung alles mit Gleichungen nach.

Die Veronese-Abbildung: Seien M_0, \dots, M_N die Monome vom Grad d in den Variablen x_0, \dots, x_n . Es ist $N = \binom{n+d}{n} - 1$. Wir definieren die Veronese-Abbildung

$$\nu_{n,d} : \mathbf{P}^n \rightarrow \mathbf{P}^N$$

durch $P \mapsto (M_0(P) : \dots : M_N(P))$. Man zeigt schnell, daß dies ein injektiver Morphismus ist. Später werden wir sehen, daß $\nu_{n,d}$ sogar einen Isomorphismus von \mathbf{P}^n auf eine projektive Varietät in \mathbf{P}^N liefert.

Beispiel: $n = 1, d = 2$: Wir haben die Monome x_0^2, x_0x_1, x_1^2 . Dann ist

$$\nu_{1,2}(x_0 : x_1) = (x_0^2 : x_0x_1 : x_1^2).$$

Man sieht schnell, daß dies einen Isomorphismus zwischen \mathbf{P}^1 und der Quadrik $y_0y_2 = y_1^2$ in \mathbf{P}^2 liefert.

Produkte von Varietäten

Bemerkung: Wir hatten früher gesehen, daß die Abbildung

$$\phi : \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \rightarrow Q = Z(x_0x_3 - x_1x_2), \quad ((u_0 : u_1), (v_0 : v_1)) \mapsto (u_0v_0 : u_0v_1 : u_1v_0 : u_1v_1)$$

eine Bijektion ist. Wir hätten gerne, daß ϕ ein Isomorphismus ist.

Die abgeschlossenen Mengen bzgl. der Produkttopologie auf $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ sind endliche Vereinigungen von Mengen des Typs

$$\emptyset, \text{ endliche Teilmengen, } \mathbf{P}^1 \times \{q_1, \dots, q_n\}, \{p_1, \dots, p_m\} \times \mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1.$$

Andererseits ist z.B. das Urbild der abgeschlossenen Menge $Q \cap Z(x_0 - x_3)$ die Menge

$$Z(u_0v_0 - u_1v_1) = \left\{ \left((1 : u), \left(1 : \frac{1}{u} \right) \right), u \neq 0 \right\} \cup \left\{ \left((0 : 1), (1 : 0) \right) \right\} \cup \left\{ \left((1 : 0), (0 : 1) \right) \right\},$$

die aber nicht abgeschlossen in der Produkttopologie ist.

Welche Topologie muß man auf $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ wählen, damit ϕ ein Isomorphismus ist?

DEFINITION 17. • Ein Polynom $f \in k[x_0, \dots, x_m, y_0, \dots, y_n]$ heißt *bihomogen vom Grad (d, e)* , falls gilt:

$$f = \sum_{i_0 + \dots + i_m = d} \sum_{j_0 + \dots + j_n = e} a_{i_0 \dots i_m j_0 \dots j_n} x_0^{i_0} \dots x_m^{i_m} y_0^{j_0} \dots y_n^{j_n}.$$

- Auf $\mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n$ nennen wir eine Menge *algebraisch oder abgeschlossen*, falls sie Nullstellenmenge bihomogener Polynome $f_i(x, y)$ ist. Dies induziert eine Topologie, die wir wieder *Zariski-Topologie* nennen. Damit haben wir auch eine Topologie auf allen Teilmengen von $\mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n$.
- Eine Funktion $f : X \rightarrow k$, die auf einer Teilmenge $X \subseteq \mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n$ definiert ist, heißt *regulär*, wenn sie sich lokal als Quotient bihomogener Polynome gleichen Grades schreiben läßt. Damit läßt sich der Morphismusbegriff natürlich erweitern.

SATZ 31. Auf \mathbf{P}^m seien die Koordinaten x_0, \dots, x_m , auf \mathbf{P}^n die Koordinaten y_0, \dots, y_n , und auf \mathbf{P}^{m+n} die Koordinaten $z_{ij}, i = 0 \dots m, j = 0 \dots n$ gewählt. Weiter sei

$$X = Z(z_{ij}z_{kl} - z_{il}z_{kj} : 0 \leq i, k \leq m, 0 \leq j, l \leq n).$$

Dann ist die Abbildung

$$\phi : \mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n \rightarrow X, \quad ((x_i), (y_j)) \mapsto (z_{ij} = x_i y_j)$$

ein Isomorphismus. ϕ heißt *Segre-Einbettung*.

Beweisskizze:

- Zunächst überlegt man sich, daß ϕ auf ganz $\mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n$ definiert ist. Offensichtlich ist auch das Bild von ϕ in X enthalten.
- Sei $(z_{00} : \dots : z_{mn}) \in X$. Ist $(z_{0l_1}, \dots, z_{ml_1}) \neq 0$ und $(z_{0l_2}, \dots, z_{ml_2}) \neq 0$, so sind die zwei Vektoren linear abhängig, denn: ist $z_{k_1l_1} \neq 0$ und $z_{k_2l_2} \neq 0$, so auch $z_{k_1l_2} \neq 0$ und $z_{k_2l_1} \neq 0$ wegen $z_{k_1l_1}z_{k_2l_2} = z_{k_1l_2}z_{k_2l_1}$, und es gilt dann

$$z_{il_2} = \frac{z_{k_1l_2}}{z_{k_1l_1}} z_{il_1}.$$

Genauso zeigt man: sind zwei Vektoren $(z_{k_10}, \dots, z_{k_1n})$ und $(z_{k_20}, \dots, z_{k_2n})$ von 0 verschieden, so sind sie linear abhängig. Definiert man also $\psi : X \rightarrow \mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n$ durch

$$(z_{00} : \dots : z_{mn}) \mapsto ((z_{0l} : z_{1l} : \dots : z_{ml}), (z_{k0} : z_{k1} : \dots : z_{kn})),$$

falls es Elemente $z_{k_1l} \neq 0$ und $z_{k_2l} \neq 0$ gibt, so ist dies wohldefiniert. Durch Einsetzen unter Benutzung der Relationen sieht man auch sofort $\psi \circ \phi = id$ und $\phi \circ \psi = id$.

- ϕ ist stetig: Jede abgeschlossene Menge auf X ist endlicher Durchschnitt von Mengen $X \cap Z(f)$, wo $f(z_{00}, \dots, z_{mn})$ homogen vom Grad d ist. Nun ist

$$\phi^{-1}(Z(f)) = \{f(x_0y_0, \dots, x_my_n) = 0\}$$

Nullstellenmenge eines bihomogenen Polynoms vom Grad (d, d) , also abgeschlossen. Daraus folgt die Behauptung.

- ψ ist stetig: Sei $f(x_0, \dots, x_m; y_0, \dots, y_n)$ bihomogen vom Grad (d, e) . Es genügt zu zeigen, daß $\psi^{-1}(Z(f))$ abgeschlossen ist. Sei

$$f_{kl}(z_{00}, \dots, z_{mn}) = f(z_{0l}, \dots, z_{ml}; z_{k0}, \dots, z_{kn}).$$

f_{kl} ist homogen vom Grad $d + e$. Dann überlegt man sich schnell, daß

$$\psi^{-1}(Z(f)) = Z(f_{kl} : k = 0, \dots, m, l = 0, \dots, n) \cap X$$

gilt, was die Behauptung beweist.

- Daß sowohl ϕ als auch ψ Morphismen sind, ist sofort klar, da die Abbildungen durch Polynome gegeben werden. ■

Beispiel: Die Rang-4-Quadrik $Z(x_0x_3 - x_1x_2) \subseteq \mathbf{P}^3$ ist also isomorph zu $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$.

LEMMA 8. Die Projektion $\pi : \mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n \rightarrow \mathbf{P}^m$ ist ein Morphismus.

Sind $X \subseteq \mathbf{P}^m$ und $Y \subseteq \mathbf{P}^n$ algebraische Mengen, so erhält $X \times Y$ eine algebraische Struktur, wenn man $X \times Y$ als Teilmenge von $\mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n$ betrachtet.

LEMMA 9. Sind $X \subseteq \mathbf{P}^m$ und $Y \subseteq \mathbf{P}^n$ irreduzibel, so auch $X \times Y$.

Beweis: Sei

$$X \times Y \subseteq Z(f_1, \dots, f_r) \cup Z(g_1, \dots, g_s) = Z(f_1g_1, \dots, f_rg_s) \subseteq Z(f_i g_j),$$

wo f_i and g_j bihomogene Polynome sind. Wir schreiben $f = f_i$ und $g = g_j$. Sei $P \in Y$. Dann ist

$$X \subseteq \{x \in \mathbf{P}^m : f(x, P)g(x, P) = 0\} = \{x \in \mathbf{P}^m : f(x, P) = 0\} \cup \{x \in \mathbf{P}^m : g(x, P) = 0\}.$$

Da X irreduzibel ist, gilt

$$X \subseteq \{f(x, P) = 0\} \quad \text{oder} \quad X \subseteq \{g(x, P) = 0\},$$

d.h.

$$X \times \{P\} \subseteq Z(f) \quad \text{oder} \quad X \times \{P\} \subseteq Z(g).$$

Nun ist

$$Y_f = \{y \in Y : X \times \{y\} \subseteq Z(f)\} = \{y \in Y : f(x, y) = 0 \text{ für alle } x \in X\} = \bigcap_{x \in X} \{y \in Y : f(x, y) = 0\}$$

abgeschlossen in Y , analog $Y_g = \{y \in Y : X \times \{y\} \subseteq Z(g)\}$. Nach dem Vorangegangenen ist $Y_1 \cup Y_2 = Y$, da Y irreduzibel ist, folgt also $Y = Y_1$ oder $Y = Y_2$, d.h. $X \times Y \subseteq Z(f)$ oder $X \times Y \subseteq Z(g)$. Daraus folgt schnell die Behauptung. ■

LEMMA 10. Sind X und Y projektive Varietäten, so auch $X \times Y$.

Beweis: Wir haben eben gesehen, daß auch $X \times Y$ irreduzibel ist. Ist

$$X = Z(f_i(x_0, \dots, x_m) : i = 1, \dots, r) \subseteq \mathbf{P}^m \quad \text{und} \quad Y = Z(g_j(y_0, \dots, y_n) : j = 1, \dots, s) \subseteq \mathbf{P}^n,$$

so ist

$$X \times Y = Z(f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s) \subseteq \mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n,$$

also abgeschlossen. Unter Verwendung der Segre-Einbettung folgt die Behauptung. ■

Genauso sieht man, daß das Produkt quasi-projektiver Varietäten wieder quasi-projektiv ist.

LEMMA 11. Es gilt $\mathbf{A}^m \times \mathbf{A}^n \simeq \mathbf{A}^{m+n}$. Das Produkt affiner Varietäten ist wieder affin.

Sind $X \subseteq \mathbf{P}^m$ und $Y \subseteq \mathbf{P}^n$ quasiprojektive Varietäten, so ist auch $X \times Y \subseteq \mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n$ quasiprojektiv. Sind X und Y projektiv, so auch $X \times Y$. Man sieht auch schnell, daß $\mathbf{A}^m \times \mathbf{A}^n \simeq \mathbf{A}^{m+n}$ gilt. Die Projektion $\pi : \mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n \rightarrow \mathbf{P}^m$ ist ein Morphismus.

LEMMA 12. Die Diagonale $\Delta = \{(x, x) : x \in \mathbf{P}^m\} \subseteq \mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^m$ ist abgeschlossen und $\lambda : \mathbf{P}^m \rightarrow \Delta, x \mapsto (x, x)$ ein Isomorphismus.

Beweis: Die Abgeschlossenheit der Diagonale folgt aus der Darstellung

$$\Delta = Z(x_i y_j - x_j y_i : 0 \leq i, j \leq m),$$

der Rest ergibt sich dann sofort. ■

Daraus ergibt sich leicht:

LEMMA 13. Für eine (quasi-projektive) Varietät X ist die Diagonale $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\} \subseteq X \times X$ abgeschlossen in $X \times X$.

Beweis: Wir schreiben $X \subseteq \mathbf{P}^m$. Dann ist

$$\Delta_X = \Delta_{\mathbf{P}^m} \cap (X \times X),$$

woraus die Behauptung folgt. ■

Damit beweisen wir jetzt folgenden Satz:

SATZ 32 (Identitätssatz für Morphismen). Sind X und Y Varietäten und $\phi, \psi : X \rightarrow Y$ Morphismen, die auf einer nichtleeren offenen Menge U übereinstimmen, dann gilt bereits $\phi = \psi$.

Beweis: Wir betrachten den Morphismus $\phi \times \psi : X \rightarrow Y \times Y$. Da die Diagonale Δ_Y abgeschlossen ist, ist auch $(\phi \times \psi)^{-1}(\Delta_Y)$ abgeschlossen. Andererseits gilt $U \subseteq (\phi \times \psi)^{-1}(\Delta_Y)$, was sofort $X = (\phi \times \psi)^{-1}(\Delta_Y)$ und damit $\phi = \psi$ liefert. ■

LEMMA 14. Ist $\phi : X \rightarrow Y$ ein Morphismus zwischen Varietäten, so ist der Graph $\Gamma_\phi = \{(x, \phi(x)) : x \in X\}$ abgeschlossen in $X \times Y$.

Beweis: Für den Morphismus $\psi : X \times Y \rightarrow Y \times Y$ mit $(x, y) \mapsto (\phi(x), y)$ gilt:

$$\psi^{-1}(\Delta_Y) = \Gamma_\phi,$$

woraus die Behauptung mit dem letzten Lemma folgt. ■

Bilder von Morphismen

Seien X und Y Varietäten und $\phi : X \rightarrow Y$ ein Morphismus. Was kann man dann über das Bild von ϕ , d.h. über $\phi(X) \subseteq Y$ sagen?

Beispiel: Sei $\phi : \mathbf{A}^2 \rightarrow \mathbf{A}^2$ gegeben durch $\phi((x, y)) = (x, xy)$. Dann ist

$$\phi(\mathbf{A}^2) = \{x \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}.$$

Das Bild ist keine algebraische Menge in \mathbf{A}^2 , auch nicht quasiaffin.

Wir wollen sehen, daß bei projektiven Varietäten so etwas nicht vorkommt.

Ist $\phi : X \rightarrow Y$ ein Morphismus zwischen Varietäten, $\Gamma_\phi = \{(x, \phi(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$ der Graph von ϕ und $\pi : X \times Y \rightarrow Y$ die Projektion auf die zweite Komponente, so ist das Bild von ϕ :

$$\phi(X) = \pi(\Gamma_\phi) \subseteq Y.$$

Aus diesem Grund werden wir zunächst Eigenschaften von Projektionen $\pi : X \times Y \rightarrow Y$ studieren. Eine stetige Abbildung $\phi : X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen heißt abgeschlossen, wenn für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ das Bild $\phi(A)$ abgeschlossen in Y ist.

LEMMA 15. *Die Projektion $\pi : \mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n \rightarrow \mathbf{P}^n$ auf den zweiten Faktor ist eine abgeschlossene Abbildung.*

Beweis:

1. Auf \mathbf{P}^m wählen wir die Koordinaten x_0, \dots, x_m , auf \mathbf{P}^n die Koordinaten y_0, \dots, y_n . Sei $X \subseteq \mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n$ abgeschlossen. Wir müssen sehen, daß auch $\pi(X)$ abgeschlossen ist. Es gibt bihomogene Polynome $f_i(x, y)$ mit $X = Z(f_1, \dots, f_r)$. Wir können annehmen, daß alle Polynome $f_i(x, y)$ den gleichen Grad (d, e) haben.
2. Sei V_ℓ der k -Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad ℓ in x_0, \dots, x_m . Wir definieren eine k -lineare Abbildung (für $y \in k^{n+1}$)

$$\phi_\ell(y) : V_{\ell-d} \times \dots \times V_{\ell-d} \rightarrow V_\ell, \quad (g_1(x), \dots, g_r(x)) \mapsto f_1(x, y)g_1(x) + \dots + f_r(x, y)g_r(x).$$

Sei m_ℓ die Dimension von $(V_{\ell-d})^r$ und n_ℓ die Dimension von V_ℓ . Bezüglich fest gewählter Basen wird dann $\phi_\ell(y) : k^{m_\ell} \rightarrow k^{n_\ell}$ durch eine $n_\ell \times m_\ell$ -Matrix $M_\ell(y)$ beschrieben, wo die Einträge homogene Polynome in y_0, \dots, y_n (vom Grad e) sind.

3. Nun gilt für $b = (b_0 : \dots : b_n) \in \mathbf{P}^n$, wobei wir uns die Koordinaten b_0, \dots, b_n fest gewählt denken, und den Hilbertschen Nullstellensatz (in der projektiven Version) benutzen:

$$\begin{aligned} b \notin \pi(X) &\iff \{x \in \mathbf{P}^m : f_1(x, b) = \dots = f_r(x, b) = 0\} = \emptyset \\ &\iff \sqrt{(f_1(x, b), \dots, f_r(x, b))} \supseteq (x_0, \dots, x_n) \\ &\iff \text{es gibt } \ell \geq 1 \text{ mit } (x_0, \dots, x_n)^\ell \subseteq (f_1(x, b), \dots, f_r(x, b)) \\ &\iff \text{es gibt ein } \ell \geq 1 \text{ mit } V_\ell \subseteq (f_1(x, b), \dots, f_r(x, b)) \\ &\iff \text{es gibt ein } \ell \geq 1, \text{ so daß } \phi_\ell(b) \text{ surjektiv ist} \\ &\iff \text{es gibt } \ell \geq 1 : \text{Rang}(M_\ell(b)) = n_\ell \\ &\iff \text{es gibt } \ell \geq 1 \text{ und eine } n_\ell \times n_\ell\text{-Unterdeterminante von } M_\ell(b) \neq 0. \end{aligned}$$

Damit gilt umgekehrt:

$$b \in \pi(X) \iff \text{für alle } \ell \text{ verschwinden alle } n_\ell \times n_\ell\text{-Unterdeterminanten von } M_\ell(b).$$

Also gilt:

$$\pi(X) = \bigcap_{d \geq 1} Z(\{\text{alle } n_d \times n_d\text{-Unterdeterminanten von } M_d(y)\}),$$

insbesondere ist $\pi(X)$ abgeschlossen. ■

FOLGERUNG 5. Für alle Varietäten Y ist die Projektion $\pi : \mathbf{P}^m \times Y \rightarrow Y$ auf die zweite Komponente eine abgeschlossene Abbildung.

Beweis: Wir können schreiben $Y \subseteq \mathbf{P}^n$. Die Projektion π kommt dann her von der Projektion $\pi : \mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n \rightarrow \mathbf{P}^n$. Sei jetzt $A \subseteq \mathbf{P}^m \times Y$ abgeschlossen. Dann gibt es eine abgeschlossene Teilmenge $B \subseteq \mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n$ mit $A = (\mathbf{P}^m \times Y) \cap B$, da $\mathbf{P}^m \times Y$ die induzierte Topologie trägt. Nach dem Lemma ist das Bild $\pi(B) \subseteq \mathbf{P}^n$ abgeschlossen. Nun ist aber $\pi(A) = Y \cap \pi(B)$, also $\pi(A)$ abgeschlossen in Y . ■

SATZ 33. Für eine projektive Varietät X und eine Varietät Y ist die Projektion $\pi : X \times Y \rightarrow Y$ auf die zweite Komponente eine abgeschlossene Abbildung.

Beweis: X ist eine abgeschlossene Teilmenge eines \mathbf{P}^m . Ist $A \subseteq X \times Y$ abgeschlossen, so ist A auch in $\mathbf{P}^m \times Y$ abgeschlossen. Nach der Folgerung ist dann $\pi(A) \subseteq Y$ abgeschlossen. ■

Bemerkung: Die Aussage des letzten Satzes formuliert man auch so: Für eine projektive Varietät ist die Abbildung $X \rightarrow \{\text{Punkt}\}$ universell abgeschlossen.

FOLGERUNG 6. Ist $\phi : X \rightarrow Y$ ein Morphismus zwischen Varietäten und X projektiv, so ist das Bild $\phi(X) \subseteq Y$ abgeschlossen.

Beweis: Wir wissen, daß der Graph $\Gamma_\phi = \{(x, \phi(x)) : x \in X\}$ abgeschlossen in $X \times Y$ ist. Ist $\phi : X \times Y \rightarrow Y$ die Projektion, so ist nach unserem Satz $\phi(X) = \pi(\Gamma_\phi)$ abgeschlossen in Y . ■

Bemerkung: Was bedeutet der Satz? Ist $\phi : X \rightarrow \mathbf{P}^n$ ein Morphismus, so ist also $\phi(X)$ abgeschlossen in \mathbf{P}^n , d.h. es gibt homogene Polynome f_1, \dots, f_r mit

$$\phi(X) = \{f_1(x_0, \dots, x_n) = \dots = f_r(x_0, \dots, x_n) = 0\},$$

das Bild von ϕ läßt sich also durch Gleichungen beschreiben.

Beispiel: Ist X eine projektive Varietät und $\phi : X \rightarrow k$ eine reguläre Funktion, so kann man ϕ auch als Morphismus $X \rightarrow \mathbf{P}^1$ auffassen. Dann ist $\phi(X) \subseteq \mathbf{P}^1$ abgeschlossen, wegen $\phi(X) \neq \mathbf{P}^1$ ist $\phi(X)$ endlich, da es auch irreduzibel ist, besteht also $\phi(X)$ aus einem Punkt, d.h. ϕ ist konstant. Dies liefert einen alternativen Beweis eines früheren Satzes.

Beispiel: Wir betrachten die Projektion $\pi : \mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}^1 \rightarrow \mathbf{A}^1$ auf die zweite Komponente. Die Menge $X = \{xy = 1\} \subseteq \mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}^1$ ist abgeschlossen, aber $\phi(X) = \mathbf{A}^1 \setminus \{0\}$ ist nicht abgeschlossen. Also ist $\mathbf{A}^1 \rightarrow \{\text{Punkt}\}$ nicht universell abgeschlossen.

Das Beispiel verallgemeinert sich wie folgt:

SATZ 34. Ist X eine (quasi-projektive) Varietät, so daß für alle Varietäten Y die Projektion $\pi : X \times Y \rightarrow Y$ abgeschlossen ist, so ist X projektiv.

Beweis: Ist $X \subseteq \mathbf{P}^n$, so betrachten wir den Morphismus $\phi : X \rightarrow \mathbf{P}^n$ mit $\phi(x) = x$. Wir wissen, daß der Graph Γ_ϕ abgeschlossen in $X \times \mathbf{P}^n$ ist. Also ist

$$X = \phi(X) = \pi(\Gamma_\phi) \subseteq \mathbf{P}^n$$

abgeschlossen in \mathbf{P}^n , d.h. X eine projektive Varietät. ■

Wir wollen noch eine (von vielen) Anwendungen aufzeigen:

Die ebenen Kurven vom Grad d bilden einen projektiven Raum der Dimension $\frac{d(d+3)}{2}$, den wir jetzt mit $E(d)$ abkürzen wollen:

$$E(d) = \{a_0 x_0^d + \dots + a_{\frac{d(d+3)}{2}} x_2^d = 0\} = \{(a_0 : \dots : a_{\frac{d(d+3)}{2}})\}.$$

Multipliziert man ein homogenes Polynom vom Grad d_1 zusammen mit einem homogenen Polynom vom Grad d_2 , so erhält man ein homogenes Polynom vom Grad $d_1 + d_2$. Also erhält man einen Morphismus:

$$\phi_{d_1, d_2} : E(d_1) \times E(d_2) \rightarrow E(d_1 + d_2).$$

Zerfällt umgekehrt eine Kurve vom Grad d in zwei Kurven vom Grad e und $d - e$, so liegt die Kurve im Bild von

$$\phi_{e, d-e} : E(e) \times E(d - e) \rightarrow E(d).$$

Damit ist unmittelbar klar: Die reduziblen Kurven sind genau die Kurven in

$$\bigcup_{1 \leq e \leq \frac{d}{2}} \phi_{e, d-e}(E(e) \times E(d - e)).$$

Nach unserem Hauptsatz dieses Abschnitts ist diese Menge abgeschlossen. Also erhält man:

FOLGERUNG 7. *Die reduziblen Kurven in $E(d)$ bilden eine abgeschlossene Menge, d.h. lassen sich durch Gleichungen charakterisieren.*

Rationale Abbildungen

Wir haben gesehen, daß für eine projektive Varietät $\mathcal{O}(X) = k$ ist. Geht man aber zu einer offenen Teilmenge über, so wird es im allgemeinen viele reguläre Funktionen darauf geben. Dies wollen wir jetzt näher betrachten.

DEFINITION 18. Sei X eine Varietät. Wir nennen zwei reguläre Funktionen $f_1 : U_1 \rightarrow k$, $f_2 : U_2 \rightarrow k$, wo U_1, U_2 offene nichtleere Teilmengen von X sind, äquivalent, wenn es eine offene Menge $\emptyset \neq V \subseteq U_1, U_2$ gibt, so daß $f_1|_V = f_2|_V$. Durch diese Definition erhält man tatsächlich eine Äquivalenzrelation. Eine Äquivalenzklasse nennen wir auch rationale Funktion auf X . Die Menge der Äquivalenzklassen wird mit $k(X)$ bezeichnet.

Bemerkungen:

1. Sind $f_1 : U_1 \rightarrow k, f_2 : U_2 \rightarrow k$ zwei reguläre Funktionen, die auf einer offenen nichtleeren Menge übereinstimmen, so auch auf $U_1 \cap U_2$ wegen des Identitätssatzes für reguläre Funktionen.
2. Im eigentlichen Sinn sind rationale Funktionen keine Funktionen auf X .

Beispiel: Wir betrachten auf $X = Z(x-y) \subseteq \mathbf{A}^2$ die Funktion $f = \frac{x}{y}$. Sie ist regulär auf $U = X \setminus \{(0, 0)\}$. Nun ist aber $f|_{U=1|U}$, also ist eigentlich $f = 1$, nur ist die Darstellung nicht optimal.

LEMMA 16. Es gibt eine größte offene Menge, auf der eine rationale Funktion definiert (und regulär) ist.

Beweis: Seien $(f_i, U_i), i \in I$ die Repräsentanten einer rationalen Funktion. Sei $U = \bigcup_i U_i$. Wir wollen eine reguläre Funktionen auf der offenen Menge U definieren: Sei $P \in U$. Dann gibt es ein i mit $P \in U_i \subseteq U$. Wir definieren $f(P) = f_i(P)$. Die Funktion f ist wohldefiniert: Ist $P \in U_j$, so gilt ja: $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$, also $f_j(P) = f_i(P)$. Die Funktion f ist regulär wegen $f|_{U_i} = f_i$. Nach Definition von U kann f auf keiner größeren Menge definiert werden. ■

Das Lemma bedeutet, daß wir uns rationale Funktionen doch wieder als Funktionen vorstellen können. Wir sprechen dann auch vom maximalen Definitionsbereich U von f . Wir sagen f ist definiert in P , falls $P \in U$.

LEMMA 17. $k(X)$ ist ein Körper. Er wird Funktionenkörper von X genannt.

Beweis:

- Seien rationale Funktionen gegeben, repräsentiert durch (f, U) und (g, V) . Dann liefern $(f+g, U \cap V)$ und $(fg, U \cap V)$ rationale Funktionen. Man sieht leicht, daß dies mit der Äquivalenzrelation verträglich ist.
- Repräsentiere (f, U) eine rationale Funktion $\neq 0$. Dann ist $Z = f^{-1}(0)$ eine abgeschlossene Menge in U , also $V = U \setminus Z$ eine offene nichtleere Menge. Auf V ist $\frac{1}{f}$ regulär. Damit folgt die Behauptung. ■

Beispiel: Natürlich sind auf ganz X reguläre Funktionen auch rationale Funktionen, d.h. $\mathcal{O}(X) \subseteq k(X)$.

LEMMA 18. Für eine affine Varietät ist

$$k(X) = \text{Quot}(\mathcal{O}(X)) = \text{Quot}(A(X)).$$

Beweis: Wir wissen, daß $A(X) = \mathcal{O}(X)$ gilt, und daß $\mathcal{O}(X) \subseteq k(X)$ gilt. Da $k(X)$ Körper ist, erhält man $\text{Quot}(A(X)) \subseteq k(X)$. Andererseits ist jede rationale Funktion Quotient von Polynomen, also gilt $\text{Quot}(A(X)) = k(X)$. ■

Beispiele:

- $k(\mathbf{A}^n) = k(x_1, \dots, x_n)$.
- $K = k(Z(y^2 - x^3))$. Wir können alle rationalen Funktionen in x und y betrachten mit der Relation $y^2 = x^3$. Setzt man $t = \frac{y}{x}$, so wird $t^2 = x, t^3 = y$, also $K = k(t)$.

LEMMA 19. Sei X eine Varietät und U eine offene nichtleere Teilmenge. Dann ist $k(X) = k(U)$.

Beweis:

- $k(U) \rightarrow k(X)$: Ein (f, V) wird auf (f, V) abgebildet.
- $k(X) \rightarrow k(U)$: Ein (f, V) wird auf $f|_{U \cap V}$ abgebildet. ■

Beispiel: $k(\mathbf{P}^n) = k(\mathbf{A}^n) = k(x_1, \dots, x_n)$.

