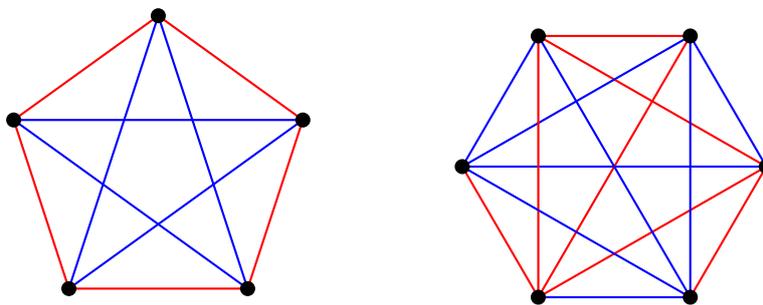


# DIE PROBABILISTISCHE METHODE

Timm Oertel

Die probabilistische Methode ist ein Beweisverfahren, das vielfältige Anwendungen in der Graphentheorie, Zahlentheorie und kombinatorischen Geometrie findet. Die Kern-Idee kann wie folgt beschrieben werden. Um die Existenz eines Objektes mit bestimmten Eigenschaften zu beweisen, konstruiert man eine geeignete Wahrscheinlichkeitsverteilung und zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewähltes Element die ausgewählte Eigenschaft besitzt, positiv ist.

Ein klassisches Beispiel stammt aus der Ramsey-Theory. Sei  $k \geq 3$ . Wieviele Knoten muss ein vollständiger Graph besitzen, damit jede beliebige Einfärbung der Kanten (sagen wir mit Rot und Blau) mindestens eine monochromatische  $k$ -Clique enthält, das heißt einen vollständigen Subgraph mit  $k$  Knoten dessen Kanten alle entweder Blau oder Rot sind? Mit Hilfe der probabilistischen Methode lässt sich zeigen, dass der Graph mindestens  $2^{k/2}$  viele Knoten haben muss. Um dies zu sehen, sei  $n$  die Anzahl der Knoten des Graphen, und um einen Widerspruch zu erhalten nehmen wir an, dass  $n < 2^{k/2}$ . Wir färben alle Kanten unabhängig voneinander, mit gleicher Wahrscheinlich, Rot oder Blau. Wenn wir nun  $k$  Knoten betrachten, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Knoten mit roten Kanten verbunden sind  $2^{-\binom{k}{2}}$ . Somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass irgendeine Auswahl von  $k$  Knoten eine monochromatische Färbung hat, höchstens  $\binom{n}{k} \cdot 2 \cdot 2^{-\binom{k}{2}}$ . Nun gilt mit unserer Annahme, dass  $\binom{n}{k} \cdot 2 \cdot 2^{-\binom{k}{2}} < 1$ . Dies bedeutet, dass mindestens eine Färbung existiert, die keine monochromatische  $k$ -Clique besitzt. Somit muss  $n \geq 2^{k/2}$  gelten.



$K_5$  mit einer Färbung ohne monochromatischer 3-Clique.  $K_6$  mit einer zufälligen Färbung, mit mehreren monochromatischen 3-Cliques.

Das Ziel dieses Seminars wird sein, die grundlegenden Techniken zu erarbeiten und verschiedene Anwendungen kennenzulernen. Als Grundlage hierfür dient das Buch *“The Probabilistic Method”* von Noga Alon und Joel H. Spencer, 2016 (eine digitale Version von 2000 ist über die Universitätsbibliothek verfügbar).

Das Seminar wird aus wöchentlichen Vorträgen der TeilnehmerInnen bestehen, wobei die einzelnen Themen am Anfang des Semesters verteilt werden. Die Studienleistung zum Seminar besteht aus a) einem Seminarvortrag von maximal 90 Minuten Dauer (inklusive Fragen und Diskussion), b) einer schriftlichen Ausarbeitung von maximal 10 Seiten Länge zu Ihrem Vortragsthema und c) einer aktiven Teilnahme.

Das Seminar richtet sich an Studierende ab dem fünften Semester. Grundkenntnisse der Analysis, Linearen Algebra und Stochastik sind ausreichend. Wenn Sie teilnehmen möchten (oder wenn Sie Fragen haben) kontaktieren Sie mich bitte vorab per email: [tim.oertel@fau.de](mailto:tim.oertel@fau.de)