Department
MATHEMATIK

Bachelorseminar

Variationelle Probleme für Integralfunktionale

Betreuer: Manuel Friedrich

Sprache: Deutsch

Voraussetzungen: Grundvorlesungen in Analysis. Für manche Themen sind Vorkenntnisse in Sobolevräumen hilfreich.

Zielgruppe: Studierende ab dem 5. (evtl. 3.) Fachsemester der Studiengänge: B.Sc. Mathematik / Technomathematik / Wirtschaftsmathematik bei entsprechenden Vorkenntnissen

Inhalt:

Die Variationsrechnung ist einer der klassischen Bereiche der Mathematik. Die zentrale mathematische Fragestellung besteht darin, eine Funktion zu finden, die ein Energiefunktional minimiert. Über das Aufstellen von Optimalitätsbedingungen ist die Variationsrechnung zudem besonders eng verknüpft mit der Theorie von (partiellen) Differentialgleichungen. Viele Probleme aus der Analysis oder der Geometrie lassen sich als Variationsprobleme formulieren, wichtige Anwendungen hat die Variationsrechnung aber vor allem in der Physik, den Ingenieurwissenschaften und den Wirtschaftswissenschaften. Das beginnt bereits bei alltäglichen Fragestellungen: Wie komme ich am schnellsten von A nach B? Wie kann ich mit einem Zaun ein möglichst großes Gebiet umschließen? Wie können Produktionsprozesse optimiert werden?
Je nach Interesse und Vorwissen werden wir Buchkapitel oder Forschungsartikel behandeln.

Mögliche Themen:

- **Euler-Lagrange-Gleichungen**
  Viele Variationsprobleme lassen sich als Integralfunktionale der Form

  $$E(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x)) \mathrm{d}x \tag{1}$$

  für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und geeignete Funktionen $u \colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ schreiben. Um eine Funktion u zu identifizieren, die E minimiert, verfolgt man eine Strategie, die bereits aus den Analysisgrundvorlesungen bekannt ist: Man bestimmt Nullstellen der "Ableitung von E". Hier ist der Begriff der Ableitung in einem verallgemeinerten Sinn zu verstehen und führt auf bestimmte (partielle) Differentialgleichungen, die so gennanten *Euler-Lagrange Gleichungen.* (Mögliche Literatur: [2, 3])

- **Minimalflächen**
  Eine Minimalfläche ist eine Fläche im Raum, die lokal minimalen Flächeninhalt hat. Beispiele sind etwa Seifenhäute, die über einen Rahmen gespannt werden, oder das Dach des Münchner Olympiastadions. Mathematisch bestimmt man kritische Punkte des Funktionals (1) mit $f(x, u(x), \nabla u(x)) = \sqrt{1 + |\nabla u|^2}$. Das führt auf die *Minimalflächengleichung*
  $$\operatorname{div}\Big(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\Big) = 0.$$
  Diese Theorie hat starke Verbindungen zur Differentialgeometrie. (Mögliche Literatur: [2])

- **Geodäten**
  Geodäten beschreiben lokal kürzeste Verbindungskurven zweier Punkte. Während im euklidischen Raum kürzeste Verbindungen stets Geraden sind, ist diese Fragestellung auf gekrümmten Flächen, etwa Riemannschen Mannigfaltigkeiten, interessant. Die Variationsrechnung liefert eine Antwort auf diese Frage durch Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung, die *Geodätengleichung*. (Mögliche Literatur: [4])

- **Allgemeine Existenzresultate für Integralfunktionale**
  Ein wesentliches Kriterium für die Existenz von Minimierern für Integrale der Form (1) ist die Konvexität des Integranden f. Viele Anwendungsbeispiele für vektorwertige Probleme, z.B. in der Elastizitätstheorie, werden notwendigerweise durch nichtkonvexe Probleme beschrieben. Ziel ist es daher, schwächere Konvexitätsbegriffe zu entwickeln, wie etwa die Poly- oder die Quasikonvexität, unter denen noch immer die Existenz von Minimierern garantiert werden kann. (Mögliche Literatur: [2, 3, 5])

- **Nichtexistenz von Lösungen: Relaxation**

  Manche Variationsprobleme besitzen keine Lösung, etwa wenn f in (1) keine geeignete Konvexitätsbedingung erfüllt. Obwohl diese Situation pathologisch erscheinen mag, ist die Nichtexistenz von Minimierern oft ein Indikator für interessante physikalische Phänomene, wie zum Beispiel die Ausbildung von Mikrostrukturen in Materialien. In diesem Fall kann E durch ein "besseres" Energiefunktional ersetzt werden, die so genannte Relaxation, welche die wesentlichen Eigenschaften des ursprünglichen Problems erhält und die Existenz von Minimierern garantiert. (Mögliche Literatur: [4, 5])

- **Variationelle Konvergenz**

  In vielen Anwendungsproblemen enthält das Funktional E der Form (1) einen kleinen Parameter ε, d.h. $E = E_\varepsilon$. Hier könnte ε die Rolle einer Diskretisierung spielen, die Dicke eines Materials sein oder eine Mikrostruktur in einem Material beschreiben. Es stellt sich die grundsätzliche Frage nach einer Limesbildung $\varepsilon \to 0$, also ob man in einem geeigneten Sinne einen Limes der Energiefunktionale $(E_\varepsilon)_\varepsilon$ bestimmen kann. Das führt auf den Begriff der Γ-*Konvergenz*. (Mögliche Literatur: [1, 4])

References

[1] A. Braides. Γ-*convergence for beginners.*

[2] B. Dacorogna. *Introduction to the Calculus of Variations.*

[3] L. Evans. *Partial Differential Equations.*

[4] J. Jost, X. Li-Jost. *Calculus of Variations.*

[5] S. Müller. *Variational models for microstructure and phase transitions.*