Für spätere Zwecke definieren wir noch:

DEFINITION 19. Sei X eine Varietät. Ist $P \in X$, so heißt

$$\mathcal{O}_{X,P} = \{f \in k(X) : f \text{ definiert in } P\}$$

der lokale Ring von X in P .

Es ist klar, daß $\mathcal{O}_{X,P}$ ein Ring ist. Aber es gilt noch mehr:

LEMMA 20. $\mathcal{O}_{X,P}$ ist ein lokaler Ring, d.h. besitzt genau ein maximales Ideal, nämlich

$$\mathfrak{m}_P = \{f \in \mathcal{O}_{X,P} : f(P) = 0\}.$$

Beweis: Daß \mathfrak{m}_P ein Ideal ist, ist klar. Sei jetzt $f \in \mathcal{O}_{X,P} \setminus \mathfrak{m}_P$. Auf einer offenen Umgebung U von P sei f definiert. Wegen $g(P) \neq 0$ ist $V = U \cap \{g \neq 0\}$ eine offene Umgebung von P , wo $\frac{1}{f}$ regulär ist. Also ist f eine Einheit und damit

$$\mathcal{O}_{X,P} = \mathfrak{m}_P \cup \{ \text{Einheiten} \},$$

woraus sofort die Behauptung folgt. ■

Beispiel: Sei $X \subseteq \mathbf{A}^n$ eine affine Varietät und $P = (p_1, \dots, p_n) \in X$. Dann ist $\mathcal{O}(X) = A(X)$ und mit $\mathfrak{m} = (x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n)$

$$\mathcal{O}_{X,P} = A(X)_{\mathfrak{m}},$$

denn $\mathcal{O}_{X,P} = \{ \frac{f}{g} \in k(X) : f, g \in A(X), g(P) \neq 0 \}$, dies ist aber die Lokalisierung.

Wir haben also Inklusionen:

$$\mathcal{O}(X) \subseteq \mathcal{O}_{X,P} \subseteq k(X)$$

Beispiel: Sei $X = Z(y^2 - x^3) \in \mathbf{A}^2$. Wir haben bereits gesehen $k(X) = k(t)$ mit $t = \frac{y}{x}$. Es gilt $t^2, t^3 \in \mathcal{O}_{X,0}$, nicht jedoch $t \in \mathcal{O}_{X,0}$. Wie sieht der lokale Ring aus?

Wir kommen nun zu rationalen Abbildungen zwischen Varietäten. Wir haben bereits gesehen, daß es eine Abbildung gibt von der Quadrik in \mathbf{P}^3 in den \mathbf{P}^2 , die aber in einem Punkt nicht definiert war. Dadurch erhalten wir Beziehungen zwischen geometrischen Objekten, die aber keine Morphismen mehr sind.

DEFINITION 20. Seien X und Y Varietäten. Zwei Morphismen $\phi : U \rightarrow Y$ und $\psi : V \rightarrow Y$ heißen äquivalent, wo U, V nichtleere offene Teilmengen von X sind, wenn es eine nichtleere offene Menge $W \subseteq U, V$ gibt mit $\phi|_W = \psi|_W$. Wegen des Identitätssatzes gilt dann bereits $\phi|_{U \cap V} = \psi|_{U \cap V}$. Eine Äquivalenzklassen nennen wir eine rationale Abbildung $\phi : X \rightarrow Y$.

Wie bei rationalen Funktionen zeigt man, daß es eine größte offene Menge U gibt, auf der eine rationale Funktion ein Morphismus ist. Wir sagen, die rationale Funktion ϕ ist in den Punkten von U definiert.

Bemerkung: Wie kann man eine rationale Abbildung $X \rightarrow Y$ angeben? O.E. $Y \subseteq \mathbf{P}^n$. Dann gibt es rationale Funktionen f_0, \dots, f_n mit $\phi = (f_0 : \dots : f_n)$. Ist $X \subseteq \mathbf{P}^m$, so gibt es homogene Polynome gleichen Grades $g_i(x_0, \dots, x_m)$ mit

$$\phi = (g_0(x_0, \dots, x_m) : \dots : g_n(x_0, \dots, x_m)).$$

Wo ist ϕ bei dieser Darstellung trivialerweise nicht definiert?

Beispiel: Jede rationale Funktion $f \in k(X)$ definiert eine rationale Abbildung $X \rightarrow \mathbf{A}^1$ und damit auch eine rationale Abbildung $X \rightarrow \mathbf{P}^1$.

Beispiel: $\phi : \mathbf{A}^2 \rightarrow \mathbf{P}^1$ mit $\phi(x, y) = (x : y)$. Dann ist ϕ definiert außer im Punkt $(0, 0)$.

Behauptung: ϕ ist nicht definiert in $(0, 0)$.

Beweis: Zunächst gilt

$$\phi^{-1}(0 : 1) \supseteq \{x = 0\} \text{ und } \phi^{-1}(1 : 0) \supseteq \{y = 0\}.$$

Wäre ϕ auch in $(0, 0)$ definiert, so würde aus der Stetigkeit von ϕ sofort $(0, 0) \in \phi^{-1}(0 : 1)$ und $(0, 0) \in \phi^{-1}(1 : 0)$ folgen, was Unsinn ist.

Wann läßt sich das Kompositum rationaler Abbildungen definieren? Seien $\phi : X \rightarrow Y$ und $\psi : Y \rightarrow Z$ rationale Abbildungen. ϕ sei auf U definiert, ψ auf V .

- Ist $\phi(U) \cap V = \emptyset$, so kann man das Kompositum offensichtlich nicht definieren.
- Sei nun $\phi(U) \cap V \neq \emptyset$ vorausgesetzt. Dann ist $W = \phi^{-1}(V)$ eine offene nichtleere Teilmenge von U . Dann liefert $\psi \circ \phi : W \rightarrow Z$ einen Morphismus, also definiert dies eine rationale Abbildung. (Zeige, daß die Komposition wohldefiniert ist.)

Wir nennen eine rationale Abbildung $\phi : X \rightarrow Y$ dominant, wenn ϕ auf einer offenen Menge U definiert ist und $\phi(U)$ dicht in Y liegt. Dann kann man das Kompositum $\psi \circ \phi$ immer bilden. Insbesondere ist für jede rationale Funktion $f \in k(Y)$ das Kompositum $f \circ \phi$ eine rationale Funktion auf X . Dies ergibt sofort das folgende Lemma:

LEMMA 21. Sei $\phi : X \rightarrow Y$ eine dominante rationale Abbildung zwischen Varietäten. Dann ist

$$\phi^* : k(Y) \rightarrow k(X), \quad f \mapsto f \circ \phi$$

ein k -Algebrahomomorphismus.

Bemerkung: Da Funktionenkörper Körper sind, ist jeder k -Algebrahomomorphismus $K(Y) \rightarrow K(X)$ injektiv.

SATZ 35. Seien X und Y Varietäten. Dann ist die Zuordnung

$$\{ \text{dominanter Morphismus } \phi : X \rightarrow Y \} \rightarrow \{ k\text{-Algebrahomomorphismus } \alpha : k(Y) \rightarrow k(X) \}, \phi \mapsto \phi^*$$

eine Bijektion.

Beweis: Da es bei rationalen Abbildungen nur auf das Verhalten auf einer nichtleeren offenen Menge ankommt, können wir voraussetzen, daß X quasi-affin und Y affin ist. Sei also $X \subseteq \mathbf{A}^m$ mit Koordinaten x_1, \dots, x_m und $Y \subseteq \mathbf{A}^n$ mit Koordinaten y_1, \dots, y_n . Wir beweisen die Behauptung, indem wir die Umkehrabbildung konstruieren.

Sei $\alpha : k(Y) \rightarrow k(X)$ ein k -Algebrahomomorphismus. Dann sind $f_i = \alpha(y_i)$ rationale Funktionen auf X , also gibt es eine nichtleere offene Menge $U \subseteq X$, so daß alle f_i regulär auf U sind. Dies liefert einen Morphismus

$$\psi : U \rightarrow \mathbf{A}^n, \quad P \mapsto (f_1(P), \dots, f_n(P)).$$

Ist jetzt $F(y_1, \dots, y_n)$ ein Polynom mit $F(\psi(U)) = 0$, so gilt in $k(X)$:

$$0 = F(f_1, \dots, f_n) = \alpha(F(y_1, \dots, y_n)),$$

also $F(y_1, \dots, y_n) = 0$ in $k(Y) = \text{Quot}(A(Y))$ und damit $F \in I(Y)$. Dies zeigt, daß $\psi(U) \subseteq Y$ gilt und außerdem, daß $\psi : U \rightarrow Y$ dominant ist. Schließlich gilt noch

$$\psi^*(y_i) = y_i \circ \psi = f_i = \alpha(y_i),$$

d.h. $\psi^* = \alpha$. Damit folgt die Behauptung. ■

DEFINITION 21. Eine birationale Abbildung $\phi : X \rightarrow Y$ ist eine rationale Abbildung, die eine inverse rationale Abbildung $\psi : Y \rightarrow X$ besitzt: $\phi\psi = \text{id}_Y$, $\psi\phi = \text{id}_X$, wo $=$ die Gleichheit als rationale Abbildungen bezeichnet.

SATZ 36. Seien X und Y Varietäten. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. X ist birational zu Y .
2. Es gibt offene Teilmengen $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$, so daß U zu V isomorph ist.

3. $k(X) \simeq k(Y)$.

Beweis: Daß 1. und 3. äquivalent sind, folgt aus dem vorangehenden Satz. Daß 2. 1. impliziert, ist klar. Es bleibt zu zeigen, daß aus 1. 2. folgt. Sei also X birational zu Y . Dann gibt es offene Teilmengen $U \subseteq X$ und $W \subseteq Y$ und Morphismen $\phi : U \rightarrow Y$, $\psi : W \rightarrow X$, so daß als rationale Abbildungen $\psi\phi = id_X$ und $\phi\psi = id_Y$. Durch Verkleinern von U können wir $\phi(U) \subseteq W$ annehmen. Dann ist $\psi\phi : U \rightarrow X$ ein Morphismus und natürlich $\psi\phi = id_U$. Sei $V = \psi^{-1}(U)$. Dann gilt natürlich $\psi(V) \subseteq U$ und wegen $\psi\phi = id_U$ insbesondere $\psi(\phi(U)) \subseteq U$, also $\phi(U) \subseteq \psi^{-1}(U) = V$. Damit haben wir Morphismen $\phi : U \rightarrow V$ und $\psi : V \rightarrow U$. Wegen des Identitätssatzes für Morphismen, sind ϕ und ψ Isomorphismen. ■

Bemerkung: Ein Grundproblem der algebraischen Geometrie ist die Aufgabe: Klassifiziere alle Varietäten bis auf birationale Äquivalenz.

DEFINITION 22. Eine Varietät X heißt rational, wenn sie birational zu \mathbf{P}^n ist.

Beispiele: Rationale Kurven sind

- $y^2 = x^3$ in \mathbf{A}^2 . Wir sahen, daß der Funktionenkörper $\simeq k(t)$ ist.
- $y^2 = x^2 + x^3$ in \mathbf{A}^2 . Der Funktionenkörper ist $k(x, y)$ modulo der Relation $y^2 = x^2 + x^3$. Sei $t = \frac{y}{x}$. Dann ist $x = t - 1$ und $y = t(t - 1)$, also der Funktionenkörper gleich $k(t)$, also wieder rational.

Beispiel: Quadriken sind rationale Varietäten.

Denn: Sei Q eine Quadrik im \mathbf{P}^n , o.E. vom Rang ≥ 3 . Nach Koordinatenwechsel läßt sich dann Q in der Form

$$x_0x_1 - x_2^2 - \dots - x_r^2 = 0$$

schreiben. Affin ($x_0 = 1$) ist Q gegeben durch

$$x_1 = x_2^2 + \dots + x_r^2.$$

Der Koordinatenring ist also

$$k[x_1, \dots, x_n] / (x_1 - x_2^2 - \dots - x_r^2) \simeq k[x_2, \dots, x_n],$$

also $k(Q) \simeq k(x_2, \dots, x_n)$.

SATZ 37. Jede Varietät ist birational zu einer Hyperfläche.

Beweis: Sei $K = k(X)$ der Funktionenkörper von X . Der Körper K ist eine endlich erzeugte Erweiterung von k . Es gibt dann algebraisch unabhängige Elemente $x_1, \dots, x_n \in K$, so daß K über $k(x_1, \dots, x_n)$ (endlich) algebraisch ist. Nach dem Satz über die Existenz separabler Transzendenzbasen können x_1, \dots, x_n so gewählt werden, daß K über $k(x_1, \dots, x_n)$ separabel (endlich) algebraisch ist. Also gibt es ein $\alpha \in K$, so daß

$$K = k(x_1, \dots, x_n, \alpha)$$

gilt. Es gibt dann Polynome $g_i(x_1, \dots, x_n)$ mit

$$g_0(x_1, \dots, x_n)\alpha^d + \dots + g_d(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Also ist K der Funktionenkörper der Hyperfläche

$$g_0(x_1, \dots, x_n)x_{n+1}^d + \dots + g_d(x_1, \dots, x_n) = 0$$

im \mathbf{A}^{n+1} . ■

Aufblasen

Dies ist ein wichtiges Beispiel eines birationalen Morphismus.

Aufblasen von \mathbf{A}^n in $O = (0, \dots, 0)$: Der \mathbf{A}^n habe Koordinaten x_1, \dots, x_n . Wir wählen einen \mathbf{P}^{n-1} mit Koordinaten y_1, \dots, y_n . Auf $\mathbf{A}^n \times \mathbf{P}^{n-1}$ sind die abgeschlossenen Mengen die Nullstellenmengen von Polynomen in $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, die homogen in y_1, \dots, y_n sind. Wir definieren

$$X = \{x_i y_j = x_j y_i\} \subseteq \mathbf{A}^n \times \mathbf{P}^{n-1},$$

die Projektion auf den ersten Faktor heiße ϕ . Wir wollen ϕ untersuchen.

- Sei $P = (p_1, \dots, p_n) \neq O$ gegeben. O.E. (Symmetrie in den Indizes) sei $p_1 \neq 0$. Was ist $\phi^{-1}(P)$? Sei $((p_1, \dots, p_n), (q_1 : \dots : q_n)) \in \phi^{-1}(P)$. Wir haben die Bedingungen $p_1 q_i = q_1 p_i$, also $q_i = \frac{q_1}{p_1} p_i$, d.h.

$$(P, (q_1 : \dots : q_n)) = ((p_1, \dots, p_n), (p_1 : \dots : p_n)).$$

Es gibt also genau einen Urbildpunkt. Definiert man

$$\psi : \mathbf{A}^n \setminus \{O\} \rightarrow X \setminus \phi^{-1}(O) \text{ durch } (p_1, \dots, p_n) \mapsto ((p_1, \dots, p_n), (p_1 : \dots : p_n)),$$

so erhält man einen inversen Morphismus zu $\phi|_{X \setminus \phi^{-1}(O)} : X \setminus \phi^{-1}(O) \rightarrow \mathbf{A}^n \setminus \{O\}$. Also:

$$X \setminus \phi^{-1}(O) \simeq \mathbf{A}^n \setminus \{O\}.$$

Insbesondere ist ϕ ein birationaler Morphismus.

- Was ist $\phi^{-1}(O)$? Die Gleichungen für X liefern keine Bedingungen mehr, also ist

$$\phi^{-1}(O) = \{O\} \times \mathbf{P}^{n-1}.$$

- Wir wollen jetzt zeigen, daß es eine natürliche Bijektion zwischen den Geraden in \mathbf{A}^n durch O und den Punkten von $\phi^{-1}(O) \simeq \mathbf{P}^{n-1}$ gibt.

- Sei G eine Gerade durch O . Sie läßt sich parametrisiert schreiben als $x_i = c_i t$ mit $t \in k$.
- Wir berechnen $\phi^{-1}(G \setminus \{O\})$: Nach der vorangegangenen Diskussion ist dies

$$\phi^{-1}(G \setminus \{O\}) = \{((c_1 t, \dots, c_n t), (c_1 : \dots : c_n)) : t \in k \setminus \{0\}\}.$$

- Der Zariski-Abschluß ist offensichtlich

$$\overline{\phi^{-1}(G \setminus \{O\})} = \{((c_1 t, \dots, c_n t), (c_1 : \dots : c_n)) : t \in k\}.$$

- Der Schnitt mit $\phi^{-1}(O)$ ist der Punkt $O \times (c_1 : \dots : c_n)$.
- Es ist klar, daß wir mit dieser Konstruktion eine Bijektion zwischen den Geraden durch O und den Punkten von \mathbf{P}^{n-1} erhalten.

- X ist irreduzibel: $\phi^{-1}(O)$ liegt im Abschluß von $X \setminus \phi^{-1}(O) \simeq \mathbf{A}^n \setminus \{O\}$, welches irreduzibel ist.
- Vorstellung: Die Aufblasung zieht die Geraden durch O auseinander.

DEFINITION 23. Sei Y eine abgeschlossene Untervarietät von \mathbf{A}^n mit $O \in Y$. Sei $\phi : X \rightarrow \mathbf{A}^n$ die Aufblasung von O . Dann heißt

$$\tilde{Y} = \overline{\phi^{-1}(Y \setminus \{O\})}$$

die Aufblasung von Y in O . Die eingeschränkte Abbildung bezeichnen wir wieder mit

$$\phi : \tilde{Y} \rightarrow Y.$$

$\phi^{-1}(O)$ heißt *exzeptionelle Faser* oder *exzeptioneller Divisor*. Durch Koordinatenwechsel können wir jeden Punkt auf P aufblasen.

ϕ induziert einen Isomorphismus

$$\tilde{Y} \setminus \phi^{-1}(O) \simeq Y \setminus \{O\},$$

also ist dies ein birationaler Morphismus.

Wir bläst man \mathbf{P}^n in einem Punkt auf? Sei $P = (1 : 0 : \dots : 0)$. Wir sind dann eigentlich in einer affinen Situation um P . Wir definieren

$$X = \{((x_0 : \dots : x_n), (y_1 : \dots : y_n)) \in \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^{n-1} : x_i y_j = x_j y_i \text{ für } i, j = 1, \dots, n\}.$$

Beispiel: Wir blasen die ebene Kurve $y^2 = x^2(x+1)$ in $(0, 0)$ auf. Es ist

$$\tilde{\mathbf{A}}^2 = \{((x, y), (u : v)) \in \mathbf{A}^2 \times \mathbf{P}^1 : xv = yu\}.$$

$u = 1$ Dann ist $y = xv$. Die Gleichung $x = 0$ beschreibt $\phi^{-1}(O)$. Einsetzen liefert $x^2 v^2 = x^2(x+1)$, also für $x \neq 0$ die Gleichung $x+1 = v^2$. Schnitt mit $x = 0$ liefert die Punkte

$$((0, 0), (1 : 1)), ((0, 0), (1 : -1)).$$

Es ist dann

$$\tilde{X} = \{u^2(x+1) = v^2\} \subseteq \tilde{\mathbf{A}}^2.$$

$v = 1$ Dann ist $x = yu$. Einsetzen liefert $y^2 = y^2 u^2 (yu+1)$, also $1 = u^2(yu+1)$.

Nach unseren vorangegangenen Überlegungen ist dies verständlich, wenn wir auch noch keinen Tangentenbegriff entwickelt haben.

Beispiel: Wir haben die Projektion $\phi : \mathbf{P}^2 \rightarrow \mathbf{P}^1$ mit $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1 : x_2)$ studiert, die in $(1 : 0 : 0)$ nicht definiert war. Wir blasen den \mathbf{P}^2 in $(1 : 0 : 0)$ auf:

$$\tilde{\mathbf{P}}^2 = \{((x_0 : x_1 : x_2), (y_1 : y_1)) \in \mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^1 : x_1 y_2 = x_2 y_1\}.$$

Es gilt

$$(x_1 : x_2) = (x_1 y_2 : x_2 y_2) = (x_2 y_1 : x_2 y_2) = (y_1 : y_2)$$

auf einer offenen Menge in X . Das rechte ist aber ein Morphismus. Die Projektion wird also nach Aufblasung zu einem Morphismus. Die Fasern entsprechen genau den Geraden durch $(1 : 0 : 0)$.

Beispiel: Sei $Q = \{x_0 x_3 - x_1 x_2\}$ die Rang-4-Quadrik im \mathbf{P}^3 . Wir hatten die Projektion $\pi = (x_0 : x_1 : x_2)$ betrachtet. Wir blasen Q im Punkt $(0 : 0 : 0 : 1)$ auf. Sei

$$\tilde{\mathbf{P}}^3 = \{((x_0 : x_1 : x_2 : x_3), (y_0 : y_1 : y_2)) \in \mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^2 : x_0 y_1 = x_1 y_0, x_0 y_2 = x_2 y_0, x_1 y_2 = x_2 y_1\}.$$

Wir wollen damit \tilde{Q} berechnen.

- $y_0 = 1$: Dann ist $x_1 = x_0 y_1, x_2 = x_0 y_2$ und $x_0 x_3 - x_1 x_2 = x_0(x_3 - x_0 y_1 y_2)$. Es bleibt also die Gleichung $x_3 - x_0 y_1 y_2 = 0$, also $x_3 - x_1 y_2 = 0$ bzw. $x_3 y_0 - x_1 y_2 = 0$.
- $y_1 = 1$: Dann ist $x_0 = x_2 y_0, x_1 = x_2 y_1$ und $x_0 x_3 - x_1 x_2 = x_1(x_3 y_0 - x_1 y_2)$. Es bleibt $x_3 y_0 - x_1 y_2 = 0$.
- $y_2 = 1$: Dann ist $x_0 = x_2 y_0, x_1 = x_2 y_1$ und $x_0 x_3 - x_1 x_2 = x_2(y_0 x_3 - x_2 y_1)$. Es bleibt $x_3 y_0 - x_2 y_1 = 0$.

Damit ist

$$\tilde{Q} = \{((x_0 : x_1 : x_2 : x_3), (y_0 : y_1 : y_2)) \in \mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^2 : x_0 y_1 = x_1 y_0, x_0 y_2 = x_2 y_0, x_1 y_2 = x_2 y_1, x_3 y_0 = x_1 y_2\}.$$

Die rationale Abbildung π wir zu

$$(x_0 : x_1 : x_2) = (y_0 x_0 : y_0 x_1 : y_0 x_2) = (x_0 y_0 : x_0 y_1 : x_0 y_2) = (y_0 : y_1 : y_2),$$

ist also ein Morphismus.

Sei $\sigma : \tilde{Q} \rightarrow Q$ die Aufblasung. Dann ist

$$\sigma^{-1}((0 : 0 : 0 : 1)) = \{((0 : 0 : 0 : 1), (0 : y_1 : y_2))\} \simeq \mathbf{P}^1,$$

also isomorph zu einer Geraden. Wir wollen die Fasern des Morphismus betrachten.

- $y_0 \neq 0$. Dann ist

$$x_1 = \frac{x_0 y_1}{y_0}, x_2 = \frac{x_0 y_2}{y_0}, x_3 = \frac{x_1 y_2}{y_0} = \frac{x_0 y_1 y_2}{y_0^2},$$

also

$$((x_0 : x_1 : x_2 : x_3), (y_0 : y_1 : y_2)) = ((y_0^2 : y_0 y_1 : y_0 y_2 : y_1 y_2), (y_0 : y_1 : y_2)).$$

Es gibt also genau ein Urbild.

- $y_1 y_2 \neq 0$. Genauso leitet man in diesem Fall her, daß es genau ein Urbild gibt, nämlich

$$((y_0^2 : y_0 y_1 : y_0 y_2 : y_1 y_2), (y_0 : y_1 : y_2)).$$

- Was bleibt übrig? $y_0 = 0$ und $y_1 y_2 = 0$, also die zwei Punkte $P_1 = (0 : 1 : 0)$ und $P_2 = (0 : 0 : 1)$. Aus den vorgegangenen Betrachtungen folgt, daß π ein Isomorphismus ist außerhalb der Punkte P_1 und P_2 .
- Man sieht sofort

$$\pi^{-1}(P_1) = \{((0 : x_1 : 0 : x_3), P_1)\}, \quad \pi^{-1}(P_2) = \{((x_0 : 0 : 0 : x_3), P_2)\},$$

d.h. die Urbilder sind jeweils isomorph zu \mathbf{P}^1 .

- Ergebnis: π ist die Aufblasung von \mathbf{P}^2 in den zwei Punkten P_1 und P_2 .
- $\pi(\sigma^{-1}((0 : 0 : 0 : 1)))$ ist die Verbindungsgerade von P_1 und P_2 .
- Bläst man den \mathbf{P}^2 in zwei Punkten auf, bläst dann die Verbindungsgerade zusammen, so erhält man Q .

Beispiel: Wir betrachten die rationale Abbildung

$$\tau : \mathbf{P}^2 \rightarrow \mathbf{P}^2, \quad (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1).$$

Auf der offenen Menge $U = \mathbf{P}^2 \setminus \{x_0x_1x_2 = 0\}$ gilt

$$\tau(x_0 : x_1 : x_2) = \left(\frac{1}{x_0} : \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2}\right),$$

insbesondere $\tau \circ \tau = id$. τ ist also birational. τ ist nicht definiert in den drei Punkten $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$ und $(0 : 0 : 1)$. Die Punkte der Geraden $x_0 = 0$ (ohne $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$) werden auf den Punkt $(1 : 0 : 0)$ abgebildet, analog für die anderen beiden Geraden.

Tangentialräume, Tangentialkegel und Singularitäten

Tangentialraum = lineare Approximation von X in P .

Hyperflächen: Sei $X \subseteq \mathbf{A}^n$ eine Hyperfläche, gegeben durch eine Gleichung $f(x_1, \dots, x_n) = 0$. Wir nehmen an, daß $P = (0, \dots, 0)$ auf X liegt. Wir betrachten die Taylorreihenentwicklung von f in P :

$$f = f_1 + f_2 + \dots + f_d,$$

wo $f_i(x_1, \dots, x_n)$ homogen vom Grad i ist. Der lineare Teil $f_1(x_1, \dots, x_n)$ definiert dann den Tangentialraum $T_P(X)$ von X in P :

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Ist $f_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$, so ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i + \dots, \text{ also } a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(P).$$

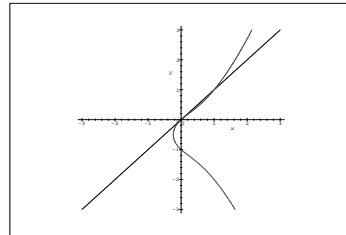
Damit

$$T_P(X) = \left\{ \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)x_i = 0 \right\}.$$

Beispiel: $X = \{y^2 + y = x^3 + x\} \subseteq \mathbf{A}^2$. Es ist

$$f = y^2 + y - x^3 - x,$$

der lineare Teil ist $y - x$, die Tangente in $(0, 0)$ also $y = x$.



Was macht man, wenn man den Tangentialraum in einem anderen Punkt $P = (p_1, \dots, p_n)$ berechnen will? Substituiere $x_i = p_i + y_i$:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(p_1 + y_1, \dots, p_n + y_n) = g_1(y_1, \dots, y_n) + \dots + g_d(y_1, \dots, y_n).$$

Der Tangentialraum ist gegeben durch $g_1(y_1, \dots, y_n) = 0$. Ist $g_1 = a_1y_1 + \dots + a_ny_n$, so ist $a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)$, und damit der Tangentialraum:

$$0 = \sum a_i(x_i - p_i) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)(x_i - p_i).$$

DEFINITION 24. Der Tangentialraum einer Hyperfläche $X = \{f = 0\} \subseteq \mathbf{A}^n$ in einem Punkt $P = (p_1, \dots, p_n) \in X$ wird definiert durch

$$T_P(X) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)(x_i - p_i) = 0 \right\}.$$

Beispiel: Berechne die Tangente in $(1, 1)$ bei obigem Beispiel:

$$f_x = -3x^2 - 1, f_y = 2y + 1, f_x(P) = -4, f_y(P) = 3,$$

die Tangente also

$$-4(x - 1) + 3(y - 1) = 0, \text{ oder } -4x + 3y + 1 = 0.$$

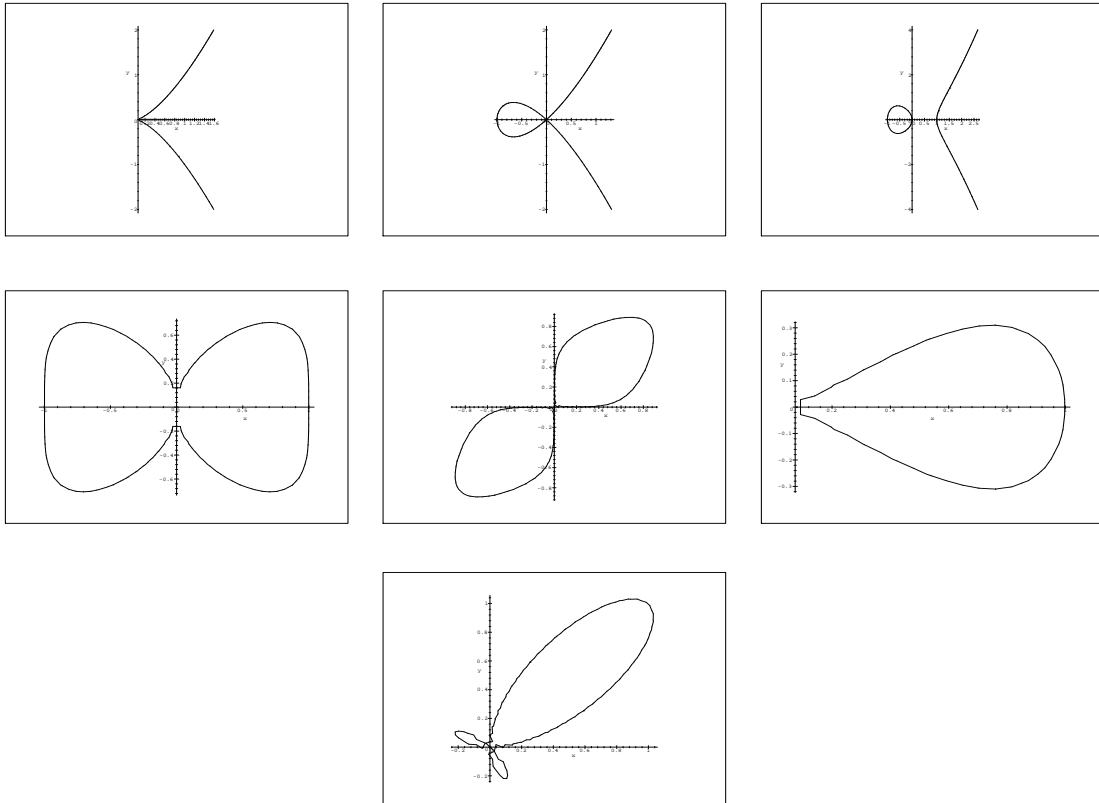
Beispiel: Sowohl für $y^2 = x^3$ als auch für $y^2 = x^3 + x^2$ gibt es keine linearen Terme in der Taylorreihenentwicklung um $(0,0)$, also ist $T_P(X) = \mathbf{A}^2$.

Definition: Ein Punkt P der Hyperfläche $X = \{f = 0\} \subseteq \mathbf{A}^n$ heißt singulär, wenn $T_P(X) = \mathbf{A}^n$ bzw.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(P) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) = 0$$

gilt. Sonst heißt der Punkt regulär. X heißt singulär, wenn X einen singulären Punkt besitzt, andernfalls nichtsingulär.

Aufgabe: Skizziere die Kurven $y^2 = x^3$, $y^2 = x^2 + x^3$, $y^2 = x^3 - x$, $x^2 = x^4 + y^4$, $xy = x^6 + y^6$, $x^3 = y^2 + x^4 + y^4$ und $x^2y + xy^2 = x^4 + y^4$.



Wir wollen dies jetzt auf Hyperflächen im \mathbf{P}^n verallgemeinern. Dazu müssen wir obige Gleichungen nur homogenisieren. Sei also $F(x_0, x_1, \dots, x_n)$ homogen vom Grad d mit $f(x_1, \dots, x_n) = F(1, x_1, \dots, x_n)$. Der Punkt P wird zu $P = (1 : p_1, \dots, p_n)$. Die Gleichung für $T_P(X)$ wird zu

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i \geq 1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)(x_i - p_i x_0) = \\ &= \sum_{i \geq 1} \frac{\partial F}{\partial x_i}(P)(x_i - p_i x_0) = \\ &= \sum_{i \geq 1} \frac{\partial F}{\partial x_i}(P)x_i - x_0 \sum_{i \geq 1} \frac{\partial F}{\partial x_i}(P)p_i. \end{aligned}$$

Nun gilt aber nach Euler

$$\sum_{i \geq 0} \frac{\partial F}{\partial x_i} x_i = d \cdot F,$$

also

$$\sum_{i \geq 0} \frac{\partial F}{\partial x_i}(P) p_i = d \cdot F(P) = 0,$$

daher wegen $p_0 = 1$

$$\sum_{i \geq 1} \frac{\partial F}{\partial x_i}(P) p_i = -\frac{\partial F}{\partial x_0}(P).$$

Die Gleichung für $T_P(X)$ wird dann also zu

$$\sum_{i \geq 0} \frac{\partial F}{\partial x_i}(P) x_i = 0.$$

DEFINITION 25. Der Tangentialraum an eine Hyperfläche $X = \{F = 0\} \subseteq \mathbf{P}^n$ in einem Punkt $P \in X$ wird definiert durch

$$T_P(X) = \left\{ \sum_{i=0}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(P) x_i = 0 \right\}.$$

LEMMA 22 (Euler). Ist $F(x_0, \dots, x_n)$ ein homogenes Polynom vom Grad d , so gilt:

$$\sum_{i \geq 0} \frac{\partial F}{\partial x_i} x_i = dF(x_0, \dots, x_n).$$

Beweis: durch explizites Anschreiben des Polynoms. ■

Als Verallgemeinerung des affinen Falles nennen wir einen Punkt $P \in \{F = 0\} \subseteq \mathbf{P}^n$ singulär, wenn gilt

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(P) = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n}(P) = 0.$$

Der Menge der Singularitäten bezeichnen wir mit X_{sing} . Also:

$$X_{sing} = \left\{ F = \frac{\partial F}{\partial x_0} = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0 \right\}.$$

Beispiel: Die Quadrik $Q = \{x_0 x_3 = x_1 x_2\}$ ist nichtsingulär.

LEMMA 23. Sei $X \subseteq \mathbf{P}^n$ eine Hyperfläche. Dann ist die Menge X_{sing} der Singularitäten von X eine echte und abgeschlossene Teilmenge von X . Insbesondere liegen die nichtsingulären Punkte dicht in X .

Beweis: Es ist

$$X_{sing} = \left\{ P \in \mathbf{P}^n : f(P) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = 0, i = 0, \dots, n \right\},$$

also ist X_{sing} abgeschlossen. Angenommen, es wäre $X = X_{sing}$. Da $X = Z(f)$, würde f alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ teilen. Aus Gradgründen bedeutet dies aber $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$. Dies zeigt, daß f ein Polynom in x_i^p ist. Da dies für alle i gilt und der Grundkörper algebraisch abgeschlossen ist, folgt, daß f eine p -te Potenz ist, was der Irreduzibilität von f widerspricht. ■

Beispiel: Quadriken im \mathbf{P}^2 . Sei eine Quadrik gegeben durch

$$f = a_0 x_0^2 + a_1 x_0 x_1 + a_2 x_0 x_2 + a_3 x_1^2 + a_4 x_1 x_2 + a_5 x_2^2.$$

Dann ist $f_0 = \dots, f_1 = \dots, f_2 = \dots$. Für Singularitäten erhält man also die Bedingung

$$\begin{pmatrix} 2a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & 2a_3 & a_4 \\ a_2 & a_4 & 2a_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Damit sieht man sofort: $f = 0$ ist genau dann singulär, wenn der Rang ≤ 2 ist. Außerdem sieht man: die singulären Quadriken bilden im \mathbf{P}^5 aller Quadriken eine Hyperfläche.

Beispiel: (Char $K \neq 3$) Gegeben sei die Kubik

$$f_t = (x_0 + x_1 + x_2)^3 + t(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3).$$

Für welche t ist C_t singulär?

- Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = 3(x_0 + x_1 + x_2)^2 + 3tx_0^2, \frac{\partial f}{\partial x_1} = 3(x_0 + x_1 + x_2)^2 + 3tx_1^2, \frac{\partial f}{\partial x_2} = 3(x_0 + x_1 + x_2)^2 + 3tx_2^2.$$

- Für $t = 0$ ist C_0 eine dreifache Gerade.
- Sei jetzt $t \neq 0$. Dann muß gelten $x_0^2 = x_1^2 = x_2^2$, also o.E. $x_0 = 1$ und $x_1 = a, x_2 = b$ mit $a, b = \pm 1$. Als weitere Bedingung hat man dann $t = -(1 + a + b)^2$.
- Für $t = -1$ haben wir die singulären Punkte

$$(1 : 1 : -1), (1 : -1 : 1), (1 : -1 : -1)$$

und man findet schnell

$$f = 3(x_0 + x_1)(x_0 + x_2)(x_1 + x_2).$$

- Für $t = -9$ ist $(1 : 1 : 1)$ ein singulären Punkt. Die Taylorreihenentwicklung in affinen Koordinaten lautet:

$$f = -18(x-1)^2 + 18(x-1)(y-1) - 18(y-1)^2 - 8(x-1)^3 + 3(x-1)^2(y-1) + 3(x-1)(y-1)^2 - 8(y-1)^3.$$

Reell ist die Singularität ein isolierter Punkt.

- Sonst gibt es keine weiteren Singularitäten.

Affine Varietäten Wir wollen jetzt allgemein affine Varietäten betrachten. Gegeben sei $X \subseteq \mathbf{A}^n$ durch die Gleichungen $f_1 = \dots = f_m = 0$. Ist P ein Punkt auf X , so definieren

$$\sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P)(x_j - p_j) = 0, i = 1, \dots, m$$

einen affinen Teilraum, den Zariski-Tangententialraum $T_P(X)$. Sei J die Jacobi-Matrix. Dann ist also $T_P(X) = \{J \cdot (x_i - p_i) = 0\}$. Ein Punkt heißt nichtsingulär, wenn $\dim T_P(X) = \dim X$ ist, andernfalls singulär. Später werden wir zeigen: $\dim T_P(X) \geq \dim X$. Ein Punkt P ist genau dann nichtsingulär, wenn $\text{rang}(J) = n - \dim(X)$ ist.

Wie für Hyperflächen, kann man jetzt auch alles für quasiprojektive Varietäten machen: Sei $X \subseteq \mathbf{P}^n$ quasiprojektiv. Der Zariski-Abschluß sei gegeben durch Gleichungen $f_1 = \dots = f_m = 0$. Ist P ein Punkt auf X , so heißt

$$T_P(X) = \left\{ \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P)x_j = 0, i = 1, \dots, m \right\}$$

der Tangentialraum in P an X . Ist J die Jacobi-Matrix, so ist also $T_P(X) = \{J \cdot x = 0\}$. Die Definition der Singularität überträgt sich ohne Probleme:

$$P \text{ ist nichtsingulär} \iff \dim T_P(X) = \dim X \iff \text{rang} J_P = n - \dim X.$$

Beispiel: Durchschnitt zweier Quadriken im \mathbf{P}^4 .

$$X = \{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_2x_4 = x_2x_4 - x_3^2 + 3x_4^2 = 0\}.$$

Die Jacobi-Matrix ist

$$J = \begin{pmatrix} 2x_0 & 2x_1 & 2x_2 + x_4 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & x_4 & -2x_3 & x_2 + 6x_4 \end{pmatrix}.$$

- Falls die erste Zeile von J gleich Null ist: $x_0 = x_1 = x_2 = x_4 = 0$ würde aber auch $x_1 = 0$ liefern, also keinen Punkt auf X .
- Falls die zweite Zeile von J gleich Null ist: $x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Dies liefert die zwei Punkte $(1 : \pm i : 0 : 0 : 0)$ auf X . Sie sind singulär.
- Beide Zeilen $\neq 0$. Dann muß sein: $x_0 = x_1 = x_3 = 0$, was wiederum $x_2(x_2 + x_4) = x_4(x_2 + 3x_4) = 0$ liefert, das aber schnell auf einen Widerspruch führt.
- Also hat die Fläche genau 2 Singularitäten.
- Setzt man $x_0 = 1, x_1 = i + x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = t$, so wird

$$f = 2ix + x^2 + y^2 + yt, g = yt - z^2 + 3t^2,$$

der Tangentialraum also $x = 0$.

Wir wollen jetzt die Frage nach den Singularitäten in die Algebra übersetzen. Sei X eine Varietät und $P \in X$ ein Punkt. Dann haben wir den lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,P}$ mit dem maximalen Ideal \mathfrak{m}_P .

1. O.E. sei $X \subseteq \mathbf{A}^n$ affine Varietät mit $I(X) = (f_1, \dots, f_m)$ und $P = (0, \dots, 0)$. Dann haben wir den affinen Koordinatenring

$$A = k[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_m).$$

Sei X_i das Bild von x_i in A . Der Funktionenkörper von X ist

$$k(X) = \left\{ \frac{f(X_1, \dots, X_n)}{g(X_1, \dots, X_n)} : f, g \text{ Polynome, } g(X_1, \dots, X_n) \neq 0 \right\}.$$

Der lokale Ring von X in P ist

$$\mathcal{O}_{X,P} = \left\{ \frac{f(X_1, \dots, X_n)}{1 + g(X_1, \dots, X_n)} : g(0, \dots, 0) = 0 \right\}$$

mit dem maximalen Ideal

$$\mathfrak{m}_P = (X_1, \dots, X_n) = \left\{ \frac{f(X_1, \dots, X_n)}{1 + g(X_1, \dots, X_n)} : f(0, \dots, 0) = 0, g(0, \dots, 0) = 0 \right\}.$$

2. Sei nun

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_j a_{ij} x_j + g_i(x_1, \dots, x_n),$$

wo in g_i nur Monome vom Grad ≥ 2 vorkommen. Dann ist $J = (a_{ij})$ die Jacobi-Matrix und $T_P(X) = \{J \cdot x = 0\}$ der Tangentialraum von X im Punkt P . Setzt man statt x_j jetzt X_j in f_i ein, so erhält man

$$0 = f(X_1, \dots, X_n) = \sum a_{ij} X_j + g_i(X_1, \dots, X_n),$$

also

$$\sum_j a_{ij} X_j \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}^2},$$

d.h. eine Beziehung zwischen den X_i 's im k -Vektorraum $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

3. Wir wollen $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ bestimmen und betrachten dazu die k -lineare Abbildung

$$\lambda : k^n \rightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, \quad (c_1, \dots, c_n) \mapsto c_1 X_1 + \dots + c_n X_n \pmod{\mathfrak{m}^2}.$$

4. Ist g ein Polynom mit $g(0, \dots, 0) = 0$, so gilt

$$X_i - \frac{X_i}{1 + g(X_1, \dots, X_n)} = \frac{X_i g(X_1, \dots, X_n)}{1 + g(X_1, \dots, X_n)} \in \mathfrak{m}^2, \text{ also } X_i \equiv \frac{X_i}{1 + g(X_1, \dots, X_n)} \pmod{\mathfrak{m}^2},$$

der k -Vektorraum $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ wird also erzeugt von den X_i 's. D.h. λ ist surjektiv.

5. Was ist der Kern von λ ? Aus 2. wissen wir, daß die Zeilen der Jacobimatrix J im Kern von λ liegen. Sei jetzt $(c_1, \dots, c_n) \in \text{Kern}(\lambda)$, also $\sum c_i X_i \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}^2}$. In $\mathcal{O}_{X,P}$ gilt dann

$$\sum c_i X_i = \frac{f(X_1, \dots, X_n)}{1 + g(X_1, \dots, X_n)},$$

wo f ein Polynom ist, das nur Monome vom Grad ≥ 2 enthält. Außerdem $g(0, \dots, 0) = 0$. In A gilt dann

$$\sum c_i X_i = f(X_1, \dots, X_n) - \left(\sum c_i X_i \right) g(X_1, \dots, X_n) = h(X_1, \dots, X_n),$$

wo h ein Polynom ist, das nur Monome vom Grad ≥ 2 enthält. Im Polynomring $k[x_1, \dots, x_n]$ bedeutet dies, daß es Polynome h_i gibt mit

$$\sum c_j x_j - h(x_1, \dots, x_n) = \sum_i f_i h_i = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} x_j \right) + g_i h_i.$$

Vergleich der linearen Anteile liefert

$$\sum c_j x_j = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} x_j \right) h_i(0, \dots, 0), \text{ d.h. } (c_1, \dots, c_n) = (h_1(0, \dots, 0), \dots, h_m(0, \dots, 0)) \cdot J.$$

Also ist $\text{Kern}(\lambda)$ der von den Zeilen von J aufgespannte k -Vektorraum. Dies liefert die Formel

$$\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = n - \text{rang}(J) = \dim T_P(X).$$

Damit haben wir insbesondere gezeigt:

SATZ 38. *Sei X eine Varietät und P ein Punkt auf X . Sei \mathfrak{m}_P das maximale Ideal des lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,P}$. Dann gilt:*

$$\dim T_P(X) = \dim \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2.$$

FOLGERUNG 8. *Ein Punkt P einer Varietät X ist genau dann nichtsingulär, wenn*

$$\dim \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 = \dim X.$$

Beispiele: Wir betrachten die Kurve $y^2 = x^2 + x^3$.

- $P = (0, 0)$. Dann ist $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ von Dimension 2.
- $P = (-1, 0)$. Es gilt auf der Kurve $y^2 = x^2(x+1)$. In \mathcal{O}_P ist x eine Einheit, also in diesem Ring $x+1 = \frac{y^2}{x^2}$. Das Ideal \mathfrak{m}_P wird von $x+1$ und y erzeugt, also alleine von y : $\mathfrak{m}_P = y\mathcal{O}_P$. Insbesondere ist dann $\dim \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 = 2$.

Bemerkung: Sei $\phi : X \rightarrow Y$ eine birationale Abbildung definiert in P und $Q = \phi(P)$. Dann gibt es nichtleere offene Mengen $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$, so daß $\phi : U \rightarrow V$ einen Isomorphismus liefert. Insbesondere ist $\mathcal{O}_{X,P} \simeq \mathcal{O}_{Y,Q}$, also P genau dann singulär, wenn es Q ist.

FOLGERUNG 9. *Sei X eine Varietät. Dann gilt für jeden Punkt $P \in X$:*

$$\dim \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \geq \dim X.$$

P ist genau dann nichtsingulär, wenn die Gleichheit gilt.

Beweis: Die zweite Aussage folgt aus dem Lemma und der Definition von singulär. X ist birational zu einer Hyperfläche im \mathbf{P}^{d+1} , also gibt es eine nichtleere offene Menge $U \subseteq X$, wo $\dim \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 = d$ gilt. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \{P \in X : \dim \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \geq d\} &= \{P \in X : \dim T_P(X) \geq d\} \\ &= \{P \in X : \text{rang } J_P \leq n - d\}. \end{aligned}$$

Die letzte Menge ist aber eine abgeschlossene Menge, da sie sich durch Unterdeterminanten ausdrücken läßt. Die Menge enthält eine nichtleere offene Menge, also muß sie schon ganz X sein. ■

Ähnlich zeigt man folgende Aussage:

FOLGERUNG 10. *Für eine Varietät X ist die Menge X_{sing} der singulären Punkte von X eine abgeschlossene Teilmenge von X und $X_{\text{sing}} \neq X$.*

Tangentialkegel

Tangentialräume erhielten wir durch den Versuch eine Varietät X in einem Punkt P linear zu approximieren. In singulären Punkten funktionierte dies aber nicht besonders gut. Wir wollen jetzt den Approximationsversuch verallgemeinern.

Sei X eine Varietät und $P \in X$ ein Punkt. Da wir die Situation lokal studieren wollen, können wir annehmen, daß $X \subseteq \mathbf{A}^n$ eine affine Varietät ist und $P = (0, \dots, 0)$.

Sei $f \in I(X)$. Wir betrachten die Taylorreihenentwicklung von f :

$$f = f_m + f_{m+1} + \dots,$$

wo f_ℓ homogen vom Grad ℓ in x_1, \dots, x_n ist. Sei $f_m \neq 0$. Wir nennen f_m den Leitterm von f und bezeichnen ihn mit $L(f)$. Er liefert die nächstbeste Approximation von f . Wir definieren jetzt den Tangentialkegel von X im Punkt P :

$$TC_P = Z(L(f) : f \in I(X)).$$

Beispiele:

- $y^2 = x^2 + x^3$ hat in $(0, 0)$ den Tangentialkegel $y^2 = x^2$.
- $y^2 = x^3$ hat den Tangentialkegel $y^2 = 0$, also $y = 0$.
- $xy = x^6 + y^6$ hat den Tangentialkegel $xy = 0$.
- $x^2y + xy^2 = x^4 + y^4$ hat den Tangentialkegel $xy(x + y) = 0$.
- Ist X in P nichtsingulär, so ist natürlich der Tangentialkegel gleich dem Tangentialraum.

Bemerkung: Sei $C \subseteq \mathbf{A}^2$ eine ebene Kurve, gegeben durch eine Gleichung $f = 0$ und o.E. $P = (0, 0)$. Dann ist $L(f)$ ein homogenes Polynom in zwei Veränderlichen, zerfällt also in Linearfaktoren, d.h. der Tangentialkegel ist eine Vereinigung von Geraden.

Beispiel: Wir hatten gesehen, daß

$$X = \{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_2x_4 = x_2x_4 - x_3^2 + 3x_4^2 = 0\} \subseteq \mathbf{P}^4$$

genau in den Punkten $(1 : \pm i : 0 : 0 : 0)$ singulär ist. Setzt man $x_0 = 1, x_1 = i + x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = t$, so erhält man die Entwicklungen

$$f = 2ix + x^2 + y^2 + yt, g = yt - z^2 + 3t^2,$$

der Tangentialkegel ist also gegeben durch die Gleichungen

$$x = 0, yt - z^2 + 3t^2 = 0.$$

Achtung: Wird $I(X)$ von f_1, \dots, f_r erzeugt, so TC_P nicht notwendig von $L(f_1), \dots, L(f_r)$.

Beispiel: Wähle $f = x^2 - y^3$ und $g = xu - v^3$. Dann ist $Z(f, g)$ eine Fläche im \mathbf{A}^4 . Es ist

$$Z(L(f), L(g)) = Z(x^2, xu) = \{x = 0\}.$$

Andererseits ist aber $uf - xg = xv^3 - y^3u$. Dieses Element liegt aber nicht im Ideal (x^2, xu) .

Ohne Beweis zitieren wir den Satz

SATZ 39. $\dim X = \dim TC_P$.

Der Tangentialkegel wurde durch ein homogenes Ideal definiert:

$$(L(f) : f \in I(X)) = (L(f_1), \dots, L(f_r)),$$

(mit $I(X) = (f_1, \dots, f_r)$), also liegt es nahe, dies als Definitionsgleichungen für eine algebraische Menge im \mathbf{P}^{n-1} zu betrachten, wo wir die homogenen Koordinaten $(x_1 : \dots : x_n)$ benutzen. Wir definieren den projektiven Tangentialkegel von X in P durch

$$\mathbf{PTC}_P(X) = \{(x_1 : \dots : x_n) \in \mathbf{P}^{n-1} : L(f_i)(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ für alle } i\}.$$

Beispiele:

- Ist $X \subseteq \mathbf{A}^2$ eine Kurve und $P \in X$, so besteht $TC_P(X)$ aus endlich vielen Geraden durch P , also besteht $\mathbf{PTC}_P(X)$ aus endlich vielen Punkten.
- Sei P ein nichtsingulären Punkt einer Varietät X der Dimension d . Dann ist $TC_P(X) = T_P(X) \simeq \mathbf{A}^d$, also $\mathbf{PTC}_P(X) \simeq \mathbf{P}^{d-1}$.
- Wir hatten für

$$X = \{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_2x_4 = x_2x_4 - x_3^2 + 3x_4^2 = 0\} \subseteq \mathbf{P}^4$$

den Tangentialkegel in $P = (1 : i : 0 : 0 : 0)$ als

$$TC_P(X) = \{x = 0, yt - z^2 + 3t^2 = 0\} \subseteq \mathbf{A}^4$$

bestimmt. Also ist

$$\mathbf{PTC}_P(X) \simeq \{(y : z : t) \in \mathbf{P}^2 : yt - z^2 + 3t^2 = 0\}$$

isomorph zu einer ebenen Quadrik.

Zusammenhang mit Aufblasungen: Sei X eine Varietät und $P \in X$. Sei $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ die Aufblasung in P .

- O.E. $X \subseteq \mathbf{A}^n$ affin und $P = (0, \dots, 0)$. Sei $\phi : \tilde{\mathbf{A}}^n \rightarrow \mathbf{A}^n$ die Aufblasung in P , wo

$$\tilde{\mathbf{A}}^n = \{((x_1, \dots, x_n), (y_1 : \dots : y_n)) : x_i y_j = x_j y_i\}.$$

Dann ist

$$\tilde{X} = \overline{\phi^{-1}(X \setminus \{P\})}.$$

Wir wollen $\tilde{X} \cap \phi^{-1}(P)$ berechnen.

- Auf der offenen Menge $U = \{y_1 = 1\}$ von $\tilde{\mathbf{A}}^n$ gilt

$$x_2 = x_1 y_2, \dots, x_n = x_1 y_n,$$

also ist U isomorph zu \mathbf{A}^n mit den neuen Koordinaten x_1, y_2, \dots, y_n . Wir wollen nur betrachten, was in U passiert. Es gilt

$$U \cap \phi^{-1}(P) = \{x_1 = 0\}.$$

- Sei $f \in I(X)$ und

$$f = f_m + f_{m+1} + \dots$$

die Taylorreihenentwicklung. Dann gilt

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^m (f_m(y_1, \dots, y_m) + x_1 f_{m+1}(y_1, \dots, y_n) + \dots),$$

also verschwindet

$$f_m(y_1, \dots, y_m) + x_1 f_{m+1}(y_1, \dots, y_n) + \dots$$

auf $\tilde{X} \cap U$. (Durch diese Gleichungen wird natürlich auch \tilde{X} definiert.) Schneiden wir jetzt mit $\phi^{-1}(P)$, d.h. setzen wir $x_1 = 0$, so folgt: $f_m(y_1, \dots, y_m)$ verschwindet auf $X \cap U \cap \phi^{-1}(P)$.

- Damit folgt jetzt sofort:

$$\tilde{X} \cap \phi^{-1}(P) = \{((0, \dots, 0), (y_1 : \dots : y_n)) : L(f)(y_1, \dots, y_n) = 0 \text{ für alle } f \in I(X)\}.$$

Wir haben also folgenden Satz bewiesen:

SATZ 40. Sei X eine Varietät, P ein Punkt auf X und $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ die Aufblasung von X in P . Dann ist

$$\pi^{-1}(P) \simeq \mathbf{PTC}_P(X).$$

D.h. beim Aufblasen von X in P wird P durch den projektiven Tangentialkegel von X in P ersetzt.

Damit können wir frühere Beispiele besser verstehen.

Beispiele:

- X sei eine Varietät der Dimension d und P ein nichtsingulärer Punkt von X . Dann ist $\mathbf{PTC}_P(X) \simeq \mathbf{P}^{d-1}$, also wird beim Aufblasen P durch einen \mathbf{P}^{d-1} ersetzt.
 - Bei Kurven passiert nichts.
 - Nichtsinguläre Punkte von Flächen werden durch projektive Geraden ersetzt.
- Bläst man $y^2 = x^2 + x^3$ in $P = (0, 0)$ auf, so wird also P durch 2 Punkte ersetzt.

Als Übung beweise man den Satz:

SATZ 41. Ist die Varietät X nichtsingulär im Punkt P , so ist die Aufblasung $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ nichtsingulär in allen Punkten von $\pi^{-1}(P)$.

Nichtsinguläre Kurven

Wir wollen in diesem Abschnitt einige Eigenschaften nichtsingulärer projektiver Kurven kennenlernen. Von fundamentaler Bedeutung ist folgender Satz:

SATZ 42. *Sei C eine irreduzible Kurve (Varietät der Dimension 1) und P ein nichtsingulärer Punkt auf C . Dann ist der lokale Ring $\mathcal{O}_{C,P}$ ein Hauptidealring mit genau einem Primelement (bis auf Einheiten). Genauer: Ist t eine Funktion mit $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 = kt$, so hat jedes $f \in \mathcal{O}_{C,P}$ eine eindeutige Zerlegung*

$$f = u \cdot t^m,$$

wo $u \in \mathcal{O}_{C,P}$ eine Einheit ist, d.h. $u(P) \neq 0$, und $m \geq 0$. Die Ideale von $\mathcal{O}_{C,P}$ sind

$$0 \subset \dots \subset (t^3) \subset (t^2) \subset (t) \subset \mathcal{O}_{C,P}.$$

Ringe mit dieser Eigenschaft nennt man auch *diskrete Bewertungsringe*.

Beweis:

- *Beh.:* $\mathfrak{m} = (t)$.

Bew.: $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$ und $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = kt$, also gibt es $c_i \in k$ mit $x_i \equiv c_i t \pmod{\mathfrak{m}^2}$, also gibt es $g_{ij} \in \mathfrak{m}$ mit

$$x_i = c_i t + \sum g_{ij} x_j.$$

In Matrixschreibweise liefert dies $(1 - (g_{ij}))(x_j) = (c_j t)$. Nun ist $\det(1 - (g_{ij}))$ eine Einheit in $\mathcal{O}_{C,P}$, (da P eingesetzt die Zahl 1 sich ergibt), also hat $(1 - (g_{ij}))^{-1}$ Koeffizienten in $\mathcal{O}_{C,P}$, also ist $x_1, \dots, x_n \in (t)$, woraus die erste Behauptung folgt.

- *Beh.:* Zu $f \in \mathcal{O}_{C,P}$, $f \neq 0$ gibt es eine Einheit u und eine Zahl $m \geq 0$ mit $f = ut^m$.

Bew.: Sei $f_s = \frac{f}{t^s} \in K(C)$. Dann ist $f_0 = f$ und $f_s = f_{s+1}t$. Außerdem $f = f_s t^s$.

Angenommen, alle f_s wären in $\mathcal{O}_{C,P}$. Dann hätte man eine echt aufsteigende Folge von Idealen

$$(f_0) \subset (f_1) \subset (f_2) \subset \dots,$$

was nicht sein kann, da $\mathcal{O}_{C,P}$ noethersch ist. Also gibt es ein $m \geq 0$ mit $f_m \in \mathcal{O}_{C,P}$, aber $f_{m+1} \notin \mathcal{O}_{C,P}$. Wäre f_m keine Einheit, so wäre $f_m \in \mathfrak{m} = (t)$, also $f_{m+1} \in \mathcal{O}_{C,P}$, was nicht sein sollte. Also folgt die Behauptung mit $u = f_m$.

- *Beh.:* $ut^m = vt^n$ mit Einheiten u, v , dann ist $u = v$ und $m = n$.

Bew.: O.E. $m \geq n$. Dann ist $\frac{u}{v} = t^{m-n}$. Dies ist eine Einheit, also gilt $m = n$ und damit auch $u = v$.

- Aus dem Bewiesenen folgt bereits, daß $\mathcal{O}_{C,P}$ ein faktorieller Ring ist.

- *Beh.:* Jedes Ideal ist Hauptideal.

Bew.: Sei \mathfrak{a} ein Ideal. Dieses ist endlich erzeugt, also von der Form $\mathfrak{a} = (u_1 t^{m_1}, \dots, u_r t^{m_r})$. Ist $m = \min(m_1, \dots, m_r)$, so ist $\mathfrak{a} = (t^m)$. Damit ist schließlich alles gezeigt. ■

Bemerkung: Ein t wie im Satz wird Ortsuniformisierende genannt. Ist $C \subseteq \mathbf{A}^n$, so kann man für t die Gleichung einer Hyperebene durch P wählen, die die Tangente an C durch P nicht enthält, denn dann gilt $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \simeq kt$, wie wir im Beweis gesehen haben.

FOLGERUNG 11. *Jede Funktion $f \in k(C)$, $f \neq 0$ hat eine eindeutige Darstellung $f = u \cdot t^m$, wo $u(P) \neq 0$ und $m \in \mathbf{Z}$ ist. m heißt die Ordnung von f in P und wird mit $v_P(f)$ bezeichnet. Ist $m > 0$, so sagt man, f hat eine Nullstelle der Ordnung m in P . Ist $m < 0$, so sagt man, f hat einen Pol der Ordnung $|m|$ in P .*

Beweis: Da $K(C) = \text{Quot}(\mathcal{O}_{C,P})$ folgt die Behauptung sofort aus dem Satz und der Beziehung

$$\frac{u_1 \cdot t^{m_1}}{u_2 \cdot t^{m_2}} = \frac{u_1}{u_2} \cdot t^{m_1 - m_2}.$$

■

Beispiel: Wir betrachten die Kurve \mathbf{P}^1 . Dann ist

$$\mathbf{P}^1 = \{(x_0 : x_1)\} = \{(1 : t)\} \cup \{(0 : 1)\} = \{(1 : t)\} \cup \{(u : 1)\},$$

wo $u = \frac{1}{t}$ gilt. Der Funktionenkörper ist $k(\mathbf{P}^1) = k(t)$. Jede rationale Funktion $f \neq 0$ hat eine eindeutige Zerlegung

$$f = c \prod (t - a_i)^{m_i},$$

wo $m_i \in \mathbf{Z}$ ist. Ist $P = (1 : a) \simeq a$ im Endlichen, so ist also $t - a$ Ortsuniformisierende in P .

Was passiert im Unendlichen. Dort ist $u = \frac{1}{u}$ uniformisierend. Sei

$$f = \frac{a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \dots}{b_0 t^n + b_1 t^{n-1} + \dots}$$

mit $a_0, b_0 \neq 0$. Dann ist

$$f = u^{n-m} \cdot \frac{a_0 + a_1 u + \dots}{b_0 + b_1 u + \dots},$$

also ist $v_\infty(f) = n - m$. (Anschaulich: $n > m$ liefert $\lim_{t \rightarrow \infty} f = 0$, $n < m$ liefert $\lim_{t \rightarrow \infty} f = \infty$.) Wir bemerken noch:

$$\sum_{P \in \mathbf{P}^1} v_P(f) = 0.$$

Dies ist eine sehr wichtige Relation.

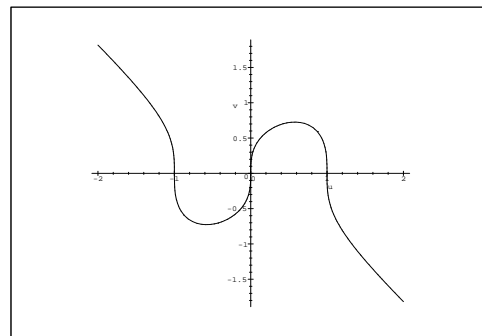
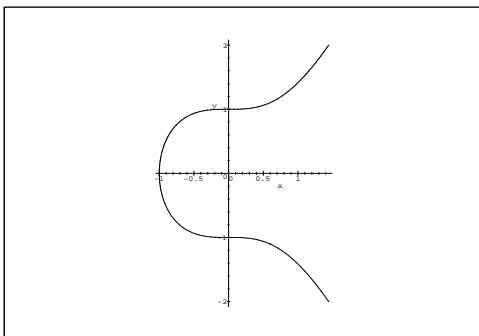
Beispiel: Wir betrachten die ebene Kurve $y^2 = x^3 + 1$, die projektiv zu $x_0 x_2^2 = x_1^3 + x_0^3$ wird. Im Unendlichen $x_0 = 0$ liegt der Punkt $(0 : 0 : 1)$. Wir erhalten affine Koordinaten, wenn wir $x_2 = 1, x_0 = u, x_1 = v$ setzen. Dann wird die Kurvengleichung zu $u = u^3 + v^3$. Die Tangente ist $u = 0$, also ist v eine Ortsuniformisierende in ∞ . Wegen $u(1 - u^2) = v^3$ hat u die Ordnung 3. Wir können schreiben

$$x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{x_2}{x_0}, u = \frac{x_0}{x_2}, v = \frac{x_1}{x_2},$$

woraus sofort

$$x = \frac{v}{u} \text{ und } y = \frac{1}{u}$$

folgt. Daher $v(x) = -2$ und $v(y) = -3$.



Die obige algebraische Erörterung hat unmittelbare geometrische Folgerungen:

SATZ 43. Sei C eine irreduzible Kurve, die in P nichtsingulär ist. Dann ist jede rationale Abbildung $\phi : C \rightarrow \mathbf{P}^n$ im Punkt P definiert.

Beweis: Wir können schreiben $\phi = (f_0 : \dots : f_n)$, wo $f_i \in k(C)$ ist. Ist t eine Ortsuniformisierende in P , so gibt es Einheiten u_i in P und $m_i \in \mathbf{Z}$ mit $f_i = u_i t^{m_i}$. O.E. können wir $m_0 \leq m_i$ für alle i annehmen. Damit gilt

$$\phi = (u_0 t^{m_0} : \dots : u_n t^{m_n}) = (u_0 : u_1 t^{m_1 - m_0} : \dots : u_n t^{m_n - m_0}).$$

Also ist ϕ in P definiert. ■

Bemerkungen:

- Für Flächen gilt das nicht mehr, wie das Beispiel $\mathbf{A}^2 \rightarrow \mathbf{P}^1$ mit $(x, y) \mapsto \frac{x}{y}$ zeigt.
- Daß als Bildbereich affin nicht funktioniert, zeigt das Beispiel $\mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{A}^1: x \mapsto x$.

FOLGERUNG 12. *Sei C eine irreduzible Kurve, nichtsingulär in P und $\phi : C \rightarrow X$ eine rationale Abbildung in eine projektive Varietät X . Dann ist ϕ definiert in P .*

Beweis: Wir können $X \subseteq \mathbf{P}^n$ annehmen und ϕ als rationale Abbildung nach \mathbf{P}^n betrachten. Dann ist ϕ definiert in P . Zu zeigen bleibt: $\phi(P) \in X$. Sei U die offene Menge, auf der ϕ definiert ist. Dann ist $\phi^{-1}(X)$ eine abgeschlossene Menge in U , die aber eine nichtleere offene Teilmenge enthält. Also ist $U = \phi^{-1}(X)$, was zu zeigen war. ■

FOLGERUNG 13. *Sind C_1 und C_2 zwei nichtsinguläre irreduzible projektive Kurven, die birational äquivalent sind, so sind sie bereits isomorph.*

Frage: Ist jede irreduzible Kurve birational äquivalent zu einer nichtsingulären projektiven irreduziblen Kurve?

Wir werden zeigen, daß dies in der Tat der Fall ist, und sogar ein Verfahren angeben, wie man aus einer singulären Kurve eine nichtsinguläre konstruieren kann.

Idee: Durch Aufblasen sollte die Singularität einfacher werden.

Wir wissen bereits, daß jede irreduzible Kurve birational zu einer ebenen Kurve $C \subseteq \mathbf{P}^2$ ist. Wir betrachten einen singulären Punkt. Für die lokale Untersuchung können wir $C \cap \mathbf{A}^2 = \{f(x, y) = 0\}$ annehmen und $P = (0, 0)$. Dann ist

$$f = f_m + f_{m+1} + \dots, \quad f_m \neq 0.$$

Wir nennen m die Multiplizität oder Vielfachheit von C in P . Das homogene Polynom f_m zerfällt in Linearfaktoren:

$$f_m(x, y) = cx^{n_0} \prod (y - \lambda_i x)^{n_i}, \quad \text{alle } \lambda_i \text{ verschieden.}$$

Wir sagen, P ist ein gewöhnlicher vielfacher Punkt von C , falls alle $n_i \leq 1$ sind, d.h. $TC_P(C)$ besteht aus m (verschiedenen) Geraden ($\mathbf{PTC}_P(C)$ besteht aus m Punkten).

- Wir betrachten jetzt den Fall, daß P ein gewöhnlicher m -facher Punkt auf C ist - wie eben. O.E.

$$f_m(x, y) = (y - \lambda_1 x) \dots (y - \lambda_m x).$$

- Wir blasen \mathbf{A}^2 in P auf:

$$\tilde{\mathbf{A}}^2 = \{((x, y), (u : v)) \in \mathbf{A}^2 \times \mathbf{P}^1 : xv = yu\}.$$

- Was passiert im affinen Teil $\{u = 1\} \simeq \mathbf{A}^2$? Wir haben $y = xv$. Einsetzen in $f(x, y)$ ergibt:

$$x^m (v - \lambda_1) \dots (v - \lambda_m) + x^{m+1} f_{m+1}(1, v) + \dots,$$

also wird die Aufblasung von C hier gegeben durch die Gleichung

$$(v - \lambda_1) \dots (v - \lambda_m) + x f_{m+1}(1, v) + \dots$$

- Die Punkte über P sind die Punkte $P_i = ((0, 0), (1 : \lambda_i))$. Dies sind einfache Punkte auf \tilde{C} , wie man sofort an der Taylorreihenentwicklung sieht.
- Weitere Punkte können in der Aufblasung nicht dazukommen. Also haben wir die Singularität in P durch Aufblasen aufgelöst.

Damit haben wir den Satz bewiesen:

SATZ 44. Sei C eine irreduzible ebene projektive Kurve mit nur gewöhnlichen vielfachen Punkten. Bläst man C in diesen Punkten auf, so erhält man eine nichtsinguläre Kurve \tilde{C} und einen birationalen Morphismus $\tilde{C} \rightarrow C$.

Mit Hilfe von quadratischen Transformationen der Gestalt $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1)$ kann man erreichen, daß jede ebene Kurve in eine ebene Kurve mit nur gewöhnlichen vielfachen Punkten transformiert werden kann. Damit folgt dann der Satz:

SATZ 45. Jede irreduzible Kurve ist birational äquivalent zu einer irreduziblen nichtsingulären projektiven Kurve.

Bemerkung: Ist X eine projektive Varietät, \tilde{X} eine nichtsinguläre projektive Varietät und $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ ein birationaler Morphismus, so sagt man, \tilde{X} ist eine Singularitätenauflösung von X . Hironaka hat gezeigt, daß in Charakteristik 0 X immer eine Singularitätenauflösung besitzt; in Charakteristik p ist dies allgemein nur für Kurven und Flächen bekannt.

Wir wollen jetzt die Funktionen auf nichtsingulären Kurven noch etwas genauer anschauen.

LEMMA 24. Sei C nichtsingulär irreduzibel und projektiv. Dann definiert jede nichtkonstante rationale Funktion $g \in k(C)$ einen surjektiven Morphismus $C \rightarrow \mathbf{P}^1$.

Beweis: Wir wissen bereits, daß g einen Morphismus $\gamma : C \rightarrow \mathbf{P}^1$ induziert. $\gamma(C) \subseteq \mathbf{P}^1$ ist abgeschlossen und irreduzibel, also ein Punkt oder \mathbf{P}^1 . Alternativ: Angenommen, γ ist nicht surjektiv. Nach Koordinatenwechsel kann man also $\gamma(C) \subseteq \mathbf{A}^1$ annehmen. Dann würden aber alle Polynomfunktionen auf \mathbf{A}^1 reguläre Funktionen auf C liefern, was nicht sein kann, da $\mathcal{O}(C) = k$ gilt. ■

Divisoren

Sei C eine nichtsinguläre irreduzible projektive Kurve. Eine Divisor ist eine endliche formale Summe

$$D = \sum_{i=1}^n n_i P_i.$$

Wir schreiben auch

$$D = \sum_{P \in C} n_P P,$$

wo alle bis auf endlich viele $n_P = 0$ sind. Die Divisoren auf C bilden eine abelsche Gruppe, die Divisorengruppe $Div(C)$. Ist $D = \sum n_P P$ ein Divisor, so heißt $\sum n_P$ der Grad $deg(D)$ des Divisors D . Der Divisor D heißt effektiv, falls alle $n_P \geq 0$ sind. Ist $f \in k(C)$, $f \neq 0$, so heißt

$$(f) = \sum v_P(f) P$$

der Divisor von f . Der Divisor einer Funktion gibt also die Null- und Polstellen einer Funktion an.

Beispiel: $C = \mathbf{P}^1$. Was ist der Divisor der Funktion $f = t^3 - t^2$? Die Faktorzerlegung lautet $f = t^2(t-1)$. Ist $P_1 = 0, P_2 = 1$, so ist also $v_{P_1}(f) = 2, v_{P_2}(f) = 1$. Im Unendlichen ist $u = \frac{1}{t}$ uniformisierend, also

$$f = \frac{1}{u^2} \left(\frac{1}{u} - 1 \right) = u^{-3}(1-u),$$

also mit $P_3 = (0 : 1) : v_{P_3}(f) = -3$. Damit wird der Divisor von f :

$$(f) = 2P_1 + P_2 - 3P_3.$$

Es ist $deg((f)) = 0$.

Beispiel: Die Kurve $y^2 = x^3 + 1$ hatte einen Punkt im Unendlichen $P_0 = (0 : 0 : 1)$. Dort war $v = \frac{x}{y}$ uniformisierend. $u = \frac{1}{y}$ hatte Ordnung 3. Wir wollen jetzt den Divisor von $f = \frac{x}{y}$ bestimmen. Im Unendlichen gilt $v_{P_0}(f) = 1$. Im Endlichen haben x und y keine Polstellen.

Nullstellen von x für $P_1 = (0, 1)$ und $P_2 = (0, -1)$. Die Funktion x ist dort uniformisierend, also $v_{P_1}(x) = v_{P_2}(x) = 1$.

Nullstellen von y für $P_3 = (-1, 0)$, $P_4 = (-\zeta_3, 0)$ und $P_5 = (-\zeta_3^2, 0)$. Die Funktion y ist dort jeweils

uniformisierend, also $v_{P_3}(y) = v_{P_4}(y) = v_{P_5}(y) = 1$.

Damit erhalten wir

$$(x) = -2P_0 + P_1 + P_2, \quad (y) = -3P_0 + P_3 + P_4 + P_5,$$

$$\left(\frac{x}{y}\right) = P_0 + P_1 + P_2 - P_3 - P_4 - P_5.$$

Wir bemerken, daß alle berechneten Hauptdivisoren Grad 0 haben.

Allgemein gilt folgender wichtiger Satz, den wir aber im Augenblick nicht beweisen wollen:

SATZ 46. *Der Divisor einer rationalen Funktion $\neq 0$ auf einer nichtsingulären irreduziblen projektiven Kurve hat Grad 0.*

Bemerkung: Wir können also konkret zu einer Funktion ihren Divisor bestimmen. Umgekehrt stellt sich daher die Frage: Welche Divisoren vom Grad 0 sind Divisoren von Funktionen? D.h. was für Null- und Polstellenbedingungen kann man stellen, sodaß es dazu eine rationale Funktion gibt?

Für rationale Kurven ist die Antwort leicht:

SATZ 47. *Jeder Divisor D vom Grad 0 auf \mathbf{P}^1 ist Divisor einer Funktion f .*

Beweis: Sei

$$D = n_0P_0 + \sum n_iP_i$$

ein Divisor vom Grad 0 mit $P_0 = (0 : 1)$ und für $i \geq 1$ sei $P_i = a_i = (1 : a_i)$. Definiere

$$f = \prod_{i \geq 1} (t - a_i)^{n_i}.$$

Dann ist

$$(f) = \sum_{i \geq 1} n_iP_i - \left(\sum_{i \geq 1} n_i\right)P_0 = \sum_{i \geq 0} n_iP_i = D,$$

D also Divisor einer Funktion. ■

Daß der Satz im allgemeinen nicht mehr stimmt, zeigt folgendes Beispiel:

Beispiel: Wir betrachten wieder die Kurve $y^2 = x^3 + 1$. Der unendlich ferne Punkt sei $Q = (0 : 0 : 1)$. Sei $P \in C$, $P \neq Q$.

Behauptung: $P - Q$ ist nicht Divisor einer Funktion.

Beweis: Wir suchen also eine Funktion f , die regulär im Endlichen ist, dann ist sie aber ein Element des affinen Koordinatenrings $k[x, y]/(y^2 - x^3 - 1)$, läßt sich also als Polynom in x und y anschreiben. Wegen $y^2 = x^3 + 1$ können wir sagen: Jede im endlichen reguläre Funktion f läßt sich schreiben

$$f = a(x) + b(x)y,$$

mit Polynomen $a(x)$ und $b(x)$. Was passiert im Unendlichen, d.h. im Punkt Q ?

- Falls $a(x), b(x) \neq 0$ mit Graden m und n . Dann ist

$$v_Q(a) = -2m, v_Q(b) = -2n, v_Q(by) = -2n - 3,$$

also

$$v_Q(a + by) = \min(-2m, -2n - 3).$$

$v_Q(a + by)$ ist also niemals -1 .

- Genau die gleichen Überlegungen gelten, falls $a = 0$ oder $b = 0$ ist.

Damit ist die Aussage bewiesen.

Insbesondere folgt: $C \not\cong \mathbf{P}^1$.

Ausblick

Sei C eine nichtsinguläre irreduzible projektive Kurve. Hat man Punkte $P_1, \dots, P_r \in C$ gegeben und Zahlen n_1, \dots, n_r , so kann man nach den Funktionen $f \in k(C)$ fragen, die in P_i höchstens einen Pol der Ordnung n_i haben für $i = 1, \dots, r$ und sonst regulär sind, d.h. $v_{P_i}(f) \geq -n_i$ für $i = 1, \dots, r$ und $v_P(f) \geq 0$ für $P \neq P_1, \dots, P_r$.

Definiert man für $D = \sum m_P P$ und $D' = \sum m'_P P$ eine Ordnungsrelation durch

$$D \leq D' \iff m_P \leq m'_P \text{ für alle } P \in C,$$

so kann man obige Beziehung auch schreiben

$$(f) \geq -n_1 P_1 + \dots - n_r P_r \quad \text{oder} \quad (f) + n_1 P_1 + \dots + n_r P_r \geq 0.$$

Man definiert nun allgemein für einen Divisor D

$$\mathcal{L}(D) = \{f \in k(C) : f \neq 0, (f) + D \geq 0\} \cup \{0\}.$$

Man sieht sofort, daß $\mathcal{L}(D)$ ein k -Vektorraum ist. Außerdem kann man ohne große Mühe zeigen, daß $\mathcal{L}(D)$ ein endlich dimensionaler k -Vektorraum ist. Von zentraler Bedeutung ist dann folgender Satz:

SATZ 48 (Riemann-Roch). *Für eine nichtsinguläre irreduzible projektive Kurve C gibt es einen Divisor K_C auf C , eine ganze Zahl $g_C \geq 0$, so daß für alle Divisoren D gilt:*

$$\dim \mathcal{L}(D) = \deg(D) + 1 - g_C + \dim \mathcal{L}(K_C - D),$$

insbesondere $\dim \mathcal{L}(D) \geq \deg(D) + 1 - g_C$. K_C heißt kanonischer Divisor, g_C das Geschlecht von C .

Definiert man

$$\text{Div}_0(C) = \{D \in \text{Div}(C) : \deg(D) = 0\},$$

so bilden die Hauptdivisoren eine Untergruppe von $\text{Div}_0(C)$. Es ist also natürlich folgende Gruppe zu betrachten:

$$\text{Jac}(C) = \text{Div}_0(C) / \{(f) : f \in k(C), f \neq 0\}.$$

(Jacobische von C , Divisorklassengruppe vom Grad 0) Man kann zeigen, daß sich $\text{Jac}(C)$ als nicht-singuläre projektive Varietät betrachten läßt. $\text{Jac}(C)$ ist damit eine abelsche Varietät: eine projektive Varietät mit Gruppenstruktur. Die Dimension von $\text{Jac}(C)$ ist das im Satz von Riemann-Roch erwähnte Geschlecht g_C von C .

- Man muß also schneiden:

$$u = v^2 \text{ und } u = v^2 - 2uv + u^2.$$

Das ist das gleiche, wie wenn man $u = v^2$ mit $u^2 - 2uv = 0$ schneidet. Oder nochmals anders $u = v^2$ mit $u = 0$ und $u = v^2$ mit $u = 2v$. Die erste Situation kann man auch so deuten: Schneide $u = 0$ mit $v^2 = 0$, d.h. eigentlich zweimal $u = v = 0$.

- So gerechnet sollte die Schnittvielfachheit im Punkt $(u, v) = (0, 0)$ drei betragen. Zählt man so, erhält man wieder 4 Schnittpunkte.

Ziel: Führe eine Schnittvielfachheit ein.

Beispiel: Wir betrachten das vorangegangene Beispiel nochmals algebraisch. Sei P der Punkt $(u, v) = (0, 0)$. Das Ideal der Gleichungen lautet

$$\mathfrak{a} = (u - v^2, u - (v - u)^2) = (u - v^2, u(u - 2v)) = (u - v^2, (v - 2)v^3).$$

Im lokalen Ring \mathcal{O}_P ist $v - 2$ Einheit, also

$$\mathfrak{a} = (u - v^2, v^3).$$

Damit ist

$$\mathcal{O}_P/\mathfrak{a} \simeq k + kv + kv^2.$$

Insbesondere ist

$$\dim(\mathcal{O}_P/\mathfrak{a}) = 3.$$

Diese Zahl entspricht also den vorausgegangenen geometrischen Überlegungen.

Bemerkung: Die vorherigen Beispiele deuten darauf hin, daß es sinnvoll sein kann, bei einer Kurve die Gleichung mehr zu betonen als die Nullstellenmenge. Eine ebene Kurve ist also gegeben durch ein Polynom $f(x_0, x_1, x_2)$ bzw. affin $f(x, y)$. (Schnitttheorie macht man mit Divisoren auf Flächen.) Ist F durch das Polynom f gegeben, G durch das Polynom g , so werde $F + G$ durch das Polynom fg definiert.

Wir definieren jetzt eine Schnittmultiplizität für ebene Kurven:

DEFINITION 26. Seien F und G ebene Kurven, gegeben durch Polynome f und g . Sei $P \in \mathbf{P}^2$. Dann heißt

$$i(P, F \cdot G) = \dim_k \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2, P}/(f, g)$$

die Schnittmultiplizität von F und G im Punkt P .

Bevor wir wichtige Eigenschaften der Schnittmultiplizität vorstellen wollen noch ein Lemma beweisen, das hilft mit lokalen Ringen zu rechnen. Zur Erinnerung: Ist $P \in \mathbf{P}^2$, gewählt mit $P \in \mathbf{A}^2$, so ist

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2, P} = \mathcal{O}_{\mathbf{A}^2, P} = \left\{ \frac{f}{g} : f, g \in k[x, y], g(P) \neq 0 \right\}.$$

LEMMA 26. Sind $f_1, \dots, f_n \in k[x, y]$ mit $Z(f_1, \dots, f_n) = \{P\}$, so gilt

$$k[x, y]/(f_1, \dots, f_n) \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{A}^2, P}/(f_1, \dots, f_n).$$

Beweis: Die natürliche Inklusion $k[x, y] \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{A}^2, P}$ induziert

$$\lambda : k[x, y]/(f_1, \dots, f_n) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{A}^2, P}/(f_1, \dots, f_n).$$

λ ist injektiv: Sei f ein Polynom mit $f \in \text{Kern}(\lambda)$. Dann gibt es Polynome $g, g_1, \dots, g_n \in k[x, y]$ mit $f = \sum \frac{g_i}{g} f_i$ und $g(P) \neq 0$. Wegen $Z(f_1, \dots, f_n) = \{P\}$ folgt $Z(f_1, \dots, f_n, g) = \emptyset$, also gibt es nach dem Hilbertschen Nullstellensatz Polynome h, h_1, \dots, h_n mit $1 = hg + \sum h_i f_i$. Damit folgt

$$f = hgf + \sum h_i f f_i = \sum h g_i f_i + \sum h_i f f_i = \sum (h g_i + h_i f) f_i,$$

also $f \equiv 0 \pmod{(f_1, \dots, f_n)}$, d.h. λ ist injektiv.

λ ist surjektiv: Es genügt zu zeigen: Ist g ein Polynom mit $g(P) \neq 0$, so ist g im Bild von λ . Wie eben sieht man die Existenz von Polynomen h, h_1, \dots, h_n mit $hg + \sum h_i f_i = 1$. Dann ist aber $\lambda(h) = \frac{1}{g}$. ■

Der folgende Satz bringt einige grundlegende Eigenschaften der Schnittmultiplizität:

- SATZ 49.
1. $i(P, G \cdot F) = i(P, F \cdot G)$.
 2. $i(P, (F_1 + F_2) \cdot G) = i(P, F_1 \cdot G) + i(P, F_2 \cdot G)$, wo $F_1 + F_2$ eine Abkürzung für die durch $f_1 f_2$ definierte Kurve sein soll.
 3. $i(P, F' \cdot G) = i(P, F \cdot G)$, wenn F' durch $f + gh$ definiert wird.
 4. $i(P, F \cdot G) = 0$, falls $P \notin F \cap G$, $i(P, F \cdot G) = \infty$, falls F und G eine gemeinsame Komponente haben, die durch P geht; andernfalls ist $i(P, F \cdot G)$ endlich und ≥ 1 .
 5. $i(P, F \cdot G) = 1$ genau dann, wenn P nichtsingulärer Punkt auf F und G ist und die Tangenten in P verschieden sind.
 6. Genauer gilt: $i(P, F \cdot G) \geq m_P(F) \cdot m_P(G)$. Die Gleichheit gilt genau dann, wenn die Geraden aus den Tangentialkegeln von F und G verschieden sind.

Beweis: Mit \mathcal{O} kürzen wir den Ring $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2, P}$ ab.

1. Klar!
2. Zu zeigen ist:

$$\dim \mathcal{O}/(f_1 f_2, g) = \dim \mathcal{O}/(f_1, g) + \dim \mathcal{O}/(f_2, g).$$

Nach der Aussage in 4. können wir annehmen, daß $F_1 + F_2$ und g keine gemeinsame Komponente haben, die durch P geht, d.h. $f_1 f_2$ und g sind teilerfremd in \mathcal{O} .

Nun haben wir eine surjektive Abbildung $\phi : \mathcal{O}/(f_1 f_2, g) \rightarrow \mathcal{O}/(f_1, g)$. Der Kern ist $f_1 \mathcal{O}/(f_1 f_2, g)$. Die Multiplikation mit f_1 liefert eine surjektive Abbildung $\psi : \mathcal{O} \rightarrow f_1 \mathcal{O}/(f_1 f_2, g)$. Ist $h \in \text{Kern}(\psi)$, so gibt es $k_1, k_2 \in \mathcal{O}$ mit $h f_1 = k_1 f_1 f_2 + k_2 g$. Dann gilt $f_1 | k_2 g$, also folgt aus der Teilerfremdheit $f_1 | k_2$, d.h. $k_2 = f_1 k_3$ und damit $h = k_1 f_2 + k_3 g \in (f_2, g)$. Somit

$$\mathcal{O}/(f_2, g) \simeq f_1 \mathcal{O}/(f_1 f_2, g).$$

Der Rest folgt aus der Dimensionsformel für k -Vektorräume. Wir können das Gezeigte auch anders ausdrücken: Die folgende Sequenz von k -Vektorräumen ist exakt:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}/(f_2, g) \xrightarrow{f_1} \mathcal{O}/(f_1 f_2, g) \rightarrow \mathcal{O}/(f_1, g) \rightarrow 0.$$

3. Klar wegen $(f, g) = (f + gh, g)$.
4.
 - Ist $P \notin F \cap G$, z.B. $P \notin F$, dann ist f Einheit in \mathcal{O} , also $(f, g)\mathcal{O} = \mathcal{O}$, also $\mathcal{O}/(f, g) = 0$.
 - Sei $f = ah$, $g = bh$ und $h(P) = 0$. Dann gibt es eine surjektive Abbildung $\mathcal{O}/(f, g) = \mathcal{O}/(ah, bh) \rightarrow \mathcal{O}/(h)$. Als Vektorraum ist $\mathcal{O}/(h)$ aber unendlich dimensional (o.E. h irreduzibel und $h \neq x$. Dann sind $1, x, x^2, x^3, \dots$ linear unabhängig über k .)
 - Durch Resultantenbildung haben wir bereits früher gesehen:

$$x^d, y^e \in (f, g)\mathcal{O}.$$

Also ist $\mathcal{O}/(x^d, y^e) \rightarrow \mathcal{O}/(f, g)$ surjektiv. Das erste ist aber ein endlich dimensionaler k -Vektorraum. Da $1 \notin (f, g)\mathcal{O}$, ist $\dim \mathcal{O}/(f, g) \geq 1$.

5. Sei zunächst $\dim \mathcal{O}/(f, g) = 1$. Dann ist $(f, g)\mathcal{O} = \mathfrak{m}$, modulo \mathfrak{m}^2 liefert dies, daß die linearen Anteile von f und g einen zweidimensionalen Vektorraum aufspannen. Daraus folgt die eine Richtung.

Die andere Richtung folgt aus dem Lemma von Nakayama: O.E. $f = x + f'$ und $g = y + g'$, wo f' und g' jeweils nur Monome vom Grad > 1 enthalten. Dann gilt

$$\mathfrak{m} = \mathcal{O}f + \mathcal{O}g + \mathfrak{m}^2,$$

also folgt schon $(f, g)\mathcal{O} = \mathfrak{m}$, also ist die Schnittzahl wirklich 1.

6. Diese Aussage wird in den Übungen bewiesen. ■

Beispiel: Schnittzahlen ebener Quadriken in einem Punkt. Wir betrachten zwei nichtsinguläre Quadriken $F = Z(f)$ und $G = Z(g)$ und einen Punkt P im Durchschnitt.

1. Haben die Quadriken verschiedene Tangenten, so ist die Schnittzahl 1.
2. Nun o.E. $P = (0, 0)$, $f = y + p(x, y)$ und $g = y + q(x, y)$, wo p, q homogen quadratisch sind. Es genügt die Schnittzahl von $f = 0$ mit $q(x, y) - p(x, y) = 0$ zu berechnen. Nun zerfällt $q(x, y) - p(x, y)$ aber: $q(x, y) - p(x, y) = \ell_1(x, y)\ell_2(x, y)$. Es gilt:

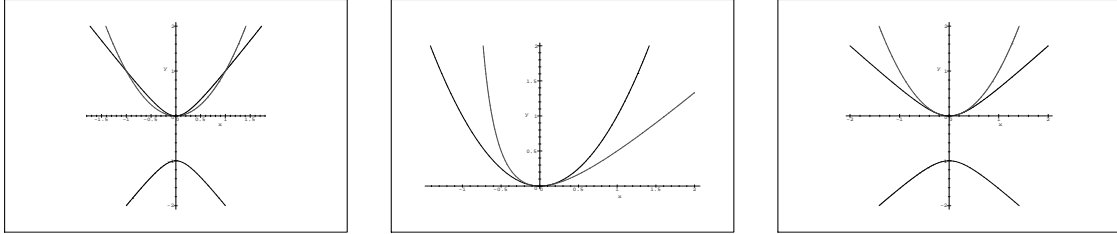
$$i(P, F \cdot G) = i(P, f \cdot \ell_1) + i(P, f \cdot \ell_2).$$

- (a) Ist $y \neq c\ell_i$, so ist $i(P, f \cdot \ell_i) = 1$.

(b) Ist $y = cl_i$, so ist $i(P, f \cdot l_i) = 2$.

3. Damit sieht man sofort, daß alle Zahlen ≤ 4 als Schnittzahlen vorkommen können.

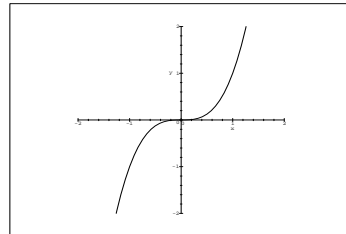
Die folgenden Beispiele skizzieren den Schnitt von $y = x^2$ mit den Kurven $y = 2x^2 - y^2$, $y = x^2 - xy$ und $y = x^2 - y^2$, wobei als Schnittzahlen 2, 3 und 4 auftreten.



FOLGERUNG 15. Sei $P \in F$ nichtsingulär und G eine Gerade durch P . Dann ist $i(P, F \cdot G) \geq 2$ genau dann, wenn G die Tangente an F in P ist.

DEFINITION 27. Sei P ein nichtsingulärer Punkt der ebenen Kurve F und G die Tangente. Ist $i(P, F \cdot G) \geq 3$, so heißt P Wendepunkt der Kurve und G eine Wendetangente.

Beispiel: Sei C gegeben durch $y = x^3$ und $P = (0, 0)$. Dann ist P ein Wendepunkt mit Wendetangente $y = 0$.



Wir können nun den folgenden wichtigen Satz formulieren:

SATZ 50 (Bézout). Seien F und G Kurven in \mathbf{P}^2 ohne gemeinsame Komponente. Dann ist

$$\sum_{P \in \mathbf{P}^2} i(P, F \cdot G) = (\text{grad}F)(\text{grad}G).$$

Der Satz besitzt zahlreiche Anwendungen. Der Beweis wird in zwei Lemmata aufgeteilt. Wir können dabei annehmen, daß alle Schnittpunkte $F \cap G$ im Endlichen liegen.

LEMMA 27. Seien $f, g \in k[x, y]$ Polynome ohne gemeinsame Komponente und

$$\{f = g = 0\} = \{P_1, \dots, P_d\}.$$

Dann gilt

$$k[x, y]/(f, g) \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{A}^2, P_1}/(f, g) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{A}^2, P_d}/(f, g).$$

Insbesondere gilt

$$\dim k[x, y]/(f, g) = i(P_1, F \cdot G) + \dots + i(P_d, F \cdot G).$$

Beweis:

1. Sei $P_i = (p_i, q_i)$. Nach Koordinatenwechsel können wir wieder annehmen, daß die p_i und q_i paarweise verschieden sind. Die Resultanten $R_y(f, g), R_x(f, g)$ liegen in (f, g) und haben die Gestalt

$$c(x - p_1)^{e_1} \dots (x - p_d)^{e_d} \text{ bzw. } c'(y - q_1)^{f_1} \dots (y - q_d)^{f_d},$$

also gibt es ein e mit

$$(x - p_1)^e \dots (x - p_d)^e, (y - q_1)^e \dots (y - q_d)^e \in (f, g).$$

2. Sei

$$\mathfrak{a}_i = (f, g, (x - p_i)^e, (y - q_i)^e).$$

Offensichtlich ist $Z(\mathfrak{a}_i) = \{(p_i, q_i)\}$. Damit gilt $Z(\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j) = \emptyset$ für $i \neq j$, also nach dem Hilbertschen Nullstellensatz $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j = 1$. Der chinesische Restsatz liefert dann einen Isomorphismus

$$k[x, y]/\cap_i \mathfrak{a}_i \simeq k[x, y]/\mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus k[x, y]/\mathfrak{a}_d.$$

Wir müssen jetzt nur noch die einzelnen Terme identifizieren.

3. Sei $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2, P_i}$. Dann gilt

$$(x - p_i)^e, (y - q_i)^e \in (f, g)\mathcal{O}_i,$$

also nach einem früheren Lemma

$$\begin{aligned} k[x, y]/\mathfrak{a}_i &= k[x, y]/(f, g, (x - p_i)^e, (y - q_i)^e) \simeq \\ &\simeq \mathcal{O}_i/(f, g, (x - p_i)^e, (y - q_i)^e) = \mathcal{O}_i/(f, g). \end{aligned}$$

Damit hätten wir die Ausdrücke auf der rechten Seite erledigt.

4. Offensichtlich ist $(f, g) \subseteq \cap_i \mathfrak{a}_i$. Sei nun $F(x, y) \in \cap_i \mathfrak{a}_i$. Definiert man

$$u_i = \prod_{j \neq i} (x - p_j)^e (y - q_j)^e,$$

so gilt $u_i \mathfrak{a}_i \subseteq (f, g)$ und damit $u_i F \in (f, g)$. Nun ist weiter $Z(f, g, u_1, \dots, u_d) = \emptyset$, also gibt es nach dem Hilbertschen Nullstellensatz Polynome v_i, w_f, w_g mit $1 = u_1 v_1 + \cdots + u_d v_d + w_f f + w_g g$. Damit gilt

$$F = v_1 u_1 F + \cdots + v_d u_d F + w_f F f + w_g F g \in (f, g).$$

Daraus folgt sofort $\cap_i \mathfrak{a}_i = (f, g)$ und damit schließlich der Rest der Behauptung. ■

LEMMA 28. *Schneiden sich F und G nur im Endlichen, dann ist*

$$\dim k[x, y]/(f, g) = \text{grad}(f) \cdot \text{grad}(g).$$

Beweis:

- f habe Grad m , g habe Grad n . Dann können wir f und g in homogene Bestandteile zerlegen:

$$f = f_m + f_{m-1} + \cdots, \quad g = g_n + g_{n-1} + \cdots$$

Homogenisiert lauten die Gleichungen

$$f_m(x_1, x_2) + x_0 f_{m-1}(x_1, x_2) + \cdots, \quad g_n(x_1, x_2) + x_0 g_{n-1}(x_1, x_2) + \cdots$$

Für die Schnittpunkte im Unendlichen lautet also die Gleichung

$$x_0 = f_m(x_1, x_2) = g_n(x_1, x_2) = 0.$$

Soll es keine geben, so ist dies äquivalent damit, da f_m und g_n teilerfremd sind.

- Sei V_d der k -Vektorraum der Polynome in x, y vom Grad $\leq d$. Eine Basis ist

$$1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, x^d, x^{d-1}y, \dots, y^d,$$

also ist die Dimension

$$\dim V_d = 1 + 2 + \cdots + (d + 1) = \frac{(d + 1)(d + 2)}{2}.$$

- Da $k[x, y]/(f, g)$ endlich dimensional ist, ist für große d die natürliche Abbildung $\phi : V_d \rightarrow k[x, y]/(f, g)$ surjektiv. Also gilt

$$\dim k[x, y]/(f, g) = \dim V_d - \dim \text{Kern}(\phi).$$

- Wir berechnen $\text{Kern}(\phi)$. Es ist

$$\text{Kern}(\phi) = \{af + bg \in V_d : a, b \in k[x, y]\}.$$

Beh.: Ist $af + bg \in V_d$, so gibt es $a' \in V_{d-m}$ und $b' \in V_{d-n}$ mit $af + bg = a'f + b'g$.

Bew.: Angenommen

$$a = a_{e-m} + \dots, b = b_{e-n} + \dots \text{ mit } e > d.$$

Dann ist

$$af + bg = (a_{e-m}f_m + b_{e-n}g_n) + \dots \in V_d,$$

also $a_{e-m}f_m + b_{e-n}g_n = 0$. Da f_m und g_n teilerfremd sind, gibt es ein homogenes Polynom h mit $a_{e-m} = hg_n, b_{e-n} = -hf_m$. Da nun gilt

$$af + bg = (a - hg)f + (b + hf)g$$

und

$$a - hg = (a_{e-m} + \dots) - (hg_n + hg_{n-1} + \dots) \in V_{e-m-1}$$

und analog $b + hf \in V_{e-n-1}$ können wir auf diese Weise die Grade von a und b erniedrigen, bis wir die Behauptung erreicht haben.

- Wir können jetzt schreiben

$$\text{Kern}(\phi) = \{af + bg : a \in V_{d-m}, b \in V_{d-n}\}.$$

Wir betrachten jetzt die natürliche Abbildung

$$\psi : V_{d-m} \times V_{d-n} \rightarrow \text{Kern}(\phi), (a, b) \mapsto af + bg.$$

ψ ist surjektiv, also

$$\dim(\text{Kern}(\phi)) = \dim V_{d-m} + \dim V_{d-n} - \dim \text{Kern}(\psi).$$

- Was ist $\text{Kern}(\psi)$? Da f und g teilerfremd sind, folgt aus $af + bg = 0$, daß es ein h gibt mit $a = hg$ und $b = -hf$. Also ist

$$\text{Kern}(\psi) = \{(hg, -hf) : h \in V_{d-m-n}\}.$$

Speziell: $\dim \text{Kern}(\psi) = \dim V_{d-m-n}$.

- Nun können wir zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \dim(k[x, y]/(f, g)) &= \dim V_d - \dim \text{Kern}(\phi) = \\ &= \dim V_d - \dim V_{d-m} - \dim V_{d-n} + \dim V_{d-m-n} = \\ &= \frac{(d+1)(d+2)}{2} - \frac{(d-m+1)(d-m+2)}{2} \\ &\quad - \frac{(d-n+1)(d-n+2)}{2} + \frac{(d-m-n+1)(d-m-n+2)}{2} = \\ &= mn. \end{aligned}$$

- *Bemerkung:* Wir haben gerade folgende exakte Sequenz hergeleitet (für d groß genug):

$$0 \rightarrow V_{d-m-n} \xrightarrow{h \mapsto (hg, -hf)} V_{d-m} \times V_{d-n} \xrightarrow{(a,b) \mapsto af+bg} V_d \rightarrow k[x, y]/(f, g) \rightarrow 0.$$

■

Folgender Satz spielt eine große Rolle:

FOLGERUNG 16. *Liegen mit Vielfachheiten gezählt mindestens $(\text{grad}F)(\text{grad}G) + 1$ Punkte im Durchschnitt $F \cap G$, so haben F und G eine Komponente gemeinsam.*

FOLGERUNG 17. *Sind F und G Kurven im \mathbf{P}^2 , so gilt $F \cap G \neq \emptyset$.*

Bemerkung: Ist S eine glatte projektive Fläche, so kann man auch für S eine Schnitttheorie für Kurven (bzw. Divisoren) entwickeln.

Schnitttheorie auf $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$

Die Kurven auf $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ werden definiert durch bihomogene Polynome $f(x_0, x_1, y_0, y_1)$. Hat f Grad m in x_0, x_1 , Grad n in y_0, y_1 , so sagen wir f hat den Bigrad (m, n) .

$\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ wird überdeckt durch die affinen Mengen ($\simeq \mathbf{A}^2$)

$$\begin{aligned} & \{((1 : x), (1 : y)) : (x, y) \in \mathbf{A}^2\}, \quad \{((t : 1), (1 : y)) : (t, y) \in \mathbf{A}^2\}, \\ & \{((1 : x), (u : 1)) : (x, u) \in \mathbf{A}^2\}, \quad \{((t : 1), (u : 1)) : (t, u) \in \mathbf{A}^2\}, \end{aligned}$$

also kann man genauso wie im \mathbf{P}^2 die Schnittmultiplizität zweier Kurven F, G in einem Punkt P definieren: $i(P, F \cdot G)$.

Der Satz von Bézout für $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ lautet nun:

SATZ 51. Sind F, G zwei Kurven auf $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ ohne gemeinsame Komponente, bihomogen vom Grad (m_1, n_1) bzw. (m_2, n_2) , so gilt

$$\sum_{P \in F \cap G} i(P, F \cdot G) = m_1 n_2 + m_2 n_1.$$

Da $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ birational äquivalent zu \mathbf{P}^2 ist, werden wir versuchen, diesen Satz auf den gewöhnlichen Satz von Bézout zurückzuführen.

Beweis:

- Wir können nach Koordinatenwechsel annehmen, daß sich die Kurven $f(x_0, x_1, y_0, y_1) = 0$ und $g(x_0, x_1, y_0, y_1) = 0$ nur im affinen Teil $\{((1 : x), (1 : y)) : (x, y) \in \mathbf{A}^2\}$ schneiden. Sei N die Anzahl der Schnittpunkte, d.h. $N = \sum_{P \in F \cap G} i(P, F \cdot G)$. Wir schreiben

$$\begin{aligned} f &= a_0(x_0, x_1)y_0^{n_1} + a_1(x_0, x_1)y_0^{n_1-1}y_1 + \cdots + a_{n_1}(x_0, x_1)y_1^{n_1} \text{ und} \\ g &= b_0(x_0, x_1)y_0^{n_2} + b_1(x_0, x_1)y_0^{n_2-1}y_1 + \cdots + b_{n_2}(x_0, x_1)y_1^{n_2}, \end{aligned}$$

wo $a_i(x_0, x_1)$ homogen vom Grad m_1 und $b_i(x_0, x_1)$ homogen vom Grad m_2 ist.

- Die affinen ebenen Kurven $f(1, x, 1, y) = 0$ und $g(1, x, 1, y) = 0$ schneiden sich also mit Vielfachheit gezählt in N Punkten. Die projektiven Abschlüsse dieser Kurven im \mathbf{P}^2 seien \tilde{F} und \tilde{G} . Sie werden durch die Gleichungen $f(x_0, x_1, x_0, x_2) = 0$ und $g(x_0, x_1, x_0, x_2) = 0$ gegeben; sie sind homogen vom Grad $m_1 + n_1$ bzw. $m_2 + n_2$. Nach Bézout erhalten wir also $(m_1 + n_1)(m_2 + n_2)$ Schnittpunkte. Die Zahl N erhalten wir, wenn wir von dieser Zahl die Anzahl der Schnittpunkte im Unendlichen abziehen.
- Die Schnittpunkte von \tilde{F} und \tilde{G} im Unendlichen erhält man aus den Gleichungen

$$0 = x_0 = f(0, x_1, 0, x_2) = g(0, x_1, 0, x_2),$$

also für

$$0 = x_0 = a_{n_1}(0, x_1)x_2^{n_1} = b_{n_2}(0, x_1)x_2^{n_2},$$

d.h. nur die zwei Punkte $(0 : 0 : 1)$ und $(0 : 1 : 0)$ sind möglich.

- Wir berechnen die Schnittzahl im Punkt $(0 : 0 : 1)$. Wir wählen affine Koordinaten (u, v) mit $(u : v : 1) = (x_0 : x_1 : x_2)$ und müssen jetzt die Schnittzahl von $f(u, v, u, 1) = 0$ und $g(u, v, u, 1) = 0$ im Punkt $(u, v) = (0, 0)$ berechnen. Nun ist

$$f(u, v, u, 1) = a_0(u, v)u^{n_1} + a_1(u, v)u^{n_1-1} + \cdots + a_{n_1}(u, v)$$

und

$$g(u, v, u, 1) = b_0(u, v)u^{n_2} + b_1(u, v)u^{n_2-1} + \cdots + b_{n_2}(u, v).$$

\tilde{F} hat also Multiplizität n_1 in $(0, 0)$ und den Tangentialkegel $a_{n_1}(u, v) = 0$, \tilde{G} hat Multiplizität n_2 in $(0, 0)$ und den Tangentialkegel $b_{n_2}(u, v) = 0$. Aus den Gleichungen

$$f(x_0, x_1, 0, 1) = a_{n_1}(x_0, x_1) \text{ und } g(x_0, x_1, 0, 1) = b_{n_2}(x_0, x_1)$$

und der Tatsache, daß sich die Ausgangskurven F und G nur im oben angegebenen affinen Teil schneiden sollen, folgt sofort, daß $a_{n_1}(x_0, x_1)$ und $b_{n_2}(x_0, x_1)$ teilerfremd sind. Also schneiden sich \tilde{F} und \tilde{G} in $(0 : 0 : 1)$ mit Multiplizität $m_1 m_2$.

- Genauso zeigt man, daß im Punkt $(0 : 1 : 0)$ die Schnittzahl von \tilde{F} und \tilde{G} gleich $m_1 m_2$ ist.

6. Es folgt damit

$$N = (m_1 + n_1)(m_2 + n_2) - m_1m_2 - n_1n_2 = m_1n_2 + m_2n_1. \quad \blacksquare$$

Ebene Kurven

In diesem Abschnitt soll es darum gehen, etwas von den vielfältigen Anwendungen des Satzes von Bézout zu skizzieren.

Eine ebene Kurve vom Grad d ist gegeben durch ein Polynom

$$f = a_0 x_0^d + a_1 x_0^{d-1} x_1 + a_2 x_0^{d-1} x_2 + a_3 x_0^{d-2} x_1^2 + \cdots + a_{\frac{d(d+3)}{2}} x_2^d,$$

man kann ihr also den Punkt $(a_0 : a_1 : \cdots : a_{\frac{d(d+3)}{2}})$ im $\mathbf{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}$ zuordnen. Umgekehrt liefert so jeder Punkt im $\mathbf{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}$ eine ebene Kurve vom Grad d . Die ebenen Kurven vom Grad d werden also parametrisiert von einem $\frac{d(d+3)}{2}$ -dimensionalen projektiven Raum. Man spricht auch vom Linearsystem der ebenen Kurven vom Grad d . (Wenn auch nicht explizit erwähnt, wird doch oft vorausgesetzt, daß $\text{char}(k) > d$ ist.)

Ist P ein Punkt in \mathbf{P}^2 , so liefert $f(P) = 0$ eine lineare Gleichung in $a_0, \dots, a_{\frac{d(d+3)}{2}}$, d.h. die Kurven vom Grad d , die P enthalten, bilden eine Hyperfläche in $\mathbf{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}$. Auf gleiche Weise folgt:

LEMMA 29. Sind $P_1, \dots, P_n \in \mathbf{P}^2$ gegeben mit $n \leq \frac{d(d+3)}{2}$, so gibt es eine Kurve vom Grad d , die durch P_1, \dots, P_n geht.

Eine Kurve $f(x_0, x_1, x_2) = 0$ vom Grad d hat eine Singularität in $P = (p_0 : p_1 : p_2)$, falls gilt.

$$f(p_0, p_1, p_2) = \frac{\partial f}{\partial x_0}(p_0, p_1, p_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0, p_1, p_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(p_0, p_1, p_2) = 0.$$

(Gilt $d \neq \text{char}(k)$, so kann man wegen der Eulerschen Relation die Bedingung $f(p_0, p_1, p_2) = 0$ weglassen.)

Wählt man auf $\mathbf{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}$ die homogenen Koordinaten $a_0, \dots, a_{\frac{d(d+3)}{2}}$, auf \mathbf{P}^2 wie üblich x_0, x_1, x_2 , setzt man $f = a_0 x_0^d + \cdots + a_{\frac{d(d+3)}{2}} x_2^d$, definiert man

$$X = \{((a_0 : \cdots : a_{\frac{d(d+3)}{2}}), (x_0 : x_1 : x_2)) \in \mathbf{P}^{\frac{d(d+3)}{2}} \times \mathbf{P}^2 : f = \frac{\partial f}{\partial x_0} = \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0\},$$

so hat die Projektion $\pi : X \rightarrow \mathbf{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}$ auf die erste Komponente als Bild die Menge der singulären Kurven vom Grad d . Also ist die Menge der singulären Kurven (als Bild einer projektiven algebraischen Menge) abgeschlossen in $\mathbf{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}$. Genauer gilt der Satz:

SATZ 52. Die singulären ebenen Kurven vom Grad d bilden eine Hyperfläche vom Grad $3(d-1)^2$ im $\mathbf{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}$. D.h. es gibt ein homogenes Polynom $D(f) = D(a_0, \dots, a_{\frac{d(d+3)}{2}})$ vom Grad $3(d-1)^2$, so daß $f = 0$ genau dann singulär ist, wenn $D(f) = 0$ ist. D wird auch Diskriminante genannt.

In diesem Sinn sind die meisten ebenen Kurven also nichtsingulär.

SATZ 53. Sei $C \subseteq \mathbf{P}^2$ eine nichtsinguläre Kurve. Dann ist C irreduzibel.

Beweis: Wir beweisen umgekehrt: Ist C reduzibel, so ist C singulär. Sei C die Vereinigung der Kurven F und G , wo F und G keine gemeinsame Komponente haben mögen. Sei $P \in F \cap G$. Wir betrachten die Situation affin und o.E. $P = (0, 0)$. Die Kurve F wird beschrieben durch ein Polynom $f(x, y)$, die Kurve G durch ein Polynom $g(x, y)$. Die Kurve C wird dann durch fg beschrieben. Nun ist

$$f = ax + by + \dots, \quad g = cx + dy + \dots,$$

also

$$fg = (ax + by)(cx + dy) + \dots,$$

d.h. C ist singularär in P . ■

Bemerkungen:

1. Definiert $f(x_0, x_1, x_2) = 0$ eine ebene Kurve C , so findet man die Singularitäten im Durchschnitt

$$\{f = f_0 = f_1 = f_2 = 0\}.$$

Mitunter kann man so einfach auf die Irreduzibilität schließen.

2. Der Satz gilt aber nicht allgemein. Ist C die Vereinigung windschiefer Geraden im \mathbf{P}^3 , so ist C nichtsingular, aber reduzibel.
3. Wir haben im Beweis gezeigt: Ist C die Vereinigung der Kurven C_1 und C_2 , so sind alle Schnittpunkte von C_1 und C_2 Singularitäten von C .

Wir wollen uns nun der Frage zuwenden: Wieviele Singularitäten kann eine ebene Kurve vom Grad d besitzen?

Sei C eine irreduzible Kurve gegeben durch ein irreduzibles Polynom $f(x_0, x_1, x_2)$. Da C nur endlich viele Singularitäten hat, können nicht alle drei Ableitungen f_0, f_1, f_2 verschwinden, wo $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$. O.E. $f_0 \neq 0$. Sei G die durch f_0 definierte Kurve. G hat Grad $d-1$, wenn C Grad d hat. Für eine Singularität P von C gilt: $m_P(C) \geq 2$, also

$$i(P, C \cdot G) \geq 2.$$

Sind P_1, \dots, P_s die singulären Punkte von C , so gilt also nach dem Satz von Bézout:

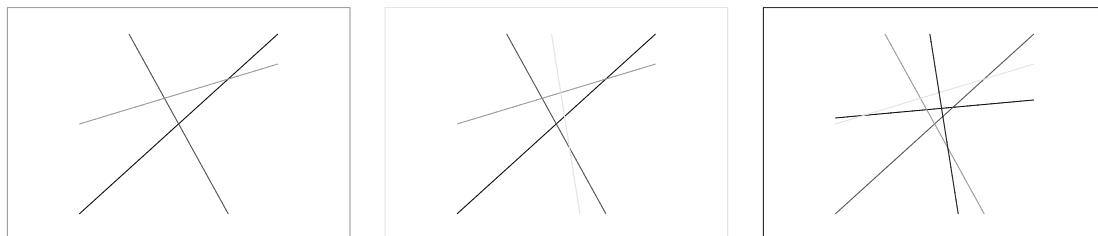
$$2s \leq \sum_{P \in C \cap G} i(P, C \cdot G) = d(d-1).$$

Damit erhalten wir:

SATZ 54. Eine irreduzible Kurve vom Grad d hat höchstens $\frac{d(d-1)}{2}$ singuläre Punkte.

Bemerkungen:

1. Zeige, daß die Folgerung auch gilt, wenn C reduzibel ist, aber reduziert ist.
2. Seien $\ell_1 = 0, \dots, \ell_d = 0$ verschiedene Geraden in \mathbf{P}^2 . Es gibt maximal $\frac{d(d-1)}{2}$ Schnittpunkte. Sind ℓ_1, \dots, ℓ_d geeignet allgemein gewählt, so gibt es $\frac{d(d-1)}{2}$ Schnittpunkte, d.h. die Kurve $\ell_1 \dots \ell_d = 0$ hat $\frac{d(d-1)}{2}$ Singularitäten. (Skizzen für $d = 3, 4, 5$)



Um obigen Satz für irreduzible Kurven zu verschärfen, betrachten wir zunächst die Fälle $d = 3$ und $d = 4$.

Wieviele Singularitäten kann eine ebene irreduzible Kubik C besitzen?

Angenommen, es gäbe 2 singuläre Punkte P und Q . Sei G die Gerade durch P und Q . Dann ist

$$i(P, C \cdot G) \geq m_P(C) \geq 2 \quad \text{und} \quad i(Q, C \cdot G) \geq 2,$$

also

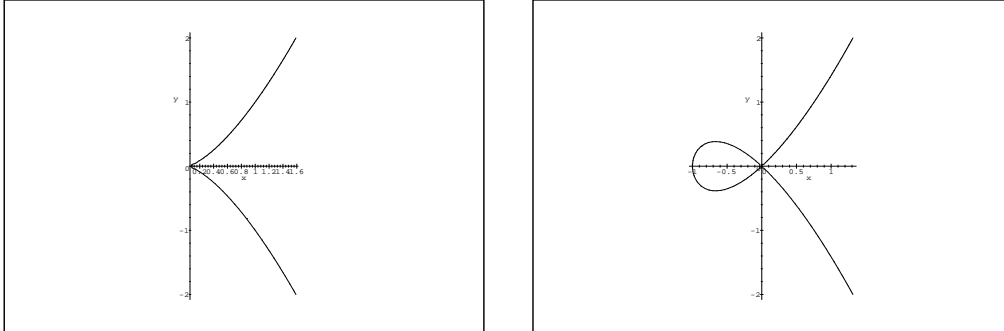
$$\sum_{R \in C \cap G} i(R, C \cdot G) \geq 4 > 3 = (\text{grad} C)(\text{grad} G),$$

also muß G eine Komponente von C sein. Damit haben wir gezeigt:

Ergebnis: Eine irreduzible Kubik hat höchstens eine Singularität.

Wir kennen zwei irreduzible Kubiken mit genau einer Singularität, nämlich $y^2 = x^3$ (Spitze) und $y^2 = x^2 + x^3$ (Knoten). Dies sind im wesentlichen die einzigen:

SATZ 55. Eine singuläre irreduzible Kubik ist projektiv äquivalent zu $y^2 = x^3$ (Tangentialkegel in der Singularität besteht aus einer Geraden) oder zu $y^2 = x^2 + x^3$ (Tangentialkegel in der Singularität besteht aus zwei Geraden).



Beweis: Sei C eine singuläre irreduzible Kubik mit einem singulären Punkt P . O.E. $P = (1 : 0 : 0) \simeq (0, 0)$.

1. Falls der Tangentialkegel in P nur aus einer Geraden besteht, kann man o.E. schreiben

$$f = y^2 + a_0x^3 + a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3.$$

Es muß $a_0 \neq 0$ sein, also o.E. $a_0 = 1$. Indem man statt x den Term $x - \frac{a_1}{3}y$ einsetzt, kann man den Term bei x^2 zum Verschwinden bringen, also o.E. $a_1 = 0$. Nun ersetzen wir x_0 durch $x_0 - a_2x_1 - a_3x_2$, dann bleibt $y^2 + x^3 = 0$, und nach Vorzeichenwechsel $y^2 = x^3$.

2. Falls der Tangentialkegel in P aus zwei Geraden besteht, o.E.

$$f = xy + a_0x^3 + a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3.$$

Es muß gelten: $a_0, a_3 \neq 0$, also o.E. $a_0 = a_3 = 1$. Ersetze nun x_0 durch $x_0 - a_1x_1 - a_2x_2$, dann bleibt $xy + x^3 + y^3 = 0$ übrig, nach Vorzeichenwechsel also

$$xy = x^3 + y^3.$$

Jede irreduzible Kubik mit Knoten ist also zu dieser Kurve projektiv äquivalent, also auch $y^2 = x^2 + x^3$. Also kann man auch letztere Kurve als Repräsentant nehmen. ■

Wieviele Singularitäten kann eine ebene irreduzible Quartik C haben?

Angenommen, es gäbe 4 singuläre Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 . Sei P_0 ein weiterer Punkt auf C . Lege nun eine Quadrik Q durch die 5 Punkte. Dann ist

$$(\text{grad}C)(\text{grad}Q) = 8,$$

aber

$$\sum i(P_i, C \cdot Q) \geq 1 + 4 \cdot 2 > 8,$$

also können die Voraussetzungen des Satzes von Bézout nicht erfüllt sein, also ist C nicht irreduzibel.

Ergebnis: Eine irreduzible Quartik besitzt höchstens 3 Singularitäten.

Hat eine Quartik C drei Singularitäten P_1, P_2, P_3 , so können diese nicht auf einer Geraden liegen, da sonst die Schnittzahl mit der Geraden mindestens 6 wäre, aber nach Bézout nur 4 in Frage kommt. Nach Koordinatenwechsel kann man also als die 3 Singularitäten $(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)$ wählen. Damit folgt schnell folgender Satz:

SATZ 56. 1. Eine irreduzible ebene Quartik besitzt höchstens 3 Singularitäten.

2. Eine irreduzible ebene Quartik mit 3 Singularitäten ist projektiv äquivalent zu einer Quartik C_b der Gestalt

$$f = b_5x_0^2x_1^2 + b_4x_0^2x_1x_2 + b_3x_0^2x_2^2 + b_2x_0x_1^2x_2 + b_1x_0x_1x_2^2 + b_0x_1^2x_2^2,$$

die singulär in $(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)$ ist.

3. Vermöge der rationalen Abbildung $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1)$ ist C_b birational äquivalent zu der Quadrik $b_0x_0^2 + b_1x_0x_1 + b_2x_0x_2 + b_3x_1^2 + b_4x_1x_2 + b_5x_2^2 = 0$.

Beispiele: für Quartiken mit genau 3 singulären Punkten erhält sofort aus dem obigen Satz. Weitere Beispiele liefern die *Zykloiden*; dies sind durch

$$x = (R - a) \cos \phi + b \cos \frac{\phi(R - a)}{a}, \quad y = (R - a) \sin \phi - b \sin \frac{\phi(R - a)}{a}$$

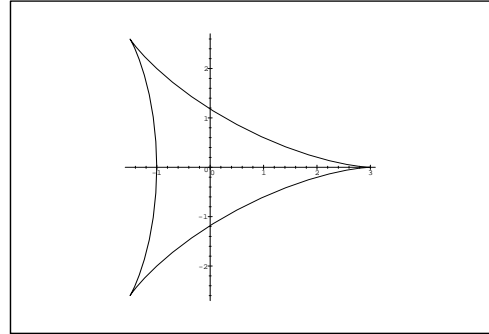
parametrisierte Kurven.

$a = 1, b = 1, R = 3$. Dann erhält man

$$x = 2 \cos \phi + 2 \cos^2 \phi - 1, \quad y = 2 \sin \phi - 2 \cos \phi \cdot \sin \phi.$$

Durch Elimination erhält man die Gleichung

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 8x^3 + 24xy^2 + 18x^2 + 18y^2 - 27 = 0.$$

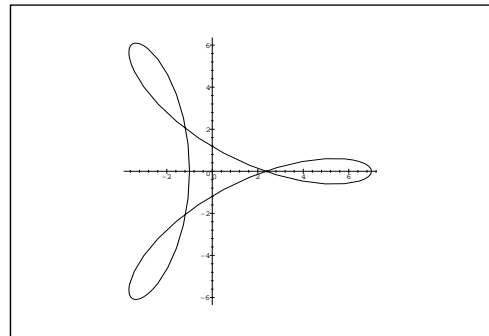


$a = 2, b = 3, R = 6$. Dann erhält man

$$x = 4 \cos \phi + 6 \cos^2 \phi - 3, \quad y = 4 \sin \phi - 6 \cos \phi \cdot \sin \phi.$$

Durch Elimination erhält man die Gleichung

$$9x^4 + 18x^2y^2 + 9y^4 - 96x^3 + 288xy^2 + 238x^2 + 238y^2 - 343 = 0.$$



Wir wollen die bei Kubien und Quartiken verwendete Konstruktion jetzt verallgemeinern.

Sei C eine irreduzible Kurve vom Grad d . Die Kurven vom Grad $d - 2$ bilden einen projektiven Raum der Dimension

$$\frac{(d-2)(d+1)}{2} = \frac{d^2 - d - 2}{2}.$$

C habe Singularitäten in den Punkten P_1, \dots, P_s , wo wir o.E. $s \leq \frac{(d-2)(d+1)}{2}$ annehmen können - sonst betrachte man nur so viele Singularitäten. Wähle $r = \frac{(d-2)(d+1)}{2} - s$ weitere Punkte Q_1, \dots, Q_r auf C . Dann gibt es eine Kurve D vom Grad $d - 2$, die durch die Punkte $P_1, \dots, P_s, Q_1, \dots, Q_r$ geht. Da C irreduzibel ist, können C und D keine gemeinsame Komponente haben, also folgt nach dem Satz von Bézout:

$$2s + r \leq d(d-2), \quad \text{d.h. } s + \frac{(d-2)(d+1)}{2} \leq d(d-2) \quad \text{und damit} \quad s \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Da nun $\frac{(d-1)(d-2)}{2} \leq \frac{(d-2)(d+1)}{2}$ ist, kann es nicht mehr als s Singularitäten geben.

Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

SATZ 57. Eine irreduzible Kurve vom Grad d besitzt höchstens $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ Singularitäten.

Die irreduziblen Kubiken mit einer Singularität sind rational, die irreduziblen Quartiken mit 3 Singularitäten sind birational zu ebenen Quadriken, also auch rational. Dieses Phänomen gilt allgemein:

SATZ 58. Eine irreduzible ebene Kurve C vom Grad d mit $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ Singularitäten ist rational, d.h. birational äquivalent zu \mathbf{P}^1 .

Beweisidee: (O.E. $d \geq 3$.)

1. Seien $P_1, \dots, P_{\frac{(d-1)(d-2)}{2}}$ die singulären Punkte von C . Man wähle weitere Punkte Q_1, \dots, Q_{d-3} . Die Kurven vom Grad $d-2$ bilden einen projektiven Raum der Dimension

$$\frac{(d-2)(d+1)}{2} = \frac{(d-1)(d-2)}{2} + (d-3) + 1.$$

Also gibt es durch $P_1, \dots, P_{\frac{(d-1)(d-2)}{2}}, Q_1, \dots, Q_{d-3}$ eine (mindestens) eindimensionale Familie von Kurven vom Grad $d-2$, d.h. es gibt linear unabhängige Polynome $g(x_0, x_1, x_2), h(x_0, x_1, x_2)$ vom Grad $d-2$, die auf diesen Punkten verschwinden. Die Kurven

$$D_t = D_{(t_0:t_1)} = \{t_0 g(x_0, x_1, x_2) + t_1 h(x_0, x_1, x_2) = 0\}$$

gehen alle durch diese Punkte.

2. Wir definieren eine rationale Abbildung $\phi : C \rightarrow \mathbf{P}^1$ wie folgt: Ein Punkt $P \in C$, der verschieden ist von P_i und Q_j liegt genau auf einer Kurve D_t . Setze

$$\phi(P) = (t_0 : t_1) = (h(P) : -g(P)).$$

3. Wir definieren eine Abbildung $\psi : \mathbf{P}^1 \rightarrow C$ wie folgt: Die Kurve D_t schneidet C richtig gezählt in genau

$$d(d-2) = 2 \frac{(d-1)(d-2)}{2} + d-2$$

Punkten, also in $P_1, \dots, P_{\frac{(d-1)(d-2)}{2}}, Q_1, \dots, Q_{d-3}$ und einem weiteren Punkt P_t . Wir setzen $\psi(t) = P_t$. (Warum ist ψ ein Morphismus?)

4. ϕ und ψ sind invers zueinander, was die Behauptung beweist. ■

Bemerkungen:

1. Eine ganz natürliche Frage ist nun: Gibt es irreduzible ebene Kurven vom Grad d mit $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ Singularitäten? Ein Ansatz ist folgender: Man wählt sich $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ Punkte und verlangt, daß eine Kurve $f = a_0 x_0^d + \dots + a_{\frac{d(d+3)}{2}} x_2^d = 0$ dort singulär ist, d.h. daß die 3 Ableitungen verschwinden. So erhält man $\frac{3}{2}(d-1)(d-2)$ lineare Bedingungen, d.h. den Durchschnitt von $\frac{3}{2}(d-1)(d-2)$ Hyperebenen im $\mathbf{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}$. Man sieht, daß dies höchstens für $d \leq 5$ gut geht.

d	3	4	5	6	7
$\frac{3}{2}(d-1)(d-2)$	3	9	18	30	45
$\frac{d(d+3)}{2}$	9	14	20	27	35

2. Auf andere Weise kann man sehen: Wählt man *allgemeine* Polynome $f_0(t), f_1(t), f_2(t)$ vom Grad d , so ist das Bild des Morphismus $\mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^2, t \mapsto (f_0(t) : f_1(t) : f_2(t))$ eine Kurve vom Grad d mit $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ Singularitäten.

Schließlich wollen wir noch Wendepunkte betrachten. Das wichtige Hilfsmittel ist dabei die Hessesche Kurve.

DEFINITION 28. Sei eine ebene Kurve C gegeben durch die Gleichung $f(x_0, x_1, x_2) = 0$. Dann ist

$$H(f) = \det\left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=0,1,2}\right)$$

ein homogenes Polynom vom Grad $3(d-2)$. Die zugehörige Kurve heißt die Hessesche (Kurve) $H(C)$ von C .

Bemerkungen:

1. Die Hessesche $H(C)$ von C hängt nicht von den gewählten Koordinaten ab. (Beweis als Übung.)
 2. Hat $f(x_0, x_1, x_2) = 0$ einen Punkt P der Multiplizität $\text{grad}(f)$, so kann man nach Koordinatenwechsel $P = (1 : 0 : 0)$ und damit $f(x_0, x_1, x_2) = g(x_1, x_2)$ erreichen, also ist $H(f) = 0$. ($f = 0$ besteht aus Geraden, die alle durch P gehen.) Man zeige die Umkehrung dieser Aussage.

Der zentrale Satz lautet nun:

SATZ 59. Sei $C \subseteq \mathbf{P}^2$ eine Kurve und $H(C)$ die Hessesche zu C . Dann gilt:

$$C \cap H(C) = \{\text{Wendepunkte}\} \cup \{\text{Singularitäten}\}.$$

Beweis: Sei $C = \{f = 0\}$, d der Grad von f und P ein Punkt auf C . Nach Koordinatenwechsel können wir $P = (1 : 0 : 0)$ annehmen bzw. affin $P = (0, 0)$ und

$$f = ay + (b_0x^2 + b_1xy + b_2y^2) + \dots,$$

(wobei eventuell $a = 0$ gilt). Um die Hessesche in P auszurechnen, d.h. den Wert $H(f)(P)$, homogenisieren wir f :

$$F = ax_0^{d-1}x_2 + x_0^{d-2}(b_0x_1^2 + b_1x_1x_2 + b_2x_2^2) + \dots$$

Nun gilt mit $F_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$

$$F_0 = (d-1)ax_0^{d-2}x_2 + (d-2)x_0^{d-3}(b_0x_1^2 + b_1x_1x_2 + b_2x_2^2) + \dots$$

$$F_1 = x_0^{d-2}(2b_0x_1 + b_1x_2) + \dots$$

$$F_2 = ax_0^{d-1} + x_0^{d-2}(b_1x_1 + 2b_2x_2) + \dots$$

Damit wird die Hessesche Matrix im Punkt P :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & (d-1)a \\ 0 & 2b_0 & b_1 \\ (d-1)a & b_1 & 2b_2 \end{pmatrix}.$$

Berechnung der Determinante liefert $H(f)(P) = 2a^2b_0(d-1)^2$. Wir unterscheiden nun ein paar Fälle:

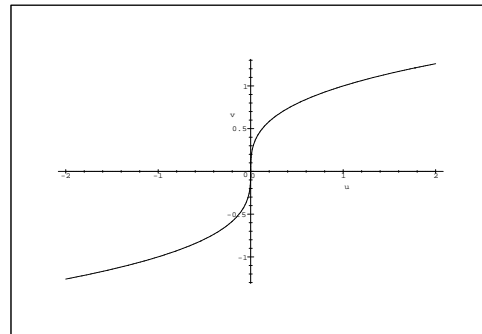
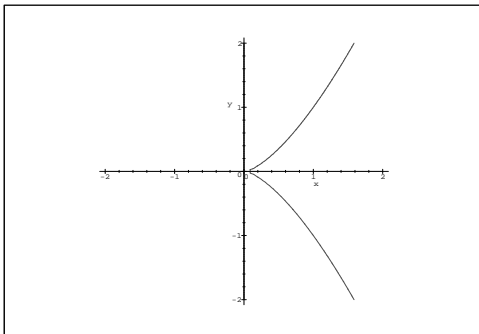
1. Ist C singularär in P , so ist $a = 0$, also geht auch die Hessesche Kurve durch P , d.h. $P \in C \cap H(C)$.
2. Sei nun C nichtsingularär in P , also o.E. $a = 1$. Die Tangente ist $y = 0$. Die Schnittzahl von Kurve und Tangente $i(P, C \cdot \{y = 0\})$ ist die Schnittzahl von $y = 0$ mit der Kurve $f - y = (b_0x^2 + b_1xy + b_2y^2) + \dots$.
 - (a) Ist $b_0 \neq 0$, so ist die Schnittmultiplizität von C mit $H(C)$ in P genau 2, P also kein Wendepunkt.
 - (b) Ist $b_0 = 0$, so ist die Schnittmultiplizität ≥ 3 , P also Wendepunkt. Damit folgt die Behauptung des Satzes. ■

Für eine irreduzible Kurve C vom Grad $d \geq 3$ ist $H(C)$ eine Kurve vom Grad $3(d-2)$. Da sich zwei Kurven im \mathbf{P}^2 immer schneiden, folgt sofort:

FOLGERUNG 18. Jede irreduzible Kurve im \mathbf{P}^2 vom Grad $d \geq 3$ besitzt Wendepunkte oder Singularitäten.

Beispiele: Wir betrachten kubische Kurven der Gestalt $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$. Die Homogenisierung ist $x_0x_2^2 = x_1^3 + ax_0x_1^2 + bx_0^2x_1 + cx_0^3$. Sie haben im Unendlichen ($x_0 = 0$) nur einen Punkt, nämlich $(0 : 0 : 1)$. Im Endlichen haben wir die Koordinaten $x_0 = 1, x_1 = x, x_2 = y$, im Unendlichen wählen wir die Koordinaten $x_0 = u, x_1 = v, x_2 = 1$.

1. $y^2 = x^3$: Die Hessesche ist dann $xy^2 = 0$ im Endlichen. Im Unendlichen ist die Kurve $u = v^3$, die Hessesche $v = 0$. Der einzige Wendepunkt ist in $(0 : 0 : 1)$, dort ist die Schnittmultiplizität von Kurve und Hessescher 1. In der Singularität schneiden sich die Kurve und die Hessesche mit Multiplizität 8.



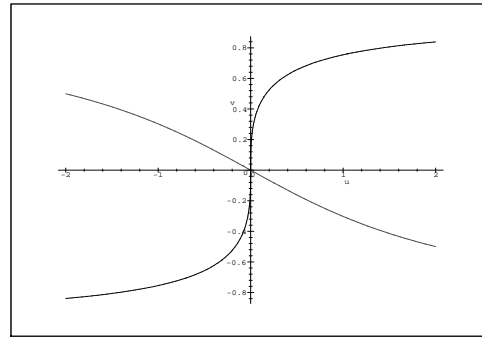
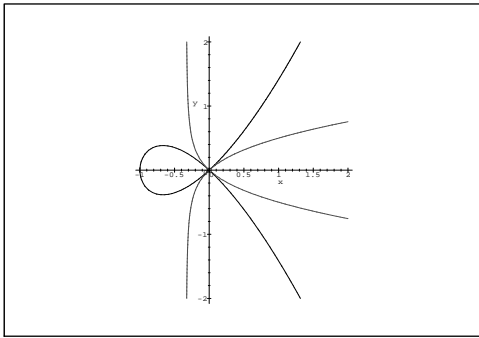
2. $y^2 = x^3 + x^2$: Die Hessesche ist $y^2 - x^2 + 3xy^2 = 0$. Im Unendlichen ist die Kurve $u = uv^2 + v^3$, die Hessesche $u + 3v - uv^2 = 0$. Ein Wendepunkt ist im Unendlichen (Schnittmultiplizität 1). Im Endlichen:

$$(y^2 - x^2 - x^3, y^2 - x^2 + 3xy^2) = (y^2 - x^2 - x^3, x(x^2 + 3y^2)).$$

In der Singularität ist die Schnittmultiplizität 6. Dann gibt es noch zwei (komplexe) Wendepunkte:

$$(x, y) = \left(-\frac{4}{3}, \pm \frac{4}{3\sqrt{3}}i\right)$$

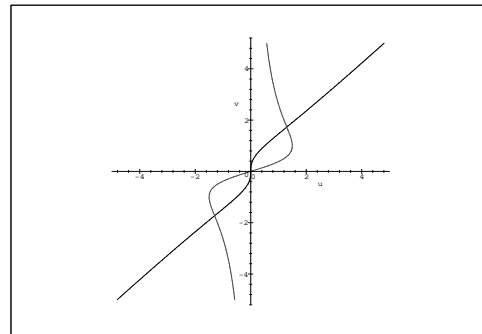
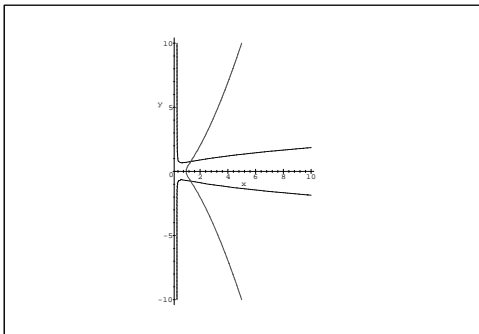
mit Schnittmultiplizität 1. Insgesamt haben wir 3 Wendepunkte, die auf einer Geraden liegen.



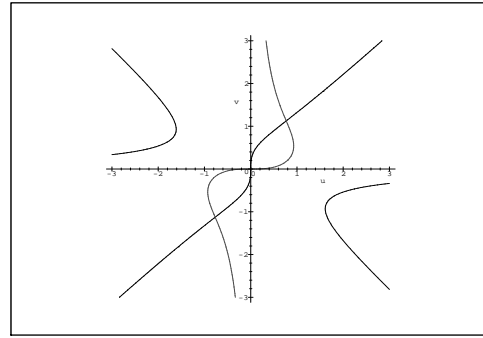
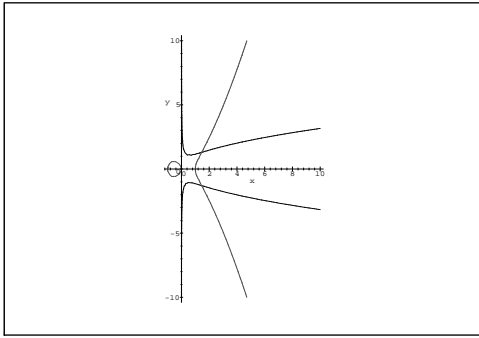
3. $y^2 = x^3 - x^2$: Die Hessesche Kurve ist $x^2 + y^2 = 3xy^2$, im Unendlichen ist die Kurve $u = v^3 - uv^2$, die Hessesche $u - 3v + uv^2 = 0$. Eigentlich passiert das gleiche wie beim letzten Beispiel. Die 2 endlichen Wendepunkte sind

$$(x, y) = \left(\frac{4}{3}, \pm \frac{4}{3\sqrt{3}}\right).$$

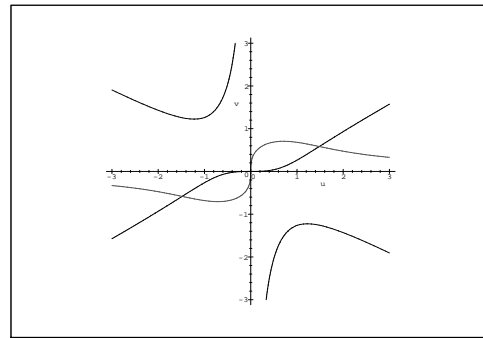
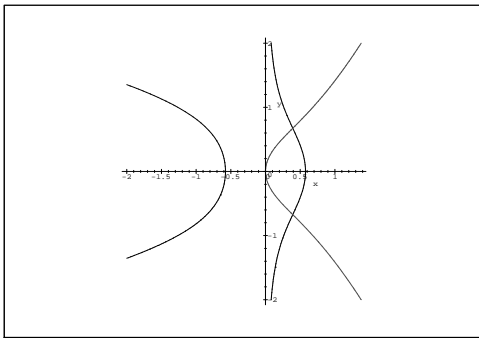
Die Singularität ist reell ein isolierter Punkt.



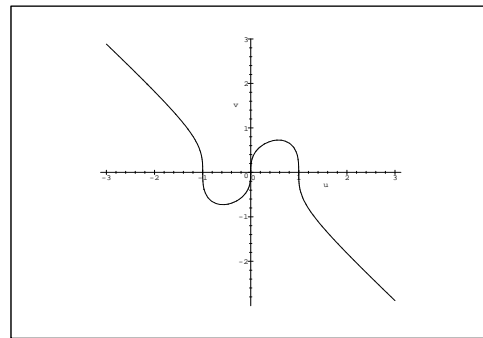
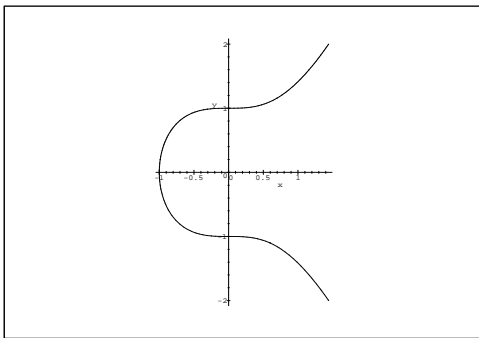
4. $y^2 = x^3 - x$: Die Hessesche ist $3xy^2 - 3x^2 = 1$, im Unendlichen die Kurve $u = v^3 - vu^2$, die Hessesche $3v = 3uv^2 + u^3$.



5. $y^2 = x^3 + x$: Die Hessesche ist $3x^2 + 3xy^2 = 1$, im Unendlichen die Kurve $u = v^3 + vu^2$, die Hessesche $3v + 3uv^2 - u^3 = 0$.



6. $y^2 = x^3 + 1$. Die Hessesche wird im Endlichen $x(y^2 + 3) = 0$. Im Unendlichen ist die Kurve $u = u^3 + v^3$, die Hessesche $v(3u^2 + 1) = 0$.



Wir wollen nun die Wendepunkte irreduzibler Kubiken noch etwas näher anschauen. O.E sei $(x, y) = (0, 0)$ ein Wendepunkt mit Wendetangente $y = 0$. Also

$$f = y + (a_1xy + a_2y^2) + (b_0x^3 + b_1x^2y + b_2xy^2 + b_3y^3).$$

Die Taylorreihenentwicklung der Hesseschen um $(0, 0)$ lautet:

$$h = -12b_0x + (a_1^2 - 4b_1)y + \dots$$

Da die Kurve irreduzibel sein sollte, ist $b_0 \neq 0$, also folgt:

LEMMA 30. Ist C eine irreduzible Kubik, H_C die Hessesche und P ein Wendepunkt (insbesondere nicht-singulär), dann gilt

$$i(P, C \cdot H_C) = 1.$$

Mit Bézout folgt sofort:

FOLGERUNG 19. Eine nichtsinguläre ebene Kubik hat genau 9 Wendepunkte.

Wir wollen nun eine Normalform für nichtsinguläre Kubiken herleiten:

- O.E. Sei $x_0 = 0$ Wendetangente und $(0 : 0 : 1)$ Wendepunkt. Dann muß gelten

$$f = a_0x_0^3 + a_1x_0^2x_1 + a_2x_0^2x_2 + a_3x_0x_1^2 + a_4x_0x_1x_2 + a_5x_0x_2^2 + a_6x_1^3$$

mit $a_6 \neq 0$.

- Wäre $a_5 = 0$, so wäre in $(0 : 0 : 1)$ eine Singularität, was nicht sein sollte. Also $a_5 \neq 0$. Also affin:

$$f = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^3.$$

- Durch quadratische Ergänzung können wir erreichen $a_2 = a_4 = 0$, also bleibt:

$$f = a_0 + a_1x + a_3x^2 + y^2 + a_6x^3.$$

- Durch kubische Ergänzung kann man jetzt erreichen, daß die Kurve die Gestalt hat

$$y^2 = x^3 + ax + b.$$

- Rechne nach, daß die Kurve genau dann nichtsingulär ist, wenn $4a^3 + 27b^2 \neq 0$ ist.

Damit haben wir bewiesen:

SATZ 60. Eine nichtsinguläre Kubik ist projektiv äquivalent zu einer Kurve

$$y^2 = x^3 + ax + b.$$

(Weierstraßsche Normalform) Genauer: Ist C eine nichtsinguläre Kubik, $P \in C$ ein Wendepunkt und T die Wendetangente, so gibt es einen Koordinatenwechsel, so daß dann gilt

$$C : y^2 = x^3 + ax + b, \quad P = (0 : 0 : 1), \quad T : x_0 = 0.$$

Bemerkung: Die Hessesche der Kurve $y^2 = x^3 + ax + b$ ist

$$3xy^2 + 3ax^2 + 9bx - a^2 = 0.$$

Eliminiert man y^2 , so sieht man: Die Wendepunkte im Endlichen ergeben sich daher aus den Gleichungen

$$y^2 = x^3 + ax + b \quad \text{und} \quad 3x^4 + 6ax^2 + 12bx - a^2 = 0.$$

Mit (x, y) ist also auch $(x, -y)$ ein Wendepunkt.

FOLGERUNG 20. Sei C eine nichtsinguläre Kubik. Sind P_1, P_2 zwei verschiedene Wendepunkte, G die Gerade durch P_1 und P_2 , so ist auch der dritte Schnittpunkt von G mit C ein Wendepunkt.

Beweis: Nach der vorigen Bemerkung können wir annehmen $P_1 = (0 : 0 : 1)$, $C : y^2 = x^3 + ax + b$, $P_2 = (x_w, y_w) \simeq (1 : x_w : y_w)$. Dann ist G gegeben durch $x_1 = x_w x_0$ bzw. affin $x = x_w$. Der dritte Schnittpunkt ist also $(x_w, -y_w)$. Aus Symmetriegründen ist dies natürlich auch ein Wendepunkt. Daraus folgt die Behauptung. ■

Bemerkung: Sei C eine nichtsinguläre Kubik und seien P_1, \dots, P_9 die 9 Wendepunkte. Seien G_1, \dots, G_n die Verbindungsgeraden. Auf jeder Geraden G_i liegen 3 Wendepunkte. Durch jeden Wendepunkt gehen also 4 Verbindungsgeraden. Also gibt es $\frac{9 \cdot 4}{3} = 12$ Verbindungsgeraden, d.h. $n = 12$. Dies ist eine berühmte Punkt-Geraden-Konfiguration.

Punkt-Geraden-Konfigurationen: Hat man in der Ebene m Punkte und n Geraden, so daß durch jeden Punkt p der Geraden gehen und auf jeder der Geraden q der Punkte liegen, so spricht man von einer (m_p, n_q) -Konfiguration. Die Wendepunkte einer nichtsingulären Kubik bilden also eine $(9_4, 12_3)$ -Konfiguration. Genauso bilden die Punkte und Geraden in $\mathbf{A}^2(\mathbf{F}_3)$ eine $(9_4, 12_3)$ -Konfiguration. (Übung.)

Beispiel: Wir betrachten die 9 Punkte (mit $\zeta = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, d.h. ζ ist primitive dritte Einheitswurzel)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -\zeta \\ 1 & 0 & -\zeta^2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -\zeta & 0 \\ 1 & -\zeta^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\zeta \\ 0 & 1 & -\zeta^2 \end{pmatrix}.$$

Man sieht sofort, daß jede Kubik

$$C_t : x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + tx_0x_1x_2 = 0$$

durch die Punkte geht. Nun rechnet man nach, daß

$$H(C_t) = C_{-\frac{t^3+108}{3t^2}}$$

gilt. Da sich C_t und $H(C_t)$ in den Wendepunkten von C_t schneiden, sind also obige 9 Punkte die Wendepunkte von C_t , sie bilden also eine $(9_4, 12_3)$ -Konfiguration. (Man kann auch zeigen, daß jede nichtsinguläre ebene Kubik zu einer der Kurven C_t projektiv äquivalent ist.)

Frage: Wieviele der 9 Wendepunkte einer Kubik mit reellen Koeffizienten können reell sein?

Sei C gegeben durch $y^2 = x^3 + ax + b$ mit $4a^3 + 27b^2 \neq 0$. Uns interessieren jetzt nur die Wendepunkte im Endlichen. Die Hessesche lautet $h = 3xy^2 + 3ax^2 + 9bx - a^2$.

1. Sei c eine reelle Nullstelle von $x^3 + ax + b$, d.h. die Kurvengleichung lautet

$$y^2 = (x - c)(x^2 + cx + d).$$

Nun ist

$$\begin{aligned} g(x) &= h - 3x(y^2 - x^3 - ax - b) = \\ &= 3(x - c)^4 + 12c(x - c)^3 + (12c^2 + 6d)(x - c)^2 - (2c^2 + d)^2. \end{aligned}$$

Da C nichtsingulär ist, gilt $2c^2 + d \neq 0$, also ist $g(c) < 0$. Für die Ableitung von g bezüglich x findet man:

$$g(x)' = 12(x - c)(x^2 + cx + d).$$

2. Sei jetzt c die größte reelle Nullstelle von $x^3 + ax + b$. Für $x > c$ ist also $g(x)$ streng monoton steigend, besitzt also wegen $g(c) < 0$ in diesem Bereich genau eine Nullstelle. Dies liefert zwei Wendepunkte.
3. Hat $x^3 + ax + b$ 3 reelle Nullstellen, $c_1 < c_2 < c_3$, so gilt nach dem Vorangegangenen $g(c_1) < 0$ und $g(c_2) < 0$. Außerdem gilt für $c_1 < x < c_2$ natürlich $g'(x) > 0$. Demzufolge hat $g(x)$ keine reelle Nullstelle im Intervall $c_1 \leq x \leq c_2$, also auch keinen Wendepunkt.

Dies ergibt einen Teil des folgenden Satzes. Den Rest zeige man als Übung.

SATZ 61. Sei C eine kubische Kurve gegeben durch $y^2 = x^3 + ax + b$ mit $a, b \in \mathbf{R}$. Dann gibt es folgende Fälle:

1. C ist nichtsingulär: dann gibt es genau 3 reelle Wendepunkte.
2. C hat eine Spitze als Singularität: diese ist reell sichtbar. Außerdem gibt es noch einen Wendepunkt, der reell sichtbar ist.
3. C hat einen Knoten, der reell sichtbar ist. Dann gibt es noch 3 Wendepunkte, von denen aber nur einer reell sichtbar ist.
4. C hat einen Knoten, wovon man aber reell nur einen isolierten Punkt sieht. Dann gibt es noch 3 Wendepunkte, die alle reell sichtbar sind.

Kubische Flächen im \mathbf{P}^3

Erinnerung: an die quadratischen Flächen im \mathbf{P}^3 . Quadriken im \mathbf{P}^3 werden beschrieben durch eine Gleichung

$$b_0 z_0^2 + b_1 z_0 z_1 + \cdots + b_8 z_2 z_3 + b_9 z_3^2 = 0,$$

werden also durch $(b_0 : \cdots : b_9) \in \mathbf{P}^9$ parametrisiert.

Bis auf projektive Äquivalenz gab es aber nur 4 Typen:

1. Q nichtsingulär, irreduzibel: es gibt zwei Familien von Geraden darauf. Beispiel: $z_0 z_3 = z_1 z_2$.
2. Q irreduzibel, singulär: dann ist Q ein quadratischer Kegel, z.B. $z_0 z_2 = z_1^2$. Es gibt wieder unendlich viele Geraden.
3. Q zerfällt in 2 verschiedene Ebenen.
4. Q ist eine Doppelebene.

Wir interessieren uns nun für kubische Flächen¹ im \mathbf{P}^3 , d.h. Flächen, die durch ein homogenes Polynom in z_0, z_1, z_2, z_3 vom Grad 3 definiert werden:

$$f = c_0 z_0^3 + c_1 z_0^2 z_1 + \cdots + c_{18} z_2 z_3^2 + c_{19} z_3^3.$$

Also entspricht eine Kubik einem Punkt $(c_0 : \cdots : c_{19})$ in einem \mathbf{P}^{19} . (Sei $\text{char}(k) = 0$.) Welche Geraden gibt es auf einer kubischen Fläche?

Beispiel Sei F gegeben durch die Gleichung $x_0^3 = x_1 x_2 x_3$. Ist $f = x_0^3 - x_1 x_2 x_3$, so ist

$$f_0 = 3x_0^2, \quad f_1 = -x_2 x_3, \quad f_2 = -x_1 x_3, \quad f_3 = -x_1 x_2,$$

also sind genau die Punkte

$$(0 : 1 : 0 : 0), \quad (0 : 0 : 1 : 0), \quad (0 : 0 : 0 : 1)$$

singulär.

Der Schnitt von F mit $x_0 = 0$ besteht aus 3 Geraden: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$.

Gibt es weitere Geraden?

Sei G eine Gerade auf F parametrisiert durch $z_i = \ell_0(u, v) = a_i u + b_i v$. Dann gilt also

$$\ell_0^3 = \ell_1 \ell_2 \ell_3.$$

Ist $\ell_0 \neq 0$, so sind ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 konstante Vielfache von ℓ_0 , was aber nicht sein kann, da hierdurch nur ein Punkt beschrieben würde. Also ist $\ell_0 = 0$ und wir sind wieder in dem bereits diskutierten Fall.

Ergebnis: Auf der Fläche F gibt es genau 3 Geraden. Sie liegen in einer Ebene.

Betrachtet man die Fläche affin, so hat man: $xyz = 1$. Also läßt sich die Fläche parametrisieren: $z = \frac{1}{xy}$. Oder wieder projektiv:

$$(1 : x : y : z) = (1 : x : y : \frac{1}{xy}) = (xy : x^2 y : xy^2 : 1) = (x_0 x_1 x_2 : x_1^2 x_2 : x_1 x_2^2 : x_0^3),$$

also entsteht F aus einer rationalen Abbildung von \mathbf{P}^2 in \mathbf{P}^3 mit kubischen Polynomen.

Ist eine kubische Fläche F allgemein gegeben, so ist es nicht so einfach, die auf F liegenden Geraden zu finden. Wir werden jetzt eine Konstruktionsmethode für kubische Flächen angeben, bei der das einfach ist.

¹Dieses Kapitel wurde nicht mehr in der Vorlesung behandelt.

Idee: Wir wollen eine rationale Abbildung von \mathbf{P}^2 in \mathbf{P}^3 konstruieren durch

$$\phi(x_0 : x_1 : x_2) = (f_0(x_0, x_1, x_2) : f_1(x_0, x_1, x_2) : f_2(x_0, x_1, x_2) : f_3(x_0, x_1, x_2)),$$

wo die $f_i(x_0, x_1, x_2)$ homogene Polynome sind. Die homogenen Polynome vom Grad 3 in x_0, x_1, x_2 bilden einen 10-dimensionalen Vektorraum. Da wir 4 Polynome haben wollen, wählen wir 6 Punkte P_1, \dots, P_6 Punkte im \mathbf{P}^2 . Sei dann

$$V = \{f \text{ kubisches Polynom, } f(P_1) = \dots = f(P_6) = 0\}.$$

Hat V die Dimension 4, so können wir eine Basis f_0, f_1, f_2, f_3 von V wählen und erhalten so eine rationale Abbildung $\phi : \mathbf{P}^2 \rightarrow \mathbf{P}^3$, indem wir setzen

$$\phi(x_0 : x_1 : x_2) = (f_0(x_0, x_1, x_2) : \dots : f_3(x_0, x_1, x_2)).$$

ϕ ist zunächst nicht definiert in den Punkten P_1, \dots, P_6 . Wie früher können wir hoffen, daß ϕ definiert ist, wenn wir \mathbf{P}^2 in den Punkten P_1, \dots, P_6 aufblasen.

Hoffnung: Die Geometrie auf der Fläche im \mathbf{P}^3 läßt sich wiederfinden in der Geometrie auf dem \mathbf{P}^2 .

Konstruktion:

Voraussetzung: Seien P_1, \dots, P_6 Punkte in \mathbf{P}^2 mit der Eigenschaft, daß keine 3 der Punkte auf einer Geraden liegen, und daß die 6 Punkte nicht auf einem Kegelschnitt liegen.

Sei L_{ij} die Verbindungsgerade durch P_i und P_j (15 Stück) und ℓ_{ij} ein zugehöriges lineares Polynom. ($i < j$)

Durch $\{P_1, \dots, P_6\} \setminus \{P_i\}$ geht genau eine Quadrik Q_i , definiert durch ein quadratisches Polynom q_i . (Andernfalls gäbe es eine Quadrik durch alle 6 Punkte, im Widerspruch zur Voraussetzung.) Weiter folgt daraus sofort, daß alle Q_i irreduzibel sind.

Sei jetzt

$$V = \{f \text{ homogenes kubisches Polynom mit } f(P_1) = \dots = f(P_6) = 0\}.$$

V hat mindestens Dimension 4.

Behauptung: $\dim V = 4$.

Beweis: Wir nehmen an, daß $\dim V \geq 5$ ist. Wähle weitere Punkte R_1, R_2, R_3 , die zusammen mit P_1 auf einer Geraden L liegen. Dann gibt es viele Kubiken, die durch P_1, \dots, P_6 und R_1, R_2, R_3 gehen. Sei C eine solche. Dann liegen P_1, R_1, R_2, R_3 im Durchschnitt $C \cap L$, also ist L eine Komponente von C und damit $C = L + Q_1$. Damit ist C eindeutig bestimmt, im Widerspruch zu obiger Aussage. ■

Wir wählen jetzt eine Basis f_0, f_1, f_2, f_3 von V . Wir erhalten eine rationale Abbildung $\phi : \mathbf{P}^2 \rightarrow \mathbf{P}^3$ gegeben durch

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (f_0(x_0, x_1, x_2) : \dots : f_3(x_0, x_1, x_2)).$$

In der gemeinsamen Nullstellenmenge von f_0, \dots, f_3 ist ϕ zunächst nicht definiert.

Behauptung: $Z(f_0, f_1, f_2, f_3) = \{P_1, \dots, P_6\}$.

Beweis: Daß P_1, \dots, P_6 in $\{f_0 = \dots = f_3 = 0\}$ liegen, ist klar. Sei umgekehrt $P \in \{f_0 = \dots = f_3 = 0\}$ und $P \neq P_i$ für alle i .

- Falls $P \notin Q_i$ für ein i : Wähle eine Gerade L durch P_i , die nicht durch P geht. Dann ist $Q_i + L$ eine Kubik, die durch P_1, \dots, P_6 geht, also zu V gehört, aber P nicht enthält.
- Falls P in allen Q_i enthalten ist: Q_1 schneidet Q_2 in den 4 Punkten P_3, P_4, P_5, P_6 , also muß P einer dieser Punkt sein. (Da Q_1 und Q_2 irreduzibel sind, können sie keine gemeinsame Komponente besitzen.) ■

Also ist ϕ in allen Punkten $P \neq P_1, \dots, P_6$ definiert. Was passiert in P_1, \dots, P_6 ?

Sei $\pi : X \rightarrow \mathbf{P}^2$ die Aufblasung von \mathbf{P}^2 in den Punkten P_1, \dots, P_6 . Die Urbilder $E_i = \pi^{-1}(P_i)$ sind dann zu \mathbf{P}^1 isomorphe Kurven. Wir untersuchen, ob sich ϕ auf E_i definieren läßt.

- Da dies eine lokale Betrachtung ist, können wir annehmen, daß wir \mathbf{A}^2 im Punkt $P = (0, 0)$ aufblasen. Die Aufblasung ist dann

$$\tilde{\mathbf{A}}^2 = \{((x, y), (u : v)) \in \mathbf{A}^2 \times \mathbf{P}^1 : xv = yu\}.$$

Die f_i 's sehen um P wie folgt aus:

$$f_i(x, y) = a_i x + b_i y + g_i(x, y) + h_i(x, y),$$

wo g_i homogen quadratisch und h_i homogen kubisch ist. Die Linearform $a_i x + b_i y$ ist also die Tangente von f_i in P .

- Für $v \neq 0$ ist $y = \frac{u}{v}x$ und man erhält durch Einsetzen

$$f_i(x, y) = \frac{x}{v}[a_i v + b_i u + \frac{x}{v}g_i(v, u) + (\frac{x}{v})^2 h_i(v, u)],$$

und analog für $u \neq 0$: $x = \frac{v}{u}y$ und damit

$$f_i(x, y) = \frac{y}{u}[a_i v + b_i u + \frac{y}{u}g_i(v, u) + (\frac{y}{u})^2 h_i(v, u)].$$

Auf E , d.h. für $(x, y) = (0, 0)$ ist dann ϕ gegeben durch

$$(f_0 : \cdots : f_3) = (a_0 v + b_0 u : \cdots : a_3 v + b_3 u).$$

Die Linearformen $a_i u + b_i v$ sind aber die Tangenten der f_i 's. Davon gibt es aber genug, denn in V liegen Kubiken der Form $xq(x, y)$ und $yq(x, y)$, wo $q(0, 0) \neq 0$ ist. Also ist ϕ auf E definiert.

- Man sieht dann sofort noch: ϕ bildet E_i auf die Gerade ab, auf der die Punkte $(a_0 : \cdots : a_3)$ und $(b_0 : \cdots : b_3)$ liegen.

Wir erhalten also einen Morphismus $\phi : X \rightarrow \mathbf{P}^3$. Dann ist $F = \phi(X)$ eine abgeschlossene Teilmenge des \mathbf{P}^3 .

Behauptung: F ist eine irreduzible Fläche.

Beweis: Da X irreduzibel ist, ist es auch F , und da F die Geraden $\phi(E_i)$ enthält, muß F eine Fläche sein oder eine Gerade. Angenommen, F wäre in einer Hyperebene enthalten, d.h. $F \subseteq \{a_0 z_0 + \cdots + a_3 z_3 = 0\}$. Dann gilt natürlich auch

$$a_0 f_0 + \cdots + a_3 f_3 = 0,$$

was aber der linearen Unabhängigkeit der f_i 's widerspricht. Also liegt F nicht in einer Hyperebene, kann insbesondere keine Gerade sein, muß also eine Fläche sein. ■

Hyperebenenschnitte: Eine Hyperebene im \mathbf{P}^3 ist gegeben durch eine Gleichung $a_0 z_0 + \cdots + a_3 z_3 = 0$. Den Schnitt mit F erhält man, indem man $z_i = f_i$ einsetzt: $a_0 f_0 + \cdots + a_3 f_3 = 0$. Nun ist aber $a_0 f_0 + \cdots + a_3 f_3 \in V$. Da die f_i 's linear unabhängig sind, sind die Koeffizienten a_i bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Es gibt also eine Bijektion zwischen den Hyperebenen(schnitten) und den kubischen Kurven durch P_1, \dots, P_6 .

Behauptung: ϕ ist injektiv.

Beweis: Seien $P, Q \in X$ zwei verschiedene Punkte. Wir wollen zeigen, daß $\phi(P) \neq \phi(Q)$ gilt. Es genügt dann zu zeigen, daß es eine Hyperebene H gibt mit $\phi(P) \in H$, aber $\phi(Q) \notin H$. Nach unserer vorangegangenen Interpretation heißt das: wir finden eine Kurve $C = \{f = 0\}$ mit $f \in V$ und $P \in C$, $Q \notin C$.

Wir unterscheiden ein paar Fälle:

- $P, Q \notin E_i$ für alle $i = 1, \dots, 6$, d.h. P und Q sind Punkte in \mathbf{P}^2 , verschieden von P_1, \dots, P_6 . Der Punkt Q kann höchstens auf einem Q_i liegen. O.E. $Q \notin Q_2, \dots, Q_6$. Sei L die Verbindungsgerade von P und Q . Höchstens 2 der P_i 's liegen darauf. O.E. $P_2 \notin L$. Sei jetzt M die Verbindungsgerade von P und P_2 . Dann liegt Q nicht auf M und auch nicht auf $Q_2 + M$. Aber $P \in Q_2 + M$. Damit haben wir die gewünschte Kubik.
- $Q \in E_1$, aber $P \notin E_1, \dots, E_6$. Der Punkt Q kann höchstens auf einem Kegelschnitt Q_i liegen, o.E. $Q \notin Q_3, \dots, Q_6$. Sei L_i die Verbindungsgerade von P und P_i für $i = 3, \dots, 6$. Die Kubik $Q_i + L_i$ liegt dann in $|V|$ für $i = 3, 4, 5, 6$. Sie enthält den Punkt P . Annahme $Q \in L_i$. Dann liegt P_i auf der Verbindungsgeraden von P_1 und P . Dies kann aber nur für ein P_i gelten. Also gibt es jedenfalls Kubiken mit der gewünschten Eigenschaft.

- $P \in E_1, Q \in E_2$.
 - Falls ein i existiert mit $P \in Q_i$ und $Q \notin Q_i$ oder umgekehrt: Lege eine beliebige Gerade durch P_i .
 - Falls ein i existiert mit $P, Q \in Q_i$. Dann ist $Q_1 \neq Q_i$. Sei L die Gerade durch P_1 . Dann tut es $Q_1 + L$.
 - Falls für alle i gilt: $P, Q \notin Q_i$. Sei L die Gerade durch P . Ist $Q \notin L$, so wähle $Q_1 + L$. Jetzt bleibt also der Fall L_{12} enthält P und Q . Die Kubiken, die in P_1 und P_2 zu P bzw. Q gehörige Tangenten haben, spalten L_{12} ab. Es bleibt eine 1-dimensionale Familie übrig. Die Kubiken, die durch P gehen, bilden aber mindestens eine 2-dimensionale Familie. Also gibt es darunter sicher welche, die nicht durch Q gehen.
- $P, Q \in E_1$. Lokal haben wir $(ax + by)q(x, y) \in V$, woraus schnell die Behauptung folgt. ■

Man kann noch mehr zeigen:

Behauptung: $\phi : X \rightarrow F$ ist ein Isomorphismus, insbesondere ist F nichtsingulär.

Beweis: ohne.

Behauptung: F hat Grad 3.

Beweis: Wir nehmen eine (beliebige) Gerade in \mathbf{P}^3 , die aber keine der Geraden $\phi(E_i)$ treffen sollte, und schneiden sie mit F . Die Anzahl der Schnittpunkte (i.a.) wird den Grad der Fläche geben. Sei die Gerade gegeben durch

$$a_0z_0 + \cdots + a_3z_3 = b_0z_0 + \cdots + b_3z_3 = 0.$$

Wir setzen für z_i einfach f_i ein und erhalten:

$$a_0f_0(x_0, x_1, x_2) + \cdots + a_3f_3(x_0, x_1, x_2) = 0, b_0f_0(x_0, x_1, x_2) + \cdots + b_3f_3(x_0, x_1, x_2) = 0.$$

Dies sind zwei Kubiken aus unserem Vektorraum V . In \mathbf{P}^2 schneiden sie sich in 9 Punkten, aber davon müssen für P_1, \dots, P_6 abziehen, wenn sie in diesen Punkten verschiedene Tangenten haben. Also bleiben drei Schnittpunkte. D.h. F hat Grad 3, ist also eine kubische Fläche. ■

Geraden auf $F \subseteq \mathbf{P}^3$

Welche Geraden gibt es auf F ?

- Die 6 Geraden $\phi(E_i)$ kennen wir bereits.
- Die 15 Verbindungsgeraden L_{ij} liefern Geraden $\phi(L_{ij})$ auf F .
Beweis: O.E. $i = 1, j = 2$. Dann gibt es durch P_3, P_4, P_5, P_6 zwei linear unabhängige Quadriken $g_1 = 0$ und $g_2 = 0$. Offensichtlich gilt dann $\ell_{12}g_1, \ell_{12}g_2 \in V$, also gibt es a_i und b_i mit

$$\ell_{12}g_1 = a_0f_0 + \cdots + a_3f_3, \quad \ell_{12}g_2 = b_0 + \cdots + b_3f_3.$$

$\phi(L_{12})$ liegt dann im Durchschnitt der beiden (verschiedenen) Hyperebenen $a_0z_0 + \cdots + a_3z_3 = 0$ und $b_0z_0 + \cdots + b_3z_3 = 0$, ist also eine Gerade.

- Die 6 Quadriken Q_i liefern Geraden $\phi(Q_i)$ auf F . *Beweis:* O.E. $i = 1$. Wähle zwei verschiedene Geraden $h_1 = 0$ und $h_2 = 0$ durch P_1 . Dann ist $h_1q_1, h_2q_1 \in V$, also gibt es a_i, b_i mit

$$h_1q_1 = a_0f_0 + \cdots + a_3f_3, \quad h_2q_1 = b_0 + \cdots + b_3f_3.$$

$\phi(Q_1)$ liegt dann im Durchschnitt der beiden (verschiedenen) Hyperebenen $a_0z_0 + \cdots + a_3z_3 = 0$ und $b_0z_0 + \cdots + b_3z_3 = 0$, ist also eine Gerade.

Gibt es noch mehr Geraden auf F ? Sei G eine Gerade auf F , o.E. $G \neq \phi(E_i)$. Sei $C = \phi^{-1}(G)$. O.E. ist C irreduzibel. Wir nehmen für die Überlegung an, daß $G = \{z_0 = z_1 = 0\}$ ist. Dann gilt

$$C \subseteq \{f_0 = f_1 = 0\}.$$

Wird C beschrieben durch das Polynom g , so teilt also g die Polynome f_0 und f_1 .

- Falls g linear ist, so ist $f_0 = gh_0, f_1 = gh_1$ und h_0 und h_1 sind quadratisch. Würde $g = 0$ höchstens durch einen der Punkte P_i gehen, so würden h_0 und h_1 durch mindestens 5 dieser Punkte gehen. Sie wären dann linear abhängig, was nicht sein kann. Also muß $g = 0$ durch 2 der Punkte P_i gehen, ist also eine der Geraden L_{ij} .

- Falls g quadratisch ist, so ist $f_0 = gh_0$, $f_1 = gh_1$ und h_0 und h_1 sind linear. Würde $g = 0$ durch höchstens 4 der Punkte P_i gehen, so müßten h_0 und h_1 durch die anderen Punkte gehen, wären also linear abhängig, was nicht sein kann. Daher muß g durch 5 Punkte gehen, ist also eine der Quadriken Q_i .

Also gibt es keine weiteren Geraden auf F .

Ergebnis: Auf der Fläche gibt es genau 27 Geraden.

Wie das Konstruktionsverfahren ganz praktisch aussieht, kann man an den Beispielen im Anhang sehen.

Nun kann man umgekehrt fragen, ob jede nichtsinguläre kubische Fläche im \mathbf{P}^3 durch Aufblasen von 6 Punkten entsteht. In der Tat gilt:

SATZ 62. *Jede nichtsinguläre kubische Fläche im \mathbf{P}^3 entsteht durch Aufblasen von 6 Punkten im \mathbf{P}^2 wie zuvor konstruiert. Insbesondere besitzt jede nichtsinguläre kubische Fläche im \mathbf{P}^3 genau 27 Geraden.*

Wir wollen dies nicht beweisen, aber eine heuristische Überlegung anstellen, die die Vernünftigkeit der Behauptung zeigt. Wir zählen die Parameter.

- Die Wahl von 6 Punkten im \mathbf{P}^2 liefert 12 Parameter.
- Im Vektorraum V muß man dann eine Basis auswählen. Ist f_0, \dots, f_3 eine, so sind die anderen $g_i = \sum a_{ij}f_j$, die Matrix a_{ij} interessiert nur bis auf einen Skalar, also hat man weitere 15 Parameter. Damit erhält man jetzt eine kubische Fläche.
- Macht man im \mathbf{P}^2 Koordinatenwechsel, so ändert sich die Flächengleichung natürlich nicht, d.h. man muß 8 Parameter abziehen.
- Es bleiben also 19 Parameter übrig, das ist aber genau die Dimension der Kubiken im \mathbf{P}^3 .

Bemerkungen zur Konfiguration der 27 Geraden: (ohne Beweis)

- Sei M die Menge der 27 Geraden. Die Maximalzahl paarweise disjunkter Geraden aus M beträgt 6. Zum Beispiel sind die 6 Geraden $\phi(E_1), \dots, \phi(E_6)$ paarweise disjunkt.
- Sei $\mathfrak{m} = \{N \subseteq M : N \text{ besteht aus 6 disjunkten Geraden}\}$.
- Man kann (kombinatorisch) zeigen: $\#\mathfrak{m} = 27 \cdot 16 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 2 = 51840$.
- Jede Auswahl aus \mathfrak{m} führt zu einem Automorphismus der Konfiguration, der sich zu einem Automorphismus der Fläche fortsetzt.
- Die Gruppe der projektiven Transformationen, die F in sich überführen, hat also Ordnung 51840.

Galoistheoretische Deutung: Daß die Automorphismengruppe der 27 Geraden Ordnung 51840 hat, läßt sich auch galoistheoretisch deuten.

- Sei $f = c_0z_0^3 + \dots + c_{19}z_3^3$ allgemein vorgegeben mit rationalen Koeffizienten.
- Um die Geraden zu finden, kann man ansetzen

$$z_3 = az_1 + bz_0, \quad z_2 = cz_1 + dz_0.$$

Setzt man dies in f ein, so erhält man:

$$f(z_0, z_1, cz_1 + dz_0, az_1 + bz_0) = g_0(a, b, c, d)z_0^3 + g_1(a, b, c, d)z_0^2z_1 + g_2(a, b, c, d)z_0z_1^2 + g_3(a, b, c, d)z_1^3.$$

Soll die Gerade auf $f = 0$ liegen, muß das Polynom identisch in z_0, z_1 verschwinden, d.h. man erhält für die Bestimmung der Geraden die Gleichungen

$$g_0(a, b, c, d) = g_1(a, b, c, d) = g_2(a, b, c, d) = g_3(a, b, c, d) = 0.$$

- Ist die Situation allgemein, so wird es 27 (komplexe) Lösungen geben. Dann kann man die Bedingungsgleichungen umformen und erhält Gleichungen:

$$H(a) = 0, b = h_b(a), c = h_c(a), d = h_d(a),$$

wo H, h_b, h_c, h_d Polynome mit rationalen Koeffizienten sind und H Grad 27 hat. Die Galoisgruppe von H wird dann Ordnung 51840 haben.

Wir wollen noch ein paar Beispiele singulärer kubischer Flächen anschauen und die Geraden darauf bestimmen.

Beispiel: $f = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3$ liefert einen Kegel, die Fläche besitzt also unendlich viele Geraden.

Beispiel: Die Fläche $F = \{z_0^2 z_3 + z_0 z_2^2 + z_1^3 = 0\}$ hat die einzige Singularität $(0 : 0 : 0 : 1)$ und besitzt genau eine Gerade, nämlich $\{z_0 = z_1 = 0\}$.

Beispiel: Wir betrachten die durch das Polynom

$$f = z_0 z_1 z_2 + z_0 z_1 z_3 + z_0 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_3$$

definierte Fläche. Man findet die folgenden Geraden:

- $z_3 = az_1 + bz_0, z_2 = cz_1 + dz_0: (a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0), (0, -1, -1, 0), (-1, 0, 0, -1)$.
- $z_3 = az_2 + bz_0, z_1 = cz_0: (a, b, c) = (0, 0, 0), (-1, 0, -1)$.
- $z_3 = az_2 + bz_1, z_0 = 0: (a, b) = (0, 0)$.
- $z_2 = az_0, z_1 = bz_0: (a, b) = (0, 0)$.
- $z_2 = az_1, z_0 = 0: a = 0$.
- $z_1 = 0, z_0 = 0$: liegt auf der Fläche.

Also gibt es 9 Geraden auf der Fläche.

Zu Beginn dieses Paragraphen hatten wir ein Beispiel mit 3 Geraden kennengelernt.

Zum Schluß wollen wir ohne Beweis noch die Möglichkeiten für die Anzahlen angeben. (J. W. Bruce, C. T. C. Wall, On the classification of cubic surfaces, J. London Math. Soc. (2) **19** (1979), 245-256)

SATZ 63. Für eine irreduzible kubische Fläche $F \subseteq \mathbf{P}^3$ bezeichne $\ell(F)$ die Anzahl der Geraden auf F . Dann gilt

$$\ell(F) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 21, 27, \infty\}$$

und alle Möglichkeiten werden realisiert. Außerdem gilt $\ell(F) = 27$ genau dann, wenn F nichtsingulär ist.

Beispiel einer nichtsingulären kubischen Fläche im \mathbf{P}^3

Gegeben seien die folgenden Punkte im \mathbf{P}^2 :

$$P_1 = (1 : 0 : 0), P_2 = (0 : 1 : 0), P_3 = (0 : 0 : 1), P_4 = (1 : 1 : 1), P_5 = (1 : 2 : 3), P_6 = (1 : 3 : 4).$$

Eine Basis des Vektorraums der kubischen Polynome $f = a_0 x_0^3 + a_1 x_0^2 x_1 + \dots + a_9 x_2^3$, die in P_1, \dots, P_6 verschwinden, bilden zum Beispiel:

$$\begin{aligned} f_0 &= 7x_0^2 x_1 - 6x_0^2 x_2 - 5x_0 x_1^2 + 4x_0 x_1 x_2 \\ f_1 &= 9x_0^2 x_1 - 8x_0^2 x_2 - 3x_0 x_1^2 + 2x_0 x_2^2 \\ f_2 &= 13x_0^2 x_1 + 6x_0^2 x_2 - 23x_0 x_1^2 + 4x_1^2 x_2 \\ f_3 &= 31x_0^2 x_1 - 6x_0^2 x_2 - 29x_0 x_1^2 + 4x_1 x_2^2. \end{aligned}$$

Damit erhält man eine rationale Abbildung

$$\phi_0 : \mathbf{P}^2 \rightarrow \mathbf{P}^3, \quad (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (f_0 : f_1 : f_2 : f_3).$$

Bläst man \mathbf{P}^2 in den 6 Punkten P_1, \dots, P_6 auf: $\pi : X \rightarrow \mathbf{P}^2$, so induziert ϕ_0 einen Morphismus $\phi : X \rightarrow \mathbf{P}^3$. Das Bild $F = \phi(X)$ ist eine nichtsinguläre kubische Fläche, die folgender Gleichung genügt:

$$35z_0^3 - 23z_0^2 z_1 + 18z_0^2 z_2 - 16z_0^2 z_3 + 12z_0 z_1^2 - 14z_0 z_1 z_2 - 3z_0 z_2^2 + 2z_0 z_3^2 + 12z_1^2 z_2 + 5z_1 z_2^2 - 4z_1 z_2 z_3 = 0.$$

Die Geraden $\phi(L_{ij})$

Ist L_{ij} die Verbindungsgerade von P_i und P_j ($i < j$), so ist $\phi(L_{ij})$ eine Gerade auf $F \subseteq \mathbf{P}^3$. Man findet:

$$\begin{array}{ll}
L_{12} = \{x_2 = 0\} & \phi(L_{12}) = \{z_3 = -2z_1 + 7z_0, z_2 = -4z_1 + 7z_0\} \\
L_{13} = \{x_1 = 0\} & \phi(L_{13}) = \{z_3 = z_0, z_2 = -z_0\} \\
L_{14} = \{x_1 = x_2\} & \phi(L_{14}) = \{z_3 = z_2 + 6z_0, z_2 = -z_0\} \\
L_{15} = \{3x_1 = 2x_2\} & \phi(L_{15}) = \{z_3 = \frac{3}{2}z_2 + \frac{11}{2}z_0, z_1 = \frac{3}{2}z_0\} \\
L_{16} = \{4x_1 = 3x_2\} & \phi(L_{16}) = \{z_3 = \frac{4}{3}z_2 + 5z_0, z_1 = \frac{5}{3}z_0\} \\
L_{23} = \{x_0 = 0\} & \phi(L_{23}) = \{z_1 = 0, z_0 = 0\} \\
L_{24} = \{x_0 = x_2\} & \phi(L_{24}) = \{z_3 = -12z_1 + 13z_0, z_2 = -11z_1 + 11z_0\} \\
L_{25} = \{3x_0 = x_2\} & \phi(L_{25}) = \{z_3 = 18z_1 - 5z_0, z_2 = 12z_1 - 5z_0\} \\
L_{26} = \{4x_0 = x_2\} & \phi(L_{26}) = \{z_3 = 8z_1 + z_0, z_2 = 4z_1 - z_0\} \\
L_{34} = \{x_0 = x_1\} & \phi(L_{34}) = \{z_3 = 2z_1 - 5z_0, z_2 = -5z_0\} \\
L_{35} = \{2x_0 = x_1\} & \phi(L_{35}) = \{z_3 = 4z_1 + 13z_0, z_2 = 11z_0\} \\
L_{36} = \{3x_0 = x_1\} & \phi(L_{36}) = \{z_3 = 6z_1 + 7z_0, z_2 = 7z_0\} \\
L_{45} = \{x_0 - 2x_1 + x_2 = 0\} & \phi(L_{45}) = \{z_3 = 2z_2 + 3z_0, z_1 = \frac{5}{3}z_0\} \\
L_{46} = \{x_0 - 3x_1 + 2x_2 = 0\} & \phi(L_{46}) = \{z_3 = \frac{3}{2}z_2 + \frac{5}{2}z_0, z_1 = \frac{3}{2}z_0\} \\
L_{56} = \{x_0 + x_1 - x_2 = 0\} & \phi(L_{56}) = \{z_3 = z_2 + 2z_0, z_1 = z_0\}.
\end{array}$$

Die Geraden $\phi(Q_i)$

Bezeichnet Q_i den Kegelschnitt durch die Punkte $\{P_1, \dots, P_6\} \setminus \{P_i\}$, so ist das Bild $\phi(Q_i)$ eine Gerade auf $F \subseteq \mathbf{P}^3$. Man erhält:

$$\begin{array}{ll}
Q_1 = \{5x_0^2 - 7x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2 = 0\} & \phi(Q_1) = \{z_0 + z_2 = -7z_0 + 2z_1 + z_3 = 0\} \\
Q_2 = \{7x_0x_1 - 6x_0x_2 - 5x_1^2 + 4x_1x_2 = 0\} & \phi(Q_2) = \{z_0 = -12z_1 - 5z_2 + 4z_3 = 0\} \\
Q_3 = \{12x_0x_1 - 11x_0x_2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 = 0\} & \phi(Q_3) = \{3z_0 - 5z_1 = -55z_1 - 18z_2 + 15z_3 = 0\} \\
Q_4 = \{12x_0x_1 - 6x_0x_2 - x_1x_2 = 0\} & \phi(Q_4) = \{5z_0 + z_2 = -13z_0 + 12z_1 + z_3 = 0\} \\
Q_5 = \{8x_0x_1 - 9x_0x_2 + x_1x_2 = 0\} & \phi(Q_5) = \{-11z_0 + z_2 = 5z_0 - 18z_1 + z_3 = 0\} \\
Q_6 = \{3x_0x_1 - 4x_0x_2 + x_1x_2 = 0\} & \phi(Q_6) = \{-7z_0 + z_2 = -z_0 - 8z_1 + z_3 = 0\}.
\end{array}$$

Die Geraden $\phi(E_i)$

Ist $E_i = \pi^{-1}(P_i)$, so ist $\phi(E_i)$ eine Gerade auf $F \subseteq \mathbf{P}^3$. Um diese zu bestimmen braucht man die Taylorreihenentwicklungen der f_i 's in den Punkten $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$:

$$\begin{array}{l}
P_1: f_0 = 7x - 6y + \dots, f_1 = 9x - 8y + \dots, f_2 = 13x + 6y + \dots, f_3 = 31x - 6y + \dots \\
P_2: f_0 = -5u + \dots, f_1 = -3u + \dots, f_2 = -23u + 4v + \dots, f_3 = -29u + 4v + \dots \\
P_3: f_0 = 0 + \dots, f_1 = 2u + \dots, f_2 = 0 + \dots, f_3 = 4v + \dots \\
P_4: f_0 = (x-1) - 2(y-1) + \dots, f_1 = 3(x-1) - 4(y-1) + \dots, \\
f_2 = -25(x-1) + 10(y-1) + \dots, f_3 = -23(x-1) + 2(y-1) + \dots \\
P_5: f_0 = -(x-2) + 2(y-3) + \dots, f_1 = -3(x-2) + 4(y-3) + \dots, \\
f_2 = -31(x-2) + 22(y-3) + \dots, f_3 = -49(x-2) + 42(y-3) + \dots \\
P_6: f_0 = -7(x-3) + 6(y-4) + \dots, f_1 = -9(x-3) + 8(y-4) + \dots, \\
f_2 = -29(x-3) + 42(y-4) + \dots, f_3 = -79(x-3) + 90(y-4) + \dots
\end{array}$$

wobei für P_1, P_4, P_5 und P_6 die affinen Koordinaten $x_0 = 1, x_1 = x, x_2 = y$, für P_2 die affinen Koordinaten $x_0 = u, x_1 = 1, x_2 = v$ und für P_3 die affinen Koordinaten $x_0 = u, x_1 = v, x_2 = 1$ gewählt wurden. Dann erhält man:

$$\begin{array}{ll}
\phi(E_1) = \{z_3 = -72z_1 + 97z_0, z_2 = -60z_1 + 79z_0\} \\
\phi(E_2) = \{z_3 = -22z_1 + 43z_0, z_2 = -20z_1 + 35z_0\} \\
\phi(E_3) = \{z_3 = 28z_1 - 35z_0, z_2 = 20z_1 - 29z_0\} \\
\phi(E_4) = \{z_3 = 78z_1 - 89z_0, z_2 = 60z_1 - 73z_0\} \\
\phi(E_5) = \{z_3 = z_2 + \frac{6}{5}z_0, z_1 = \frac{3}{5}z_0\} \\
\phi(E_6) = \{z_2 = 0, z_0 = 0\}.
\end{array}$$

Beispiel II

Wir wählen die Punkte

$$P_1 = (1 : 0 : 0), P_2 = (0 : 1 : 0), P_3 = (0 : 0 : 1), P_4 = (1 : 1 : 1), P_5 = (1 : 2 : 3), P_6 = (1 : 3 : 5).$$

Eine k -Basis des Vektorraums der Kubiken durch P_1, \dots, P_6 ist

$$\begin{aligned} f_0 &= x_0^2 x_1 - 2x_0 x_1^2 + x_0 x_1 x_2 \\ f_1 &= 2x_0^2 x_1 + x_0^2 x_2 - 4x_0 x_1^2 + x_0 x_2^2 \\ f_2 &= -2x_0^2 x_1 + 12x_0^2 x_2 - 11x_0 x_1^2 + x_1^2 x_2 \\ f_3 &= -5x_0^2 x_1 + 24x_0^2 x_2 - 20x_0 x_1^2 + x_1 x_2^2 \end{aligned}$$

Damit erhält man eine rationale Abbildung

$$\phi : \mathbf{P}^2 \rightarrow \mathbf{P}^3, (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (f_0 : f_1 : f_2 : f_3).$$

Indem man ansetzt $f = c_0 z_0^3 + \dots + c_{19} z_3^3$ und dann $z_i = f_i$ einsetzt, erhält man, daß das Bild unter ϕ der Gleichung

$$42z_0^3 - 50z_0^2 z_1 + 24z_0^2 z_2 - 9z_0^2 z_3 + 12z_0 z_1^2 - 2z_0 z_1 z_2 - 4z_0 z_2^2 + z_0 z_3^2 + 2z_1 z_2^2 - z_1 z_2 z_3 = 0$$

genügt.

Singularitäten: Die Fläche hat genau eine Singularität, nämlich in $(0 : 0 : 1 : 2)$.

Geraden auf der Fläche:

1. Typ $z_3 = az_1 + bz_0, z_2 = cz_1 + dz_0$:

$$\begin{aligned} (a, b, c, d) &= (1, 23, 0, 13), (2, 11, 0, 8), (3, 7, 0, 7), (4, 2, 0, 7), (4, 2, 2, -1), \\ &= (6, -2, 0, 8), (6, -2, 3, -2), (12, -14, 0, 13), (12, -14, 6, -7), (24, -53, 12, -26). \end{aligned}$$

2. Typ $z_3 = az_2 + bz_0, z_1 = cz_0$:

$$\begin{aligned} (a, b, c) &= (0, 10, 2), (1, 9, 3), (2, -1, 2), (2, 0, 3), (2, 2, \frac{7}{2}), \\ &= (2, 4, \frac{11}{3}), (\frac{5}{3}, 5, \frac{11}{3}), (\frac{3}{2}, 7, \frac{7}{2}). \end{aligned}$$

3. Typ $z_3 = az_2 + bz_1, z_0 = 0$:

$$(a, b) = (2, 0).$$

4. Typ $z_2 = az_0, z_1 = bz_0$: kommt nicht vor.

5. Typ $z_2 = az_1, z_0 = 0$:

$$a = 0.$$

6. Typ $z_1 = 0, z_0 = 0$:

kommt vor.

Insgesamt gibt es also 21 Geraden auf der Fläche.

Die Verbindungsgeraden und die Kegelschnitte durch die P_i 's:

$$\begin{array}{llll} \ell_{12} = & x_2 & \ell_{13} = & x_1 & \ell_{14} = & x_1 - x_2 \\ \ell_{15} = & 3x_1 - 2x_2 & \ell_{16} = & 5x_1 - 3x_2 & \ell_{23} = & x_0 \\ \ell_{24} = & x_0 - x_2 & \ell_{25} = & 3x_0 - x_2 & \ell_{26} = & 5x_0 - x_2 \\ \ell_{34} = & x_0 - x_1 & \ell_{35} = & 2x_0 - x_1 & \ell_{36} = & 3x_0 - x_1 \\ \ell_{45} = & x_0 - 2x_1 + x_2 & \ell_{46} = & x_0 - 2x_1 + x_2 & \ell_{56} = & x_0 - 2x_1 + x_2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} q_1 &= x_0(x_0 - 2x_1 + x_2) \\ q_2 &= x_1(x_0 - 2x_1 + x_2) \\ q_3 &= x_2(x_0 - 2x_1 + x_2) \\ q_4 &= 15x_0 x_1 - 12x_0 x_2 + x_1 x_2 \\ q_5 &= 5x_0 x_1 - 6x_0 x_2 + x_1 x_2 \\ q_6 &= 3x_0 x_1 - 4x_0 x_2 + x_1 x_2 \end{aligned}$$

ANHANG A

Vorlesungsankündigung

MATHEMATISCHES INSTITUT
UNIVERSITÄT ERLANGEN-NÜRNBERG
Priv.-Doz. Dr. W. Ruppert

Bismarckstraße 1 1/2, 10. Juli 1996
D-91054 Erlangen
Telefon: 09131/852466
Email: ruppert@mi.uni-erlangen.de

Vorlesungsankündigung
für das Wintersemester 1996/97

Algebraische Geometrie

Mit der Erfindung der kartesischen Koordinaten durch Descartes und Fermat in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts wurde es möglich, geometrische Fragestellungen algebraisch zu formulieren und mit den Methoden der Algebra zu behandeln. Heutzutage lernt man bereits in der Schule, wie man einfache geometrische Gebilde wie Geraden, Parabeln, Ebenen und Kugeln durch Gleichungen beschreibt.

In der Algebraischen Geometrie studiert man nun allgemein Lösungsmengen polynomialer Gleichungen. Dazu gehören geometrische Objekte, aber auch diophantische Gleichungen.

Die vierstündige Vorlesung will eine Einführung in die Algebraische Geometrie geben und richtet sich an Studenten des Hauptstudiums; Grundkenntnisse der Algebra werden vorausgesetzt. Ergänzt wird die Vorlesung durch zweistündige Übungen.

Zeit und Ort der Vorlesung: Di, Do 8-10, Übungsraum 3

Beginn: 5. November 1996

Zeit und Ort der Übungen: nach Vereinbarung

Nummer im Vorlesungsverzeichnis: 06141 und 06142

gez. W. Ruppert

Übungen

1. Aufgabe 1.11

Sei $X = \{(t^3, t^4, t^5) \in \mathbf{A}^3 : t \in k\}$ und $\mathfrak{p} = I(X)$. Zeige, daß \mathfrak{p} ein Primideal der Höhe 2 ist, das nicht von 2 Elementen erzeugt werden kann.

- Betrachte den Ringhomomorphismus $\phi : k[x, y, z] \rightarrow k[t]$, der durch $\phi(x) = t^3$, $\phi(y) = t^4$, $\phi(z) = t^5$ definiert wird. Offensichtlich gilt $\mathfrak{p} = \text{Kern}(\phi)$. Da $\text{Bild}(\phi) \subseteq k[t]$ ein Integritätsring ist, ist damit \mathfrak{p} ein Primideal.
- Durch Probieren findet man $\mathfrak{p}' = (x^3 - yz, y^2 - xz, z^2 - x^2y) \subseteq \mathfrak{p}$. Sei nun $f(x, y, z) \in \mathfrak{p}$. Wir rechnen modulo \mathfrak{p}' . Unter Benutzung von $z^2 - x^2y \in \mathfrak{p}'$ kann man höhere Potenzen von z eliminieren, also findet man $f(x, y, z) \equiv g(x, y) + h(x, y)z \pmod{\mathfrak{p}'}$. Nun kann man wegen $xz \equiv y^2 \pmod{\mathfrak{p}'}$, $yz \equiv x^3 \pmod{\mathfrak{p}'}$ auch Monome, die xz oder yz enthalten, eliminieren, also

$$f(x, y, z) \equiv g(x, y) + cz \pmod{\mathfrak{p}'}$$

mit $c \in k$. Einsetzen liefert $g(t^3, t^4) + ct^5 = 0$. Da $g(t^3, t^4)$ kein Monom t^5 enthalten kann, folgt $c = 0$, also $g(t^3, t^4) = 0$. Nun folgt mit nachfolgender Überlegung $g(x, y) = k(x, y)(x^4 - y^3)$, woraus wegen $x^4 - y^3 = x(x^3 - yz) - y(y^2 - xz) \in \mathfrak{p}'$ sofort $f(x, y, z) \in \mathfrak{p}$ folgt. Damit folgt

$$\mathfrak{p} = (x^3 - yz, y^2 - xz, z^2 - x^2y).$$

- Sei $\mathfrak{m} = (x, y, z)$. Dann ist $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}\mathfrak{m}$ ein k -Vektorraum.
Behauptung: $x^3 - yz, y^2 - xz, z^2 - x^2y$ sind k -linear unabhängig in $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}\mathfrak{m}$.
Beweis: Angenommen, die 3 Funktionen wären linear abhängig. Dann gibt es $a_1, a_2, a_3 \in k$, nicht alle 0, $b_1(x, y, z), b_2(x, y, z), b_3(x, y, z) \in k[x, y, z]$ ohne konstanten Term mit

$$\begin{aligned} a_1(x^3 - yz) + a_2(y^2 - xz) + a_3(z^2 - x^2y) &= \\ = b_1(x, y, z)(x^3 - yz) + b_2(x, y, z)(y^2 - xz) + b_3(x, y, z)(z^2 - x^2y). \end{aligned}$$

Die Terme vom Grad 2 sind:

$$-a_1yz - a_2xz + a_3z^2 = 0,$$

also $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, woraus die lineare Unabhängigkeit folgt.

- Damit folgt natürlich $\dim_k \mathfrak{p}/\mathfrak{p}\mathfrak{m} = 3$, also kann \mathfrak{p} nicht von 2 Elementen erzeugt werden.
- Wäre $h(\mathfrak{p}) = 1$, so wäre \mathfrak{p} Hauptideal, wäre $h(\mathfrak{p}) = 3$, so wäre \mathfrak{p} maximal, beide Fälle treten nicht ein, also folgt $h(\mathfrak{p}) = 2$.

2. Übung

$f(x, y)$ und $g(x, y)$ seien Polynome mit $\mu(f) = m$ und $\mu(g) = n$, wo μ die Multiplizität eines Polynoms bezeichnet. Also

$$f = f_m + f_{m+1} + \dots, \quad g = g_n + g_{n+1} + \dots$$

mit f_i, g_i homogen vom Grad i .

LEMMA 31. f_m und g_n seien teilerfremd. Ist $h \in (f, g)$ mit $\mu(h) = t$, so kann man eine Darstellung $h = af + bg$ finden mit $\mu(a) \geq t - m$ und $\mu(b) \geq t - n$.

Beweis:

1. Wir haben eine Darstellung $h = af + bg$. Ist $a = 0$ oder $b = 0$, so sind wir bereits fertig. Also können wir $a \neq 0, b \neq 0$ annehmen. Sei $\mu(a) = s - m$.

2. Wir nehmen jetzt an, daß $s < t$ gilt. Dann ist $\mu(af) = s < t$, also auch $\mu(bg) = s$ und damit $\mu(b) = s - n$. Wir haben also

$$0 = h_s = a_{s-m}f_m + b_{s-n}g_n.$$

Wege der Teilerfremdheit von f_m und g_n gibt es also ein homogenes Polynom c_{s-m-n} vom Grad $s - m - n$ mit

$$a_{s-m} = c_{s-m-n}g_n, \quad b_{s-n} = -c_{s-m-n}f_m.$$

Damit gilt

$$(a - c_{s-m-n}g)f + (b + c_{s-m-n}f)g = af + bg = h$$

und

$$\mu(a - c_{s-m-n}g) > s.$$

Wir haben also eine neue Darstellung von h gefunden. Man kann den Prozeß wiederholen, solange $\mu(a) < t - m$ gilt.

3. Mit dem beschriebenen Verfahren können wir o.E. $\mu(a) \geq t - m$ erreichen. Dann gilt natürlich auch $\mu(b) \geq t - n$. ■

Sei V_d der Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad d in x, y . Dann gilt $\dim V_d = d + 1$ für $d \geq 0$ und $\dim V_d = 0$ für $d < 0$.

LEMMA 32. f_m und g_n seien homogene teilerfremde Polynome vom Grad m und n . Sei

$$\psi : V_{d-m} \oplus V_{d-n} \rightarrow V_d, \quad (a_{d-m}, b_{d-n}) \mapsto a_{d-m}f_m + b_{d-n}g_n.$$

ψ ist genau dann surjektiv, wenn $d \geq m + n - 1$ gilt.

Beweis: Sei $(a_{d-m}, b_{d-n}) \in \text{Kern}(\psi)$. Wegen der Teilerfremdheit von f_m und g_n gibt es ein homogenes Polynom c_{d-m-n} mit

$$a_{d-m} = c_{d-m-n}g_n, \quad b_{d-n} = -c_{d-m-n}f_m.$$

Also gilt

$$\text{Kern}(\psi) = V_{d-m-n}(g_n, -f_m) \simeq V_{d-m-n}.$$

Nun ist

$$d + 1 = \dim V_d \geq \dim \text{Bild}(\psi) = \dim V_{d-m} + \dim V_{d-n} - \dim V_{d-m-n}.$$

Für $d \geq m + n$ ist $\dim \text{Bild}(\psi) = (d - m + 1) + (d - n + 1) - (d - m - n + 1) = d + 1$, also ψ surjektiv.

Für $d = m + n - 1$ ist $\dim V_{m+n-1} = m + n$ und $\dim \text{Bild}(\psi) = n + m$, insbesondere ist ψ surjektiv.

Für $\max(m, n) \leq d \leq m + n - 1$ gilt $\dim \text{Bild}(\psi) = d - m + 1 + d - n + 1 = 2d - m - n + 2$. Also ist ψ genau dann surjektiv, wenn $d + 1 = 2d - m - n + 2$ gilt, d.h. nur für $d = m + n - 1$.

Für $d < \max(m, n)$ kann ψ natürlich nicht surjektiv sein. ■

LEMMA 33. Seien f, g Polynome mit $\mu(f) = m, \mu(g) = n$, so daß f_m und g_n teilerfremd sind. Sei $t \geq m + n - 1$. Gilt dann $\mathfrak{m}^{t+1} \subseteq (f, g)$, so gilt auch $\mathfrak{m}^t \subseteq (f, g)$.

Beweis: Sei $h \in \mathfrak{m}^t$. Wir schreiben $h = h_t + h'$ mit $h' \in \mathfrak{m}^{t+1}$. Nach Lemma gibt es a_{t-m}, b_{t-n} mit $h_t = a_{t-m}f_m + b_{t-n}g_n$. Nun ist

$$\mu(h - (a_{t-m}f + b_{t-n}g)) \geq t + 1,$$

also gibt es nach Voraussetzung a', b' mit

$$h - (a_{t-m}f + b_{t-n}g) = a'f + b'g,$$

also $h \in (f, g)$. ■

Sei \mathfrak{m} das von x, y erzeugte Ideal in $k[x, y]$ und $\tilde{\mathfrak{m}}$ das von x, y erzeugte Ideal in \mathcal{O} . Dann gilt

$$\mathcal{O}/\tilde{\mathfrak{m}}^{m+n} + (f, g) \simeq k[x, y]/\mathfrak{m}^{m+n} + (f, g).$$

Wir haben eine exakte Sequenz

$$k[x, y]/\mathfrak{m}^n \oplus k[x, y]/\mathfrak{m}^m \xrightarrow{\phi} k[x, y]/\mathfrak{m}^{m+n} \rightarrow k[x, y]/\mathfrak{m}^{m+n} + (f, g) \rightarrow 0,$$

mit $\phi((a, b)) = af + bg$. Es folgt

$$\begin{aligned} \dim k[x, y]/\mathfrak{m}^{m+n} + (f, g) &= \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + \dim \text{Kern}(\phi) - \frac{m(m+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \\ &= \frac{(m^2 + 2mn + n^2 + m + n) - (m^2 + m) - (n^2 + n)}{2} + \dim \text{Kern}(\phi) = \\ &= mn + \dim \text{Kern}(\phi). \end{aligned}$$

LEMMA 34. ϕ ist genau dann injektiv, wenn f_m und g_n teilerfremd sind.

Beweis: Sind f_m und g_n teilerfremd, so folgt wie oben die Injektivität von ϕ . Sei jetzt $f_m = h_1 f'_{m-1}$ und $g_n = h_1 g'_{n-1}$ mit einer Linearform h_1 . Dann gilt

$$\phi((g'_{n-1}, -f'_{m-1})) = g'_{n-1} f_m - f'_{m-1} g_n = 0,$$

also ist ϕ nicht injektiv. ■

Wir haben jetzt

$$i(P, F \cdot G) = \dim \mathcal{O}/(f, g) \geq \dim \mathcal{O}/\mathfrak{m}^{m+n} + (f, g) = mn + \dim \text{Kern}(\phi).$$

Sind f_m und g_n nicht teilerfremd, so folgt $i(P, F \cdot G) > mn$. Sind f_m und g_n teilerfremd, so folgt $i(P, F \cdot G) = mn$